АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7577—8660

*

№ 8 1959

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), докт. техн. наук *А. М. Васильев* (Электротехника), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 4
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 17
Алгебра 22
Многочлены и линейная алгебра 22
Группы 25
Поля, кольца и структуры 27
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 31
Теория функций действительного переменного . . 41
Теория множеств 44
Приближение функций полиномами и их обобщениями 45
Теория функций комплексного переменного . . . 53
Дифференциальные уравнения 68
Обыкновенные дифференциальные уравнения 68
Уравнения в частных производных 78
Приложения к физике, технике и естественным наукам 88
Интегральные уравнения 95
Приложения интегральных уравнений . . . — 96
Вариационное исчисление 97
Анализ (другие вопросы) 100
Числовые ряды 100
Специальные функции 104
Интегральные преобразования и операционное исчисление 106
Приложения общих методов математического анализа 106
Функциональный анализ 118
Теория вероятностей 120
Математическая статистика 124
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 126
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 134
Геометрия 135
Приложения геометрии 136
Элементарная геометрия 137
Аналитическая геометрия 138
Проективная и неевклидовы геометрии . . . 139
Начертательная геометрия 140
Алгебраическая геометрия 143
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 147
Геометрия n-мерного пространства 153
Теория относительности 153
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 158
Метрические методы в геометрии 161
Выпуклые многообразия 162
Численные и графические методы . . . . . —
Таблицы 172
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . —
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 187
Авторский указатель 187

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION, ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

EDITORS OF SERIES: corresponding member of the Academy of Sciences of the USSR *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Alpatov* (Biologiya), doctor of technical sciences *A. M. Vasiljev* (Electrotekhnika), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya) candidate of technical sciences *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 4
Foundations. Mathematical logic 6
Theory of numbers 17
Algebra 22
Polynomials, linear algebra 22
Groups 25
Fields, rings, lattices 27
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 31
Theory of functions of real variables 41
Theory of sets 44
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 45
Theory of functions of complex variables 53
Differential equations 68
Ordinary differential equations 68
Partial differential equations 78
Applications to physics, technology and natural sciences 88
Integral equations 95
Applications of integral equations . . . . . —
Calculus of variations 96
Analysis (other aspects) 97
Numerical series 100
Special functions 100
Integral transforms, operational calculus . . . 104
Applications of general methods of mathematical analysis 106
Functional analysis 106
Theory of probability 118
Mathematical statistics 120
Theory of games, operational research, mathematical economics 124
Applications of probabilities and statistical methods 126
Geometry 134
Applications of geometry 135
Elementary geometry 136
Analytical geometry 137
Projective and non-euclidean geometries . . . 138
Descriptive geometry 139
Algebraic geometry 140
Differential geometry of 3-dimensional space 143
Geometry of n-dimensional space 147
Theory of relativity 153
Global theory of differentiable manifolds . . . 153
Metric methods in geometry 158
Convex manifolds 161
Numerical and graphical methods 162
Tables . . . . . —
Computers and mathematical devices 172
Application of computer devices . . . . . —
Author index 187

Editorial office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

Технический редактор *Г. А. Шевченко*

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. А. Левин*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 7577—8660 **№ 8** **Август 1959 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

7577. **За дальнейший подъем производительных сил страны, за технический прогресс во всех отраслях народного хозяйства. Хрущев Н. С.** М., Госполитиздат, 1959, 48 стр., 50 коп.

7578. **Материалы Июньского Пленума ЦК КПСС. (О работе партийных и советских организаций и Советов народного хозяйства по выполнению решений XXI съезда КПСС об ускорении технического прогресса в промышленности и строительстве. Постановление Пленума ЦК КПСС, принятое 29 июня 1959 года. — Героическим трудом воздвигнем величественное здание коммунизма! Обращение Пленума ЦК КПСС к рабочим и работницам, к колхозникам и колхозницам, к советской интеллигенции, ко всем трудящимся Советского Союза.)** М., Госполитиздат, 1959, 56 стр., 60 коп.

7579. **Наука и строительство коммунизма. Несмеянов А.,** Коммунист, 1959, № 1, 53—69

7580. **Советская наука в первом году семилетки. Топчиев А. В.,** Вестн. АН СССР, 1959, № 1, 3—10

7581. **Математика в СССР за 40 лет (Краткий обзор). Бицадзе А. В.,** Шусюэ цзиньчжань, Progr. Math., Shuxue jinzhan, 1958, **4**, № 4, 583—585 (кит.)

7582. **Развитие науки в Сибири и на Дальнем Востоке. Лаврентьев М. А.,** Вестн. АН СССР, 1957, № 12, 3—7

7583. **Развитие науки в Сибири. Лаврентьев М. А., Черненко А. К.,** Вестн. АН СССР, 1959, № 1, 65—67

7584. **Итоги научной деятельности Академии наук Казахской ССР за 1957 год. Чокин Ш. Ч.,** КазССР Гылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1958, № 6, 6—28

7585. **Развитие математики в Азербайджане. Гусейнов** (Азәрбајчанда риязијјатын инкишафы. Һүсејнов Ә. И.), Элми әсәрләр. Азерб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 10, 239—261 (азерб.)

Освещаются труды азербайджанских математиков в области интегральных и дифференциальных уравнений, теории функций, геометрии, алгебры и теории чисел, истории математики и методики математики. Упоминаются советские ученые, оказавшие большую помощь в развитии математики в Азербайджане. Дана библиография цитированных в статье работ. К. Т. Ахмедов

7586. **Международная конференция по оперативному анализу. Отчет Херц** (The International Conference on Operations Research: a report. Hertz David Bendel), Manag. Sci., 1958, **4**, № 3, 344—347 (англ.)

Отчет о Международной конференции по операционному анализу, проведенной 2—6 сентября 1957 г. в Оксфорде (Англия) Институтом наук об управлении США совместно с обществами по операционному анализу США и Великобритании. В конференции приняли участие 275 специалистов из 21 страны, в том числе из Польши. Содержание докладов и дискуссий не пересказывается, излагаются лишь основные идеи операционного анализа, связанные с анализом восприятия стимулов от окружающей среды, координации этих восприятий, способностей к действию и требований окружающего. Участники конференции выразили пожелание, чтобы планируемая международная федерация обществ по операционному анализу организовывала аналогичные конференции каждые три года, создала международный центр для сбора литературы и содействовала развитию национальных обществ в разных странах. А. С. Монин

7587. **Ломоносовские чтения 1957 года на механико-математическом факультете МГУ. Скорый И. А., Копытов В. Д.,** Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 2, 241—246

7588. **Первый конгресс ИФАК. Проект научной программы Первого конгресса Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) в Москве.** Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 1, 107—110

7589. **Совещание по теории вероятностей и математической статистике в Ереване, 19—25 сент. 1958 г.** Вестн. АН СССР, 1959, № 1, 83

7590. **Международный конгресс математиков в Эдинбурге, 14—21 авг. 1958 г. Сираждинов С.,** УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, № 6, 88—89

7591. **Семинар по техническим приложениям математической логики (1957—1958 гг.). Гребенщиков В. Н.,** Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 1, 97—99

7592. **О проведении в Москве первого международного конгресса по автоматическому управлению.** Вестн.

электропром-сти, 1959, № 1, 80

Конгресс намечен на 25 июня—5 июля 1960 г. В Академии наук СССР его подготовкой занимается национальный комитет.

7593. Конференция по алгебраической геометрии (Таормина, 27 октября—2 ноября 1958 г.). (Convegno di geometria algebrica. (Taormina, 27 ott.—2 nov. 1958).—), Archimede, 1958, **10**, № 6, 267—268 (итал.)

7594. Информация о совещании по применению математических методов в биологии. Терентьев П. В., Линник Ю. В., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 1, 114—116

Заседания происходили с 12 по 17 мая 1958 г.

7595. Информация о Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике. Амбарцумян Г., Туманян С., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 1, 116—120

Совещание состоялось в г. Ереване с 19 по 25 сентября 1958 г.

7596. Присуждение медалей Лондонского королевского общества в 1958 г. Медаль Сильвестра присуждена проф. Ньюману. Хиншелвуд (The Royal Society. Award of medals, 1958. Sylvester Medal: Prof. M. H. A. Newman, F. R. S. Hinshelwood Cyril), Nature, 1958, **182**, № 4650, 1633 (англ.)

Весьма краткий обзор научных достижений Ньюмана в областях: теория непрерывных групп, комбинаторная топология, приложения комбинаторных методов и математическая логика. К. А. Рыбников

7597. Присуждение медалей Лондонского королевского общества в 1958 г. Медаль Коплея присуждена проф. Литлвуду. Хиншелвуд (The Royal Society. Award of medals, 1958. Copley Medal: Prof. J. E. Littlewood, F. R. S. Hinshelwood Cyril), Nature, 1958, **182**, № 4650, 1631 (англ.)

Краткий обзор научных достижений проф. Литлвуда в связи с присуждением ему медали Общества. Дано описание совместных работ Литлвуда с Харди, М. Картрайт, Оффордом и Палеем. К. А. Рыбников

7598. Философские вопросы современного естествознания. Чесноков Е. Н., Вестн. АН СССР, 1959, № 1, 132—138

7599. О природе математических постоянных. Йорграу, Ливингстон (On the nature of mathematical constants. Yourgrau Wolfgang, Livingstone Donald), Methods, 1957, **9**, № 33—34, 3—29 (англ.)

Математика рассматривается как формальная дедуктивная система. Дано понимание постоянного и переменного, различие понятий константа и инвариант, различные применения этих понятий. Изложены взгляды древних греков (Парменида, Пифагора, Платона и др.). Поставлен вопрос о роли константности в математике. За основу для проверки законности своей точки зрения авторы берут трансцендентальный идеализм Канта.

Примечание референта. Следует отметить: 1) кантианскую позицию авторов в вопросе о сущности понятий математики, 2) неправильную оценку Демокрита как плюралиста, отвергающего реальность чувственного мира и «менее возвышенного и высокого, чем Парменид». Н. А. Киселева

7600. О философских и социальных вопросах кибернетики. Клаусс (Despre problemele filozofice şi sociale ale ciberneticii. Klauss George), Cercetări filoz. Acad. R. P. R., 1958, **5**, № 1, 29—45 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор развивает в связи с кибернетикой две основные идеи, а именно: а) связь кибернетики с логикой в виде разрешения вопроса, может ли электронная машина мыслить; б) вопрос о последствиях автоматизации производства на основе электронных машин. Что касается 1-го вопроса, то автор, основываясь на принципах марксистской философии, доказывает, что машина может лишь механически разрешать вопросы, поставленные человеком, и, следовательно, не способна создавать. Электронные машины в качестве инструментов (орудий) мышления могут, однако, избавить мышление от исполнения механических операций, тем самым освобождая его для собственно творческого труда.

Относительно 2-го вопроса автор указывает, что в капиталистическом обществе автоматизация производства углубляет противоречия этого строя, а при социалистическом строе машины, предназначенные для автоматизации производства, освободят человека от исполнения чисто механической работы, позволив ему направить все свои силы на выполнение, в настоящем смысле слова, человеческой работы. Все исследование является аргументацией в пользу кибернетики, доступным объяснением, в свете диалектического материализма, роли и значения кибернетики и отклонением попытки вывести из этой науки идеалистические и реакционные заключения. Резюме автора

7601. Список литературы по математике, изданной на Украине в 1956—1957 гг. Сост. **Сакович Г. Н.,** Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 3, 348—350

7602. Новые книги [по математике]. Второе полугодие 1957 г. Невский В. А., Матем. в школе, 1958, № 4, 85—86

7603. Рулетка Монте-Карло на службе у науки. Крики (La roulette de Monte-Carlo au service de la science. Criqui F.), Atomes, 1958, **13**, № 148, 327—332 (франц.)

Популярное изложение вероятностного моделирования некоторых физических задач методом Монте-Карло. Л. Н. Большев

7604. Консультация редакции журнала «Unternehmensforschung» (Ufo-Beratungsdienst), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 2, 84—96 (нем.)

Отдел журнала, где публикуются наиболее интересные вопросы читателей, ответы на них и ссылки на специальную литературу.

7605 К. Основные формулы физики. Ред. Мензел Д. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1957, 657 стр., илл., 35 р. 40 к.

Первые три главы (из 31 гл.) математические: гл. 1. Основные математические формулы, гл. 2. Статистика, гл. 3. Номограммы. Удельный вес математики в материале остальных глав также велик.

7606 К. Диалектический материализм и вопросы естествознания. Фаталиев Х. М., М., «Сов. наука», 1958, 134 стр., 2 р.

7607 К. Исследования по механике и прикладной математике. Ред. Соколовский В. В. (Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, вып. 1). М., Оборонгиз, 1958, 220 стр., илл., 9 р. 85 к.

7608 Д. Категория вероятности. Смирнов Л. В., Автореф. дисс. канд. филос. н., ЛГУ, Л., 1958

7609 Д. Некоторые вопросы обоснования математики. Чичинадзе М. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисск. ун-т, Тбилиси, 1958

7610 Ж. Научные доклады высшей школы. Энергетика. М-во высш. образования СССР. М., «Сов. наука». Квартальный. 56 р. в год.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

7611. Изучение математики и астрономии в тринадцатом и четырнадцатом столетиях по данным трех рукописей. Торндайк (The study of mathematics and astronomy in the thirteenth and fourteenth centuries as illustrated by three manuscripts. Thorndike Lynn), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 67—76 (англ.)

Краткое описание трех рукописей: рукописи Харли (Harley) № 3647 из Британского музея и латинской рукописи 1414 Ватикана (XIII в.), а также Базельской рукописи F. II. 33 (XIV в.).

Первая рукопись содержит: комментарий к Компутусу Герланда с таблицами, календарь Роберта Гроссетесте, три известных учебника Сакробоско («Algorismus», «Sphere», «Komputus»), геометрическую книгу «Quadrans vetus», написанную, вероятно, Джоном Монпелье, астрономические таблицы, книгу Мессагалы об астролябии с таблицами, элементарно изложенную теорию планет («Theorica planetarum»), которая часто приписывалась Герарду Кремонскому, четыре астрономических трактата Табитбен Курра, канон Арзахеля к толедским таблицам и сами таблицы: «Liber de eclipsi lune», «Liber Humeni Egiptii» и « Liber de inveniendo vera loca omnium planetarum», являющуюся переписанным «Tractatus semisse» Петра из Сент-Омера.

Вторая рукопись содержит с незначительными изменениями многие книги первой, «Liber figure Ptholomei», отсутствующую в других рукописях, и астрологические трактаты.

В третьей рукописи 37 трактатов по математике, физике и астрономии: «Малый Алмагест», приписываемый Герберту «Algonismus de minitiis» Герхарда, «Algorismus proportionum» Николая Орема, сочинения Иордана Неморария о треугольниках, Архимеда о сфере и цилиндре, «Practica geometriae» Доминика Кивассо (Chivasso), «De spheris» Феодосия, «De numeris armonicis» Леви бен Герсона (Gerson), «Alfraganus» в переводе Герарда Кремонского, «De orbe» Мессагалы, «Оптика» Птолемея, «Арифметика» и «Планисфера» Иордана Неморария, «Algorismus demonstratus», сочинения ал-Хазена о зажигательных зеркалах и «De crepusculis», анонимное «Isoperimetrie», «De speculis» Тидеуса, «Liber karastonis» Табита бен Курра, «О сфере» Автоликия в переводе Герарда Кремонского, «Liber trium fratrum», «De aspectibus» Алкинди. «De speculis» Евклида, трактат о треугольниках, книга о весах, приписываемая Иордану Неморарию и Евклиду, книга о квадратуре круга, выполненной Фредериком, имеющаяся только в этой рукописи, сочинения «De habitationibus» Феодосия, «De numeris datis» Иордана Неморария, «Теория планет» Кампануса из Новары, Табита бен Курра о движении сферы, «Theorica motus longitudinum 7 planetarum» Петра из Модены и др. Библ. в примечаниях 17 назв. С. Н. Киро

7612. К вопросу о средневековом счете в Швейцарии. Буркхардт (Zum mittelalterlichen Rechnen in der Schweiz (mit Lichtbildern). Burckhardt J.), Enseign. math., 1958, 4, № 4, 305—306 (нем.)

Описаны 3 находки в Швейцарских библиотеках:

1. Книга Bamberger Rechnbuches у Вагнера, изданная в 1483 г. Отличается от известных экземпляров этой книги иной формой цифр 4, 5, а также употреблением для деления термина «Galei».

2. Таблица умножения для апексов. В отличие от однотипных не содержит ошибок. Форма апексов незначительно отличается от уже описанных.

3. Счетная таблица Герберта. Разделена на 27 колонок для цифр от 1 до 10^{27}; дополнительные 3 колонки отведены для счета мер: унций, скрупул и т. д. Внизу таблицы—справка о монетах. Интерес представляет таблица половин чисел. Аналогичная счетная таблица описана в Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, phil. hist Kl. 1888, 116. К. А. Рыбников

7613. Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы. Феттер Гвидо., В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 11. М., Физматгиз, 1958, 461—514

Обзор развития математики на территории Чехии, Моравии и Силезии от древнейших времен до Белогорской битвы (1620 г.). Археологические находки свидетельствуют об элементах счета и понятии о симметрии, относящихся к периоду 30—50 тыс. лет до н. э. К 1700—2000 гг. до н. э. относятся находки счетных косточек, заменявших абак, и разнообразных свидетельств простейших геометрических знаний. В середине первого тысячелетия пришедшие на территорию Чехии славянские племена знали счет свыше тысячи.

Развитие экономики и торговли в IX—X вв. н. э. вызвали дальнейший рост арифметических знаний. В произведениях художников XI в. широко используется перспективное изображение. В связи с потребностями астрономии получает развитие сферика—наука о шаре. Основанный в 1348 г. Пражский университет имел хорошо поставленное преподавание математики вплоть до упадка в XV в. В XVI и в начале XVII в. вновь усиливается интерес к математическим наукам, особенно к астрономии. К этому времени относится пребывание в Чехии Тихо Браге и Кеплера. В начале XVII в. И. Бюрги составил первые логарифмические таблицы, он же изобрел сокращенное умножение и основанный на правиле ложного положения метод решения алгебраических уравнений высших степеней.

Чешские математики принимают деятельное участие в развитии алгебры и тригонометрии и ведут большую работу по составлению различных математических таблиц. Белогорская битва и тридцатилетняя война вызвали продолжавшийся целое столетие упадок культурной жизни и, в частности, математических наук. В. М. Глушков

7614. «Ей» вместо «Ай». Морган (An «a» for an «i». Morgan Rev. Dare), Math. Teacher, 1958, 51, № 6, 473—474 (англ.)

Франциско Кавальери (1598—1647) не был иезуитом. С 15-летнего возраста он состоял членом ордена иезуатов, который ведет свое существование с XIV в. В 1668 г. орден был распущен. Распространению неверного мнения способствовала путаница в написании двух слов «Iesuit» и «Iesuat». Р. А. Симонов

7615. «Геометрия бесконечного» и ее комментаторы от Бернулли до Кюри. Делорм (La géométrie de l'infini et ses commentateurs de Jean Bernoulli à M. de Cury. Delorme Suzanne), Rev. histoire sci., 1957, 10, № 4, 339—359 (франц.)

Из переписки Фонтенелля с И. Бернулли старшим (1667—1748), печатаемой в настоящее время в Базеле, приводятся выдержки, касающиеся «Начал геометрии бесконечного» Б. Фонтенелля (1727); сообщение об экземпляре этого труда с пометками математика Кюри—автора нескольких мемуаров, напечатанных в трудах Парижской академии. В. П. Зубов

7616. Пьер Мопертюи и история изучения комет. Шумейкер (Pierre de Maupertuis and the history of comets. Schumaker John A.), Scripta Math., 1958, 23, № 1-4, 97—108 (англ.)

Статья написана в связи с 200-летием со дня смерти французского математика и астронома Пьера Луи Моро де Мопертюи (1698—1759), члена Парижской (с 1723 г.) и президента Берлинской (1745—1753) Академий наук. Он впервые сформулировал принцип наименьшего действия, руководил экспедицией по проведению градусных измерений меридиана. Использованы материалы напечатанной без указания автора в 1770 г. в Глазго книги «An essay towards a history of the principal comets that have appeared since the year 1742», содержащей, в частности, краткий очерк жизни Мопертюи, а также «Письмо о кометах», написанное Мопертюи маркизе дю Шателе, бывшей его ученице. Изложение этого письма в статье воспроизведено.

Дата рождения Мопертюи в очерке названа 28 сентября 1698 г. (на 2 месяца и 11 дней позднее указанной в книге Smith, David E., History of Mathematics, vol. I, 1923, 473). Библ. 6 назв. С. Н. Киро

7617. История счетных машин. I. Ларриви (A history of computers. I. Larrivee Jules A.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 6, 469—473 (англ.)

Первая часть краткого популярного (без ссылок на источники) очерка о счетных приспособлениях, приборах и машинах. Содержит краткую историю абака, логарифмических таблиц, планиметров, счетчиков первичного учета, суммирующих машин, интеграторов и пр.

Примечание референта. По-видимому, автору неизвестен вклад русских ученых в развитие счетной техники. Между тем самосчеты Буняковского, вычислительные машины Чебышева, интегратор Крылова и др. занимают видное место в истории рассматриваемого вопроса. Р. А. Симонов

7618. Хронологическая таблица жизни и трудов Фонтенелля (1657—1757) по принципу синхронизма литературных, философских и научных сообщений (Tableau chronologique de la vie et des oeuvres de Fontenelle avec les principaux synchronismes littéraires, philosophiques et scientifiques), Rev. histoire sci., 1957, **10**, № 4, 289—299 (франц.)

7619. Наталия Сергеевна Самойлова-Яхонтова (К 60-летию со дня рождения). Чеботарев Г. А., Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, № 9, 675—680

7620. Евгений Яковлевич Ремез (К шестидесятилетию со дня рождения). Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б., Укр. матем. ж., 1956, **8**, № 2, 218—222

7621. Соломон Григорьевич Михлин (К пятидесятилетию со дня рождения). Бакельман И. Я., Бирман М. Ш., Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 215—221

7622. Юрий Дмитриевич Соколов (К шестидесятилетию со дня рождения). Путята Т. В., Фрадлин Б. Н., Укр. матем. ж., 1956, **8**, № 2, 223—230

7623. Н. Н. Лузин — ученый и педагог. Веселый (N. N. Luzin — vědec a pedagog. Veselý František), Mat. škole, 1958, **8**, № 9, 553—558 (чешск.)

7624. Юлиус Вейсбах как математик. Шмид (Julius Weisbach als Mathematiker. Schmid Wilhelm), Freiberger Forschungsh., 1956, **D**, № 16 63—77 (нем.)

7625. Ламберт (1728—1777). Лабрадор (Lambert (1728—1777). Labrador Juan F.), Gac. mat., 1958, **10**, № 5-6, 131—134 (исп.)

7626. Леонард Эйлер (К 250-летию со дня рождения). Домби (Leonhard Euler (Megemlékezés születésének 250. évfordulóján). Dombi Béla), Pécsi műsz. szemle, 1957, 2, № 4, 1—3 (венг.)

7627. Жорж Валирон (1884—1954). Мийу (Georges Valiron (1884—1954). Milloux H.), Enseign. math., 1956, 2, № 3, 217—223 (франц.)

7628. Памяти Эгона Ульриха (1902—1957), его жизнь и его личность. Неванлинна. Научная деятельность. Виттих (Egon Ullrich in memoriam. Das Leben und die Persönlichkeit. Nevanlinna Rolf; Das wissenschaftliche Werk. Wittich Hans), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, **61**, № 2, 57—65 (нем.)

7629. Джон Хилтон Грейс (1873—1958). Тодд (John Hilton Grace. Todd J. A.), J. London Math. Soc., 1959 **34**, № 1, 113—117 (англ.)

7630. Памяти Тальквиста (1870—1958) (Hj. Tallqvist. In memoriam. L. S.), Arkhimedes, 1958, № 2, 52—54 (шведск.)

7631. Питер Фрейзер (1880—1958). Ходж (Peter Fraser. Hodge W. V. D.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 111—112 (англ.)

7632. Дуглас Рейнер Хартри (1897—1958). Дарвин (Douglas Rayner Hartree. Darwin C. G.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 118—128 (англ.)

Перепечатано из Biogr. Mem. Roy. Soc., 1958

7633 К. Иван Георгиевич Петровский. Библиогр. Сост. Епифанова А. П. (Материалы к библиогр. ученых СССР. АН СССР. Сер. матем., вып. 7). М., АН СССР, 1957, 43 стр., 1 р.

7634 К. Паоло Руффини. Барбенси (Paolo Ruffini. Barbensi Gustavo. Modena, Accad. Sci. Lettere e Arti, 1956, x, 128 p., ill.) (англ.)

7635 Д. Развитие теории дифференциальных уравнений Леонардом Эйлером. (Автореф. докт. дисс.). Симонов Н. И., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 223—228

7636 Д. Физика Леонарда Эйлера. Минченко Л. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1958

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

7637. О преподавании математики будущим учителям средней школы. Пойа (On the curriculum for prospective high school teachers. Polya G.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 2, 101—104 (англ.)

Сообщаются сведения о двух специальных курсах, которые автор ведет из года в год в Стенфордском университете для будущих учителей математики средних школ; указывается, что в других учебных заведениях, выпускающих учителей математики, подобные курсы неизвестны. Курсы эти: 1) Семинар по решению задач (2 семестра по 2 ч. и 1 семестр по 3 ч. в неделю) и 2) курс «От элементарной математики к анализу и научному методу» (2 семестра по 4 ч. и 1 семестр по 3 часа в неделю).

Первый курс имеет целью дать учителю навык решения нетривиальных задач. Задачи часто нелегкие, но на школьном материале или немногим выше; группируются сначала по материалу. Геометрические построения циркулем и линейкой, составление уравнений, биноминальная теорема и арифметические ряды высших порядков оказались очень подходящими темами. На конечной стадии семинара задачи группируются по методам решения для иллюстрации общих идей решения задач, а участникам предоставляется возможность руководства занятиями.

Второй курс содержит краткие основы аналитической геометрии и анализа, заканчивается начальными сведениями о дифференциальных уравнениях. Курс сильно отличается от обычных постоянной связью с элементарной математикой в начале и приложениями к естествознанию во второй половине. Общие методические идеи подчеркиваются на протяжении всего курса, искусственные или стандартные задачи избегаются, эвристическое рассуждение и исторические экскурсы часто выступают на первый план. Первая часть курса называется «Математика как язык». Аналитическая геометрия трактуется как двусторонний словарь языка формул и геометрических образов. В следующей главе — Начала интегрального исчисления — задачи решаются сначала механическим методом Архимеда, с помощью принципа Кавальери и методом исчерпывания, и только после этого вводится символика Лейбница и обычные схемы.

Автор формулирует 9 требований к будущему учителю, привитие которых и осуществляется его курсами. Существенные идеи этих 9 пунктов расширенно изложены в книгах автора «Математика и правдоподобное рассуждение» и «How to solve it?». Первая известна читателям по вышедшему переводу ее, вторая также издается на русском языке.

В заключение автор ставит вопрос: чего должны требовать от преподавания математики в школе? Ответ: способности пользоваться ею. По окончании школы, на производстве или при продолжении учения

бывший школьник будет встречать вопросы, допускающие математическую трактовку. Если он сумеет свести вопрос к вычислению, или составить уравнение, или изобразить графиком — преподавание математики в школе было бы превосходно. Если бывший ученик, хотя и не в состоянии проделать все это, но способен понимать графики и формулы и использовать их, то результат преподавания в школе еще весьма хороший. Если же он не в состоянии уразуметь график и формулу и не чувствует надобности в этом, то итоги школьного преподавания плачевны.

Примечание референта. В Педагогическом институте им. А. И. Герцена референтом и несколькими другими преподавателями в весьма скромном объеме осуществляются основные идеи Пойа в спецсеминаре под названием «Спецсеминар по внеклассной работе». И. Я. Депман

7638. Применение доказательств «от противного». Рейхе (Einführung des antithetischen Beweises. Reiche E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 8 345 (нем.)

В математике применение доказательств «от противного» должно основываться на двух следующих принципах: 1) правильное высказывание приводит к правильному высказыванию, 2) ложное высказывание приводит либо к правильному, либо к ложному высказыванию. При этом предполагается, что производимые мысленные или вычислительные операции справедливы. В качестве примера приводится, что ложное высказывание $-3=+3$ после возведения в квадрат обеих частей равенства становится правильным: $9=9$. Н. Ф. Четверухин

7639. Дидактика математики. Библиографическое исследование. История математики. Чивес (La didattica della matematica. Studio bibliografico. I. La storia della matematica. Cives G.), Period. mat., 1958, **36**, № 3, 129—155 (итал.)

Раздел об истории математики в ряде статей автора под общим заголовком «Дидактика математики» дает подробную библиографию работ на всех языках. Высокая оценка дается автором книге С. И. Вавилова «Исаак Ньютон», переведенной на итальянский язык (1954). В обзоре лишь в редких случаях дается оценка указываемых работ. Работа ценна в качестве библиографического указателя. И. Я. Депман

7640. Из опыта проведения исторических экскурсов на уроках алгебры в средней школе. Чистяков В. Д. Уч. зап. Витебск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 6, 167—190

Методическая разработка для VI—X кл. средней школы. Написана как обобщение опыта школ г. Витебска и Витебской области. Автор привлек новый материал, в частности использован русский перевод древнекитайского математического трактата «Математика в девяти книгах». При отборе материала учтен фактор времени. В конце каждого экскурса приводится список литературы.

Имеются неточности. Автор утверждает, что символика алгебры появилась впервые у арабов в X в. н. э., хотя известно что символика была уже у Диофанта (III в. н. э.). Г. Вессель умер в 1818 г., в статье указан 1802 г. В. Н. Молодший

7641. Задачи воспитания при обучении математике. (A matematikatanítás nevelési feladatai), Mat. tanítása, 1958, № 5, 129—130 (венг.)

7642. Пример и противоречащий пример в математике. Несс (Beispiel und Gegenbeispiel in der Mathematik. Ness W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 171 (нем.)

Теоремы, получаемые с помощью некоторого общего доказательства, первоначально поясняются учащимся на примерах. Ясный пример может заменить доказательство. Противоречащий пример служит для опровержения предположения или для указания на необходимость определенных условий. Он может состоять также в заключении по аналогии, чтобы убедить в необходимости или недостаточности некоторого доказательства.

7643. К методике преподавания элементов математического анализа в средней школе. Цатурян В. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1958, 63, 119—183

Сокращенное изложение диссертации автора, посвященной анализу содержания элементов математического анализа в средней школе, и разработка соответствующих вопросов методики. В. Н. Молодший

7644. Вторая конференция по вопросам преподавания математики в начальных классах средней школы (31 октября—6 ноября, 1958 г., Флоренция). Джанелли (Secondo convegno di studio sulla didattica della matematica nelle scuole secondarie del primo ciclo. (Firenze 31 ott. — 6 nov. 1958). Giannelli Biagio), Archimede, 1958, **10**, № 6, 268—272 (итал.)

7645. Вопросы преподавания элементарной математики на последнем международном конгрессе математиков. Депман И. Я., Матем. в школе, 1958, № 3, 77—80

7646. Подготовка учителей арифметики. Раппапорт (Preparation of teachers of arithmetic. Rappaport David) ,School Sci. and Math., 1958, 58, № 8 636—643 (англ.)

Освещены вопросы: как в настоящее время подготовлен учитель начальной школы к обучению арифметике; каковы экзаменационные требования по математике к кандидатам на звание учителя арифметики; объем знаний учителя начальной школы; отношение учителей начальной школы к преподаванию арифметики. Статья составлена по материалам, опубликованным в американской печати в 1935—1957 гг.

Даны 2 варианта программы курса математики для учительских колледжей. Библ. 13 назв. Ю. М. Гайдук

7647. О математической подготовке выпускников средней школы. Агаев, Ибрагимов, Креймер, Садыхов (Орта мәктәб мәʼзунларыныҳ ријази һазырлығы һаггында. Агаев Б., Ибраһимов Э., Креймер А. Я., Садыгов С.), Азәрб. мәктәби, 1958, № 3, 40—52 (азерб.)

Анализируются результаты вступительных экзаменов по математике на физико-математический факультет Азербайджанского государственного педагогического института им. В. И. Ленина в 1957/58 уч. году. Задачи и примеры по алгебре и тригонометрии требовали не только навыков тождественных преобразований, но предполагали также умение проводить элементарные исследования выражений.

Наиболее распространенными недочетами в знаниях абитуриентов авторы считают: неумение исследовать полученные корни уравнений как алгебраических, так и тригонометрических; потеря корней уравнений; неумение объединить в возможных случаях корни тригонометрических уравнений или исключить повторяющиеся корни; неумение решать неравенства, содержащие абсолютные величины, и грамотно строить чертежи, соответствующие условию геометрической задачи. Многие учащиеся испытывают затруднения в задачах с усеченными пирамидами и со скрещивающимися прямыми. Некоторые абитуриенты строят графики функций только по точкам, что, в случае выбора недостаточного числа точек, приводит к неправильному изображению графиков функций и др. Указываются причины появления подобных недостатков, даются методические рекомендации. А. И. Гусейнов

7648. К вопросу о математических моделях. Ример (Contribuţie la problema modelelor matematice. Rimer D.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 341—353 (рум.)

Описываются модели, полезные для преподавания математики в школе в качестве наглядных пособий к следующим темам: 1) площади параллелограмма, треугольника, трапеции, правильного многоугольника, 2) основная теорема подобия, 3) теорема Пифагора, 4) деление отрезка в заданном отношении, 5) приближенное значение числа π, 6) окружность как предел многоугольника, 7) куб двучлена, 8) стереометрия (исключая раздел «круглые тела»), 9) тела вращения (в курсе элементарной геометрии и аналитической геометрии), 10) углы Эйлера.

Отмечается, что модели для 1—6 тем построены ясским учителем Атанасием Иларионом, для 7-й темы — автором, для 8-й темы — автором совместно с сотрудником Ясского университета Г. Ходжиаком, для 9—10 тем — автором совместно с сотрудниками Ясского университета Р. Шварцем и Г. В. Кокуз

В. М. Остиану

7649. Типичные методические ошибки, допускаемые студентами физико-математического факультета во время педагогической практики по математике. Карнацевич Л. С., В сб.: Вопр. преподавания матем. в средн. школе. М., Учпедгиз, 1958 243—257

7650. Историзм при преподавании математики как одно из средств идейно-политического воспитания. Болгарский Б. В., В сб.: Вопр. преподавания матем. в средн. школе. М., Учпедгиз, 1958, 52—63

7651. О тригонометрических тождествах. Рабаи (A trigonometrikus azonosságokrol. Rábai Imre), Mat. tanítása, 1958, № 5, 144—146 (венг.)

7652 К. Сборник задач по высшей математике. [Для втузов]. Т. 1. Изд. 13-е, переработ. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 282 стр., илл., 6 р. 80 к.

7653 К. Сборник задач по математике, предложенных на письменных вступительных экзаменах в институты. Сактер (Culegere de probleme de matematici. Propuse la examenele scrise pentru admiterea in inst. şi facultăţi. Sacter O. Bucureşti, Ed. tehnică, 1957, 301 p., il.) (рум.)

7654 К. Справочник по элементарной математике. Таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики. Изд. 11-е, стереотипн. Выгодский М. Я. М., Физматгиз, 1958, 412 стр., илл., 8 р. 5 к.

7655 К. Краткий курс высшей математики. Часть 1. Дифференциальное исчисление. Деммиг (Repetitorium. Höhere Mathematik. Teil 1. Differentialrechnung. 13. Aufl. Demmig Richard. Darmstadt—Eberstadt, Demmig, 1958. 145, XXVII S., ill., 9.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 50, 3687 (нем.)

7656 К. Общая методика преподавания математики. Пособие для пед. ин-тов. Репьев В. В. М., Учпедгиз, 1958, 223 стр., илл., 4 р. 80 к.

7657 К. Методические указания по специальному курсу элементарной алгебры. Новоселов С. И. М., Учпедгиз, 1958, 78 стр., илл., 1 р. 10 к.

7658 Д. Практические занятия по курсу «Методика преподавания математики» в педагогическом институте. Благовещенский Н. И. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1958

См. также: 7673, 7693, 7698, 7699, 7709—7712, 7720 Д, 8032 К, 8033 К, 8134 К—8143 К, 8295, 8357, 8358, 8388, 8392 К, 8397 К, 8413—8415 К, 8462 К, 8481 К, 8628

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

7659. Новый метод доказательства теорем неполноты для систем с правилом Карнапа и его приложение к вопросу взаимоотношения классического и конструктивного анализов. Фалевич Б. Я., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1210—1213

В § 1 работы проводится доказательство гёделевских теорем неполноты для систем, содержащих ограниченное правило Карнапа весьма высоких трансфинитных рангов, чем усиливается результат Россера (J. Symbolic Logic, 1937, **2**, № 3, 129), давшего соответствующее доказательство для трансфинитных чисел $< \omega^2$. Из S_0 — исчисления предикатов второй ступени (над арифметикой) с аксиомой свертывания — трансфинитной индукцией по рангу правила Карнапа определяются системы S_ν трансфинитных рангов ν (если ν 2-го рода, то $S_\nu = \sum_{\beta<\nu} S_\beta$). Пусть $x \prec y$ — предикат S_ν, вполне упорядочивающий натуральный ряд по типу ν, где ν — совершенное трансфинитное число, и существует такое τ, $\tau < \nu$, что в S_τ:

1) доказуемо, что $x \prec y$ вполне упорядочивает натуральный ряд, 2) $x \prec y$ разрешим; 3) доказуемо, что ν совершенно (трансфинитное число ν называется совершенным, если для любого $\sigma < \nu$ множество трансфинитных чисел β, $\sigma \leqslant \beta < \nu$, и множество трансфинитных чисел, меньших ν, рассматриваемые как вполне упорядоченные множества, подобны). Тогда, если S_α, $\delta \leqslant \alpha \leqslant \nu$, непротиворечива ($\delta$ — ближайшее к τ большее его совершенное число), то в ней существует формула такая, что ни она ни ее отрицание не выводимы, и формула, выражающая непротиворечивость S_α, может быть в ней построена, но не выводима в S_α. Доказательство этой теоремы опирается на построенные автором предикаты доказуемости систем S_α и S_ν и проводится по схемам, данным Гильбертом и Бернайсом (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, Berlin, **1**, 1934; **2**, 1939). Наиболее простым и важным является случай, когда $x \prec y$ — примитивно-рекурсивный предикат и $\tau = 0$. Тогда, исходя только из предположения, что в S_0 выводимо, что предикат $x \prec y$ вполне упорядочивает натуральный ряд (1), теорема доказывается для всех систем S_α, $6 \leqslant \alpha \leqslant \nu$.

В § 2 рассматривается возможность построения конструктивной модели классического анализа. В качестве формализации классического анализа выбрана S_0 (по этому поводу следует заметить, что для построения достаточно сильного анализа, по-видимому, к S_0 следует присоединить ε-аксиомы Гильберта и Бернайса: см. добавление IV ко второму тому упоминавшейся выше монографии.— *Реф.*). В качестве примера конструктивного анализа взята система Аккермана (Ackermann W. Math. Z., 1952, 55, № 3, 304). Сформулировано понятие правильной модели и доказана теорема: В конструктивном анализе Аккермана не может быть построена правильная модель системы S_0. Доказательство этой теоремы основывается на выводе в S_0 формулы, выражающей

непротиворечивость системы Аккермана, и на второй теореме Гёделя. Ю. А. Гастев

7660. Принцип порочного круга и парадоксы. Хинтикка (Vicious circle principle and the paradoxes. Hintikka K. Jaakko J.), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 3, 245—249 (англ.)

Продолжение исследования различных вариантов „принципа абстракции" (схемы аксиом свертывания), основанных на „эксклюзивной" интерпретации переменных (РЖМат, 1958, 2674), для формализма теории множеств или расширенного исчисления предикатов без теории типов.

Первый вариант формулируется в виде

$$(\exists x)(y)(y \neq x \supset (y \in x \equiv \mathrm{K}^+)), \qquad (1)$$

где K — формула (правильно образованная в смысле цит работы), содержащая свободные вхождения y и не содержащая вхождений x, а K^+ получается из K заменой каждой части вида $(\exists z)\mathrm{L}$ на $(\exists z)(z \neq x \,\&\, \mathrm{L})$ и каждой части вида $(z)\mathrm{L}$ на $(z)(z \neq x \supset \mathrm{L})$.

Тогда как в предыдущей работе (см. приведенную ссылку) автор отмечал, что из (1) не удается вывести ранее известных антиномий, в реферируемой статье доказано, что (1) приводит все же к противоречию. Построение последнего основывается на определении по (1) четырех постоянных (индивидов, в терминологии автора) a, b, c, ιc

$$(y)(y \neq a \supset (y \in a \equiv (\exists z)(z \neq a \,\&\, z \neq y \,\&\, z \in y \,\&\, y \in z))), \quad (a)$$

$$(y)(y \neq b \supset (y \in b \equiv \sim (\exists z)(z \neq b \,\&\, z \neq y \,\&\, z \in y \,\&\, y \in z))), \quad (b)$$

$$(y)(y \neq c \supset (y \in c \equiv (y = a \vee y = b))), \qquad (c)$$

$$(y)(y \neq \iota c \supset (y \in \iota c \equiv y = c)) \qquad (\iota c)$$

и на применении, в качестве аксиомы, формулы

$$(\exists x), (\exists y)(x \neq y)$$

без привлечения других аксиом теории множеств. Построение антиномии состоит из вывода трех лемм (в том порядке, как они приведены ниже, причем (ιc) применяется лишь при выводе последней)

$$a \neq b,\ c \neq a,\ b \neq c,$$

и из доказательства, с их помощью, обеих, составляющих антиномию, формул

$$c \in a \equiv c \in b,\ \sim (c \in a) \equiv c \in b.$$

Кратко обсуждается второй вариант „принципа абстракции", имеющий вид:

$$(\exists x)(y)(y \neq x \,\&\, y \neq z_1 \,\&\, \ldots \,\&\, y \neq z_k \supset (y \in x \equiv \mathrm{K}^+)), \qquad (2)$$

где K^+ удовлетворяет тем же условиям, что и в (1), а $z_1, \ldots, z_k$ — свободные переменные в (2). Вопрос о непротиворечивости системы аксиом теории множеств с (2) в качестве схемы аксиом свертывания остается открытым. Отмечены некоторые затруднения, связанные с интерпретацией такой системы аксиом. Д. А. Бочвар

7661. К Теории определимых множеств и функций. Мостовский (Contributions to the theory of definable sets and functions. Mostowski A.), Fundam. math., 1955, 42, № 2, 271—275 (англ.)

В статье собраны некоторые результаты автора, касающиеся множеств и функций, определимых в арифметике. Используются терминология и обозначения другой статьи автора (Fundam. math., 1947, 34, 81—112; в частности, относительно определения множеств $P_n^{(k)}$ и $Q_n^{(k)}$, см. стр. 86). Через R_k обозначается множество кортежей $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = m$, где x_j — целые неотрицательные числа, и через $P_n^{(kl)}$ (или $Q_n^{(kl)}$) множество функций, переводящих точки из R_k в точки из R_l, графики которых попадают в $P_n^{(k+l)}$ (или в $Q_n^{(k+l)}$). В реферируемой статье доказывается ряд свойств классов $P_n^{(k1)}$ и $Q_n^{(k1)}$.

Теорема 1. $P_n^{(k1)} \subset Q_n^{(k1)}$.

Теорема 2. Если $n \geqslant 1$, то $P_{n+1}^{(k1)} - Q_n^{(k1)} \neq 0 \neq Q_n^{(k1)} - P_n^{(k1)}$.

Теорема 3. Если $f \in Q_1^{(k1)}$, то множество $E_{(\mathfrak{m}, m)}[m < f(\mathfrak{m})]$ рекурсивно-перечислимо.

Теорема 4. Если функция $f \in Q_1^{(k1)}$ мажорируется некоторой рекурсивной функцией, то f рекурсивна.

Пусть множество $X \subset R_{k+1}$ таково, что $(\mathfrak{m})(\exists m)[(\mathfrak{m}, n) \in X]$. Функция f называется селектором (selector) X, если $(\mathfrak{m})[(\mathfrak{m}, f(\mathfrak{m})) \in X]$.

Теорема 5. Рекурсивно-перечислимые множества обладают рекурсивными селекторами.

Теорема 6. Если $g \in Q_1^{(k1)}$ и g не рекурсивно, то множество $E_{(\mathfrak{m}, m)}[m > g(\mathfrak{m})]$ принадлежит $Q_1^{(k+1)}$ и не имеет селектора.

Клини (Kleene S. C., Indagationes math., 1950, 12, 244—246) построил два непересекающихся рекурсивно-перечислимых множества X, Y, не отделимых рекурсивными множествами. Аналогичное утверждение для X, Y из $P_n^{(k)}$ получается повторением рассуждений Клини (теорема 7). Теорема 8 утверждает, что соответствующее утверждение для Q_n^k не верно. С. И. Адян

7662. Заметка о функциональных кванторах. Аддисон, Клини (A note of function quantification. Addison J. W., Kleene S. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 1002—1006 (англ.)

В статье Клини (РЖМат, 1956, 4279; оригинал стр. 211) был поставлен вопрос: будет ли всякий предикат, представимый в обеих стандартных $(k+1)$-кванторных формах аналитической классификации, гиперарифметическим относительно предикатов, представимых в k-кванторной форме $(k > 0)$. В реферируемой статье на этот вопрос дается отрицательный ответ, который используется далее для сравнения иерархий $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$ и $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots$ (см. в цитированной статье п. XXIX). С. И. Адян

7663. Класс рекурсивных функций. Шёнфилд (The class of recursive functions. Shoenfield J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 5, 690—692 (англ.)

Используются понятия и обозначения работы Клини (РЖМат, 1956, 4279). Доказывается, что предикат „α рекурсивна" (α — функциональная переменная) представим в форме $(Ex)(y)(Ez)\,R(\alpha, x, y, z)$, где R — рекурсивный предикат, но не может быть представлен в форме $(x)(Ey)(z)\,R(\alpha, x, y, z)$ с рекурсивным R. С. И. Адян

7664. Степени вычислимости. Шапиро (Degrees of computability. Shapiro Norman), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 281—299 (англ.)

Вводится и изучается понятие частичного предиката, к которому автор приходит, рассматривая проблему разрешения свойства (подмножества S) объектов некоторого множества N. После гёделевской нумерации появляется частичный предикат P_S на натуральном ряду, который не определен, если данное натуральное число не является номером объекта из N.

В части I статьи исследуется вопрос о положении P_S в иерархии Клини в частности вопрос квантификации

P_S. Предикат P называется расширением предиката Q, $Q \subset P$, если область определения P включает область определения Q и на последней оба предиката совпадают. $\sim P$ — предикат с той же, что у P, областью определения, являющийся отрицанием P на этой области. Квантор существования E, или (Ex),—отображение множества предикатов в себя такое, что 1) образ n-местного предиката — n — 1-местный предикат; 2) $P \subset P' \to EP \subset EP'$; 3) если P — общий предикат, то EP — общий предикат и (Ex) имеет обычный смысл. При $n = 0$ $EP \equiv P$.

Теорема. Если E и E' — кванторы существования, P — предикат, то EP и $E'P$ имеют общее пересечение (расширение).

Определение. $E \subset E'$, если для всех P $EP \subset E'P$.

Теорема. Множество $\{E\}$ образует полную дистрибутивную структуру относительно порядка $\subset$. Существует, следовательно, наибольший элемент E_0.

Строчкой называется произведение нескольких ($\geqslant 1$) операций $\sim$ и E. Порядок строчки — число E в ней. Строчка U называется квантором общности, если $\sim U \sim$ есть некоторый квантор E. Строчка Клини — строчка, представимая в виде произведения чередующихся кванторов общности и существования. Две строчки подобны, если они совпадают в классе общих предикатов. Предикат P называется k-перечислимым, если он представим в виде HR, где R — рекурсивный предикат (общий), а H — строчка Клини порядка k, начинающаяся с квантора существования. Предикат $\sim P$ называется анти-k-перечислимым. Предикат P называется потенциально (анти-) k-перечислимым, если у него есть (анти-) k-перечислимое расширение.

Доказывается что $P_1 \subset P_2 \to HP_1 \subset HP_2$, где H — строчка. Если P_1 и P_2 подобны, то H_1P и H_2P совпадают на общей части своих областей определения.

Если P имеет расширение вида HR, где H — строчка, а R — потенциально частично рекурсивный предикат, то P имеет расширение формы HR', где предикат R' рекурсивен.

Определение. n-местный предикат P сильно сводится к m-местному предикату Q, если существуют общерекурсивные функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ такие, что

$$P \subset (\lambda x_1, \ldots, x_n)\, Q\,[f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)]$$

Предикат P, сильно сводящийся к потенциально (анти-) k-перечислимому предикату Q, также является потенциально (анти-) k-перечислимым. Предикат P называется полным в классе предикатов K, если $P \in K$ и всякий предикат из K сильно сводится к P.

Для частичных предикатов имеют место теоремы, аналогичные известным теоремам для общих предикатов из классификации Клини (Клини С. К., Введение в математику, 1957, гл. XI, §§ 57, 58):

1. Для всякого $k > 0$ существует предикат, полный в классе (потенциально) k-перечислимых предикатов, который не является (потенциально) анти-k-перечислимым.

2. Каждый потенциально (анти-) k-перечислимый предикат сильно сводится к данному предикату P, если каждый 1-местный (анти-) k-перечислимый предикат сильно сводится к P.

3. Предикат Q потенциально частично рекурсивен в конечном числе k-перечислимых и анти-k-перечислимых предикатов тогда и только тогда, когда он одновременно потенциально $k+1$-перечислим и анти-$k+1$-перечислим (аналог теоремы Поста).

В части II частичные предикаты применяются для исследования проблем разрешения конструктивных действительных чисел. Конструктивные действительные числа из [0,1) представляются рекурсивными последовательностями нулей и единиц, содержащими бесконечное число нулей.

В частности, доказываются утверждения:

1) Если R — множество всех рациональных (алгебраических) чисел, то P_R — полный предикат в классе потенциально 2-перечислимых.

2) (Следствие) Проблема разрешения для множества рациональных (алгебраических) чисел рекурсивно неразрешима.

В части III доказываются аналогичные теоремы для частично- и общерекурсивных функций. А. А. Мучник

7665. Сравнение изолей по конечному модулю. Деккер (Congruences in isols with a finite modulus. Dekker J. C. E.), Math. Z., 1958, **70**, № 2, 113—124 (англ.)

Рассматриваются неотрицательные целые числа (числа), множества чисел и классы множеств. Множество называется изолированным (isolated), если оно либо конечно, либо имунно (т. е. бесконечно, но не содержит рекурсивно-перечислимого подмножества). Множество α рекурсивно эквивалентно множеству β (записывается $\alpha \simeq \beta$), если существует частично рекурсивная функция, отображающая взаимно однозначно α в β. Класс всех множеств, которые рекурсивно эквивалентны α, называется типом рекурсивной эквивалентности (кратко т. р. э.), соответствующим α, и обозначается $\mathrm{Req}\,\alpha$. Т. р. э., который может быть представлен изолированным множеством, называется изолем. Множество всех изолей обозначается Λ. Оно имеет мощность континуума. Изоль называется конечным (бесконечным), если он содержит конечные (имунные) множества. Операции сложения и умножения: $\mathrm{Req}\,\alpha + \mathrm{Req}\,\beta = \mathrm{Req}\,(\alpha + \beta)$, где α и β отделимы рекурсивно-перечислимыми множествами, $\mathrm{Req}\,\alpha \cdot \mathrm{Req}\,\beta = \mathrm{Req}\,j(\alpha \times \beta)$, где $\alpha \times \beta$ есть декартово произведение α и β, а $j(x, y)$ есть примитивно-рекурсивная функция, отображающая взаимно однозначно $\varepsilon \times \varepsilon$ на ε (где ε — множество всех чисел), определяются для любых двух т. р. э. Λ замкнуто относительно этих операций, а для конечных изолей они совпадают с обычным сложением и умножением чисел. Таким образом, арифметика $[\varepsilon, +, \cdot]$ расширена до системы $[\Lambda, +, \cdot]$ мощности континуума. Λ частично упорядочивается отношением $A \leqslant B$, которое означает, что $A + X = B$ при некотором X. На изоли естественным образом распространяются отношения делимости и сравнимости по конечному модулю. Изоль называется неразложимым в том и только в том случае, если он не представим в виде суммы двух бесконечных изолей. Доказываются следующие теоремы:

T1. Существует множество Δ, состоящее из континуума бесконечных изолей, которые неразложимы и попарно несравнимы.

T2. Пусть X — бесконечный неразложимый изоль, k — любое число и $m \geqslant 2$. Тогда $X \not\equiv k \pmod m$.

T3. Для любого простого p

(а) $(\forall X)\,[X^p \equiv X \pmod p]$ истинно, а

(б) $(\forall X)\,[X \not\equiv 0 \pmod p \to X^{p-1} \equiv 1 \pmod p]$ ложно.

Утверждение T3 (а) доказывается также для Λ^*, полученного аналогично Λ на основе множества всех целых чисел. T3 показывает, что две известные формулировки слабой проблемы Ферма в Λ не эквивалентны.

С. И. Адян

7666. Функция-факториал для изолей. Деккер (The factorial function for isols. Dekker J. C. E.), Math. Z., 1958, **70**, № 3, 250—262 (англ.)

Используются основные понятия и обозначения другой статьи автора (реф. 766[5]). В реферируемой статье определяется операция $X!$ для т. р. э. и устанавливается, что Λ замкнуто относительно этой операции. Доказываются теоремы:

T1. $(A + 1)! = (A + 1) \cdot A!$

T2. $A! \cdot B! \mid (A + B)!$

(символ | введен в цитированной статье и означает делимость).

На основе T1 и T2 устанавливается ряд свойств функции $X!$ (например: $Y \leqslant X \to Y! \cdot (X-Y)! \mid X!$). Далее определяется операция A^B, относительно которой Λ также замкнуто, и доказывается

$$T3.\ X > 3 \to 2^X < X! < X^X .$$

В заключение автор определяет классы Λ_0 и Λ_1 посредством равенств

$$\Lambda_0 = \{\mathrm{Reg}\,\alpha\} \text{ (где } \alpha' \in S_0 \,\&\, \alpha \in Q),$$
$$\Lambda_1 = \{\mathrm{Reg}\,\alpha\} \text{ (где } \alpha' \in S_1 \,\&\, \alpha \in Q),$$

причем α' есть дополнение множества α, Q — класс всех конечных множеств, S_0 — класс всех гиперпростых множеств и S_1 — класс всех простых множеств. Классы Λ_0 и Λ_1 замкнуты относительно операций сложения, умножения, возведения в степень и факториала. Система $[\Lambda_1, +, \cdot]$ является расширением системы $[\Lambda_0, +, \cdot]$, которая в свою очередь есть расширение системы $[\varepsilon, +, \cdot]$.

С. И. Адян

7667. Типы рекурсивной эквивалентности и комбинаторные функции. Майхилл (Recursive equivalence types and combinatorial functions. Myhill J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 6, 373—376 (англ.)

Терминология та же, что и в работах Деккера (реф. 7665, 7666). В статье определяется понятие рекурсивно комбинаторной (р. к.) функции от т. р. э. (в частности, р. к. функциями являются функции A^k, k^A, $A!$, A^{A_1}) и анонсируются некоторые результаты о свойствах р. к. функций. Например:

T1. Если F есть р. к. функция то $A \leqslant B \to F(A) \leqslant F(B)$.

T2. Пусть F есть р. к. функция. Тогда, если A есть изоль, то $F(A)$ также есть изоль, обратное также верно, если F не константа.

T3. Пусть F и G — р. к. функции. Тогда

а) Если $F(n) = G(n)$ для бесконечного множества конечных n, то $F(A) = G(A)$ по крайней мере для одного бесконечного изоля A.

б) Если $F(n) = G(n)$ для всех, за исключением конечного числа конечных n, то $F(A) = G(A)$ для всех бесконечных т. р. э. A.

в) Аналогично а) для $F \neq G$, г) аналогично б) для $F \neq G$ и только для бесконечных изолей A.

Утверждения T2 и T3 распространяются также на функции F и G от k аргументов.

С. И. Адян

7668. Бинарная рекурсивная арифметика. Черч (Binary recursive arithmetic. Church Alonzo), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 5, 39—55 (англ.)

Работа содержит формулировку бинарной (содержащей только функции одного и двух переменных) рекурсивной арифметики. Основные понятия: переменные высказывания; логические операторы $\supset$, $\sim$; предикат равенства $=$; нуль 0, численные переменные; функторы (арифметические функции) $s(x) = x + 1$, $o(x) = 0$. $u(x) = x$, $v(x, y) = y$; переменные функции одного и двух аргументов. Даются определения функтора, термa, формулы (логической). Например, если g — двухместный функтор, а h_1 и h_2 — одноместные функторы, то Cgh_1h_2 — одноместный функтор (определяемый как $g(h_1(x), h_2(x))$); если g — одноместный, а h_1 и h_2 — двухместные функторы, то Rgh_1h_2 — двухместный функтор (определяемый равенствами $Rgh_1h_2(x, 0) = g(x)$, $Rgh_1h_2(x, s(y)) = h_1(h_2(x, y), Rgh_1h_2(x, y))$). Формулируются правила вывода — modus ponens, правило подстановки и следующее правило математической индукции: если выводимы $P \supset S^a_{s(a)} P \mid$ и $S^a_0 P \mid$, то выводимо $P \mid$, где a — численная переменная, P — логическая формула и $S^x_y P \mid$ означает результат подстановки y вместо x в формуле P. Список аксиом содержит логические аксиомы

1a. $p \supset \cdot q \supset p$, 1b. $(s \supset (p \supset q)) \supset \cdot (s \supset p) \supset \cdot s \supset q$,

1c. $(\sim p \supset \sim q) \supset \cdot q \supset p$, аксиомы равенства $2 \cdot x = y \supset \cdot x = z \supset y = z$ и 3a. $x = y \supset g(x, z) = g(y, z)$, а также приведенные выше определения для функциональных операторов C и R, для функций u, v, o и формулу $\sim s(0) = 0$.

Формулируются несколько метатеорем, в том числе теорема о дедукции. Выводятся дальнейшие свойства равенства (симметричность, транзитивность) и вводятся другие функциональные операторы, например $CRfvugs(x) = f(g(x))$. Строятся другие арифметические функции, например ω, m_1, m_2 для нумерации пар чисел, и доказываются равенства $m_1(\omega(x, y)) = x$, $m_2(\omega(x, y)) = y$. Таким образом из четырех исходных функций s, o, u, v при помощи суперпозиции вида C и рекурсии вида R удается построить все употребительные примитивно-рекурсивные функции одного и двух аргументов. Но не удалось доказать 3b. $y = z \supset g(x, y) = g(x, z)$. Указывается, что если 3b не выводимо, то вся система аксиом ω-неполна, поскольку 3b с фиксированным значением x всегда выводимо.

В. К. Детловс

7669. Некоторые результаты в ограниченной рекурсивной арифметике Чёрча. Фридман (Some results in Church's restricted recursive arithmetic. Friedman Joyce), J. Symbolic Logic, 1957, **22**, № 4, 337—342 (англ.)

Рассматривается исчисление для анализа релейных схем, включающих обратную связь и запаздывание во времени. Формулами исчисления являются формулы узкого исчисления одноместных предикатов без кванторов, содержащие лишь переменную t, значения которой интерпретируются как моменты времени $0, 1, 2, \ldots$. Имеются константы для обозначения истинности и ложности. Предикатные буквы относятся к отдельным компонентам схемы (линии, реле и т. д.); на месте их аргумента могут стоять цифры $0, 1, 2, \ldots$ или выражения $t, t+1, t+2, \ldots$

Автор указывает алгоритм для ответа на следующий вопрос. Дана формула, не содержащая предикатных букв, кроме $x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n$, и дана рекурсивная схема вида

$$a_i(0) \equiv I_i[x_1(0), x_2(0), \ldots, x_m(0)],$$
$$a_i(t+1) \equiv A_i[a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$$
$$\ldots, x_m(t), x_1(t+1), x_2(t+1), \ldots, x_m(t+1) \mid (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(в правых частях стоят формулы, построенные из указанных выражений). Определить, будет ли эта формула истинной (в содержательной интерпретации) при любом значении t и любых предикатах $x_1(t), \ldots, x_m(t)$.

Далее автор доказывает, что класс тождественно истинных в упомянутом смысле формул совпадает с классом выводимых формул, при надлежащей формализации вывода. Оказывается, что этим свойством обладает формализация (в основных чертах состоящая в использовании исчисления высказываний и правила математической индукции), которая была предложена Чёрчем.

Ю. Т. Медведев

7670. Ограниченные теоретико-множественные определения в арифметике. Робинсон (Restricted set-theoretical definitions in arithmetic. Robinson Raphael M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 238—242 (англ.)

Известное рекурсивное определение сложения натуральных чисел через функцию „следующий за“ ($x' = x+1$) может быть представлено в явной теоретико-множественной форме. Известно также, что без использования понятий теории множеств такое определение операции

натуральных чисел невозможно. А. Тарский предложил (в лекциях) использовать промежуточный тип определений, в которых разрешается использовать только множества натуральных чисел. Такого рода определения автор называет ограниченными теоретико-множественными определениями. Тарским были поставлены следующие две проблемы:

1. Можно ли дать ограниченное теоретико-множественное определение сложения натуральных чисел в терминах „следующего за"?

2. Разрешима ли арифметика, основанная на понятии „следующий за" и использующая ограниченную теорию множеств?

Автор отмечает, что из положительного решения первой проблемы следовало бы отрицательное решение второй. В статье доказывается теорема 1 о том, что можно дать ограниченное теоретико-множественное определение сложения в некоторой модели арифметики натуральных чисел в терминах операции „следующий за" на натуральных числах, и теорема 2 о том, что можно дать ограниченное теоретико-множественное определение сложения натуральных чисел в терминах операций „следующий за" и „удвоения", т. е. операция $x + y$ определима в терминах $x' = x + 1$ и $2x = x + x$.

Из теоремы 2 следует, что арифметика натуральных чисел, основанная на операциях „следующий за" и „удвоения" и использующая ограниченную теорию множеств, неразрешима. Автор отмечает, что теорема 2 будет не верна, если отказаться от использования ограниченной теории множеств, либо от использования операции "следующий за". Если бы можно было в теореме 2 и в следствии обойтись без использования операции „удвоения", то получилось бы решение обеих проблем А. Тарского в их первоначальной форме. С. И. Адян

7671. 4-кванторная полнота; неравномерно частично рекурсивный оператор Банаха—Мазура. Фридберг (4-quantifier completeness: a Banach—Mazur functional not uniformly partial recursive. Friedberg Richard M.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 1, 1—5 (англ., рез. русск.)

Пусть Θ_u — универсальная частично рекурсивная функция, аргументами которой являются конечные последовательности $\langle q_0, q_1, \ldots, q_n \rangle$, а значениями — натуральные числа, и пусть $\Theta^*_u(f) = \lim_{n\to\infty} \Theta_u(\langle f(0), f(1), \ldots, f(n) \rangle)$ для u таких, что Θ_u определено для всех конечных последовательностей и существует правая часть. Пусть $A(u)$ является следующим предикатом: $\Theta^*_u(f)$ определено для всех рекурсивных f и для этих f совпадает со значениями некоторого равномерно частично рекурсивного оператора. Доказывается, что предикат $A(u)$ является полным (в смысле Поста) для класса предикатов вида $(Ex)(y)(Ez)(w)\,R(u, x, y, z, w)$, где R рекурсивно. Как следствие, получается теорема о том, что существует оператор Банаха—Мазура, который не совпадает ни с каким оператором, образованным из равномерно частично рекурсивного оператора путем ограничения аргументов к рекурсивным функциям.

Резюме автора

7672. Конструктивные эквиваленты для предложений классического анализа. Розенблум (Konstruktive Äquivalente für Sätze aus der klassische Analysis. Rosenbloom P. C. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954, Vol. 2. Neuchâtel, Ed. Griffon, 1955, 135—137) (нем.)

Автор предлагает называть метрическое пространство R конструктивно компактным, если существуют рекурсивная функция $N(n)$ и конструктивный способ выбора из каждого множества в R, состоящего из $N(n)$ точек, двух точек, расстояние между которыми меньше $1/n$. Он указывает, что при таком определении компактности конструктивно доказуемы теорема Витали из теории функций и теорема Релиха. Доказательства будут опубликованы позднее совместно с П. Эрдёшем. A. Heyting

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 934

7673. Интуиционистская интерпретация анализа. Тенсма (The intuitionistic interpretation of analysis. Teensma E. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954, Vol. 2. Neuchâtel, Ed. Griffon, 1955, 144—150) (англ.)

Придерживаясь интуиционистской точки зрения, автор вводит понятие „неисчислимого (non incalculable) символа функции". Это символ f, связанный с определением D, так что из D следует, что ни при каком натуральном числе n $f(n)$ не может быть натуральным числом. Автор пользуется неисчислимыми символами функций в формулах так, как если бы это были обычные символы функций; по мнению референта, это недостаточно оправдано. Автор утверждает, что значительная часть анализа остается в силе с интуиционистской точки зрения, если рассматривать действительные числа как неисчислимые символы функций и если поставить их двойные отрицания на их места. Намечено доказательство существования в этом смысле верхней грани ограниченного класса действительных чисел. A. Heyting

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 934

7674. Рекурсивно определимые и рекурсивные функционалы. Крейзель, Лакомб, Шёнфилд (Fonctionnelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives. Kreisel Georg, Lacombe Daniel, Shoenfield Joseph R.), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 4, 399—402 (франц.)

Рекурсивно определимым функционалом называется такое отображение $\Phi = \Phi(f)$ множества всех общерекурсивных функций f во множество натуральных чисел, для которого существует частично рекурсивная функция φ, переводящая гёделев номер всякой общерекурсивной функции f в $\Phi(f)$. Под рекурсивным функционалом авторы понимают частично рекурсивный оператор в смысле Клини, значениями которого служат натуральные числа (т. е. „нульместные функции"). Доказывается, что каков бы ни был рекурсивно определимый функционал Φ, существует рекурсивный функционал Ψ, являющийся продолжением Φ. Ю. Т. Медведев

7675. Рекурсивно открытые и рекурсивно замкнутые множества и их применение в рекурсивном анализе. Лакомб (Les ensembles récursivement ouverts ou fermés, et leurs applications à l'analyse récursive. Lacombe Daniel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 1, 28—31 (франц.)

Даются определения рекурсивно открытого и рекурсивно замкнутого множеств (действительных чисел). Автор перечисляет их свойства (вытекающие непосредственно из этих определений) и устанавливает некоторые результаты о связи понятий рекурсивно замкнутого множества и множества точек абсолютного максимума действительной рекурсивной функции. Ю. Т. Медведев

7676. О некоторых алгоритмических проблемах теории групп. Новиков (Über einige algorithmische Probleme der Gruppentheorie. Novikow P. S.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, **61**, № 2, 88—92 (нем.)

Резюме доклада автора на ежегодной конференции немецких математиков. Приводятся результаты автора и его учеников, относящиеся к алгоритмическим проблемам теории групп (РЖМат, 1956, 112, 962 и 7169; 1958, 8524; 1959, 79, 2233 и 4361). Отмечаются также один результат А. И. Мальцева о нильпотентных группах (РЖМат, 1957, 79) и результат Нильсена о проблеме вхождения для свободных групп (РЖМат, 1956, 1999). С. И. Адян

7677. Рекурсивная неразрешимость теоретико-групповых проблем. Рабин (Recursive unsolvability of

group theoretic problems. Rabin Michael O.], Ann. Math., 1958, **67**, № 1, 172—194 (англ.)

Автор доказывает следующую теорему (доказанную также С. И. Адяном; РЖМат, 1958, 8524): Если P — инвариантное (т. е. сохраняющееся при изоморфном отображении) свойство групп такое, что 1) существует конечно-определенная (к. о.) группа, обладающая свойством P, и 2) существует к. о. группа, не изоморфная никакой подгруппе никакой к. о. группы, обладающей свойством P, то невозможен алгоритм, определяющий для всякой к. о. группы, обладает она свойством P или нет.

Опираясь на эту теорему, автор устанавливает невозможность алгоритмов для распознавания ряда свойств групп. Для всех этих свойств, за исключением свойства допускать задание одним определяющим соотношением, соответствующие результаты были получены ранее С. И. Адяном (РЖМат, 1956, 962; 1958, 8524). Доказательство автора существенно проще, чем у С. И. Адяна. Кроме того, доказана невозможность существования полной бесконечной вычислимой системы инвариантов изоморфизма, т. е. такой вычислимой функции двух переменных $f(n, m)$, что если n и n' гёделевские номера двух изоморфных к. о. групп (нумерация заранее фиксирована), то $f(n, m) = f(n', m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$, а если n и n' — номера неизоморфных к. о. групп, то для некоторого m $f(n, m) \neq f(n', m)$. А. В. Гладкий

7678. О моделях аксиоматической теории множеств. Мостовский А., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 10, 651—656

Без доказательств (автор обещает опубликовать их особо) формулируется ряд результатов, касающихся моделей аксиоматической теории множеств. Ф. А. Кабаков

7679. Проблема разрешимости. Гудстейн (The decision problem. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 335, 29—38 (англ.)

Популярная лекция, прочитанная в 1955 г. собранию Британской ассоциации развития наук и содержащая обзор теорий, для которых решена семантическая проблема разрешимости (состоящая в требовании дать ответ, разрешима ли семантическая проблема разрешения, заключающаяся в свою очередь в требовании построить алгоритм, распознающий истинность предложений теорий). Рассматриваются четыре таких теории: 1) логика высказываний; 2) логика предикатов; 3) элементарная алгебра в смысле Тарского (РЖМат, 1953, 402; в реф. 402 дан неправильный перевод названия книги Тарского, должно быть „Разрешающий метод для элементарных алгебры и геометрии"); 4) арифметика без рекурсивных функций, но со сложением и умножением. Как известно, теории 1) и 3) разрешимы, а теории 2) и 4) неразрешимы; подчеркивается роль области значений переменных (в теории 3) эта область — действительные числа, тогда как в теории 4) — натуральные числа). В реферируемой статье для теории 1) разрешающая процедура приводится; для теории 3) делается ссылка на результат Тарского (РЖМат, 1953, 402); неразрешимость теории 4) выводится методом Тарского (РЖМат, 1958, 2684) из недоказываемого в реферируемой статье факта, что всякий предикат $y = f(x)$, где f — общерекурсивная функция, является арифметическим по Гёделю, для теории 2) дается набросок вывода ее неразрешимости из неразрешимости теории 4). Для каждой из рассматриваемых теорий приводится система аксиом.

В. А. Успенский

7680. Неразрешимые теоремы. Охаси Кэнхатиро, Сугаку, 1957, **9**, № 2, 96—97 (японск.)

7681. Система аксиом исчисления высказываний. Ван Ши-цзян (Wang Shih-Chiang), J. Chinese Math. Soc., 1953, **2**, 257—274 (кит.; рез. англ.)

Хорошо известная система аксиом Уайтхеда—Рассела (упрощенная Бернайсом) и Гильберта—Аккермана содержит 4 аксиомы: (1) $\sim(p \vee p) \vee p$, (2) $\sim p \vee (p \vee q)$, (3) $\sim(p \vee q) \vee (q \vee p)$, (4) $\sim(p \vee r) \vee (\sim(q \vee p) \vee (qr))$. Гётлинд (Götlind, Nord. mat. tidsskr., 1947, **29**, 1—4) заменил (3) и (4) на (3′) $\sim p \vee p$, (4′) $\sim(p \vee r) \vee (\sim \sim(q \vee p) \vee (r \vee q))$. Автор доказывает, что (3′) излишне и (4′) независимо. Это дает интересную систему, которая обходится без (3) за счет незначительного изменения (4). Автор отмечает также общую возможность элиминировать коммутативные законы и формулирует (states) решение проблемы 64 из „Теории структур" Биркгофа. Известный результат Маркова — зависимость аксиомы B6 системы Гёделя в теории множеств, доказанная Марковым, — по-видимому, представляет собой аналогичную ситуацию.

Hao Wang

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 933

7682. О понятии полноты. Идзуми, Вада (Sur la notion de la perfection. Izumi Yosihisa, Wada Toru), Tôhoky Math. J., 1955, **7**, № 1-2, 132—135 (франц.)

Определяются понятия непротиворечивости, слабой и сильной полноты множеств формул исчисления высказываний относительно последовательностей расширяющихся матриц с единственным выделенным элементом 0. Доказывается ряд элементарных утверждений. Ю. И. Янов

7683. Методы распознавания тождественной истинности и ложности формул исчисления высказываний двузначной логики. Любченко (Методи розпізнавання тотожної істинності та хибності формул числення висловлень двозначної логіки. Любченко Г. Г.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 11, 1153—1156 (укр.; рез. русск., англ.)

Автор приводит 16 наборов логических функций, каждый из которых может быть положен в основу при построении двузначного исчисления высказываний. Затем формулируется 5 комплексов правил, на основе которых могут быть созданы удобные для реализации на вычислительных машинах алгорифмы распознавания тождественной истинности и ложности формул исчисления высказываний. Н. М. Нагорный

7684. Об общих решениях алгебро-логического уравнения со многими неизвестными. Гото, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1956, **20**, № 2, 81—87 (японск.; рез. англ.)

Выражение

$$\bigvee_{n_1 \ldots n_\nu} C_{n_1 \ldots n_\nu} (\sim)^{n_1+1} X_1 \ldots (\sim)^{n_\nu+1} X_\nu \qquad (1)$$

($\sim$ — знак отрицания, $n_1, \ldots, n_\nu$ принимают значения 0,1, сложение производится по модулю 2, $(\sim)^1$ означает $\sim$, $(\sim)^0$ — отсутствие знака отрицания) приводится к виду

$$\bigvee_{m_1 \ldots m_\nu} \left[\left\{ X_1 \rightleftarrows (\sim)^{m_1+1} C^1_{m_1} \right\} \ldots \left\{ X_\nu \rightleftarrows (\sim)^{m_\nu+1} C^\nu_{m_\nu} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \bigvee_{n_1 \ldots n_\nu} C_{n_1 \ldots n_\nu} \left(\underset{m_\lambda \neq n_\lambda}{\&} \sim C^\lambda_{m_\lambda} \right) \right\} \right],$$

где C^λ_0 означает дизъюнкцию коэффициентов всех членов (1), не содержащих X_λ, а C^λ_1 — то же с заменой X_λ на $\sim X_\lambda$.

Примечание референта. Реферат написан на основе английского резюме. А. В. Гладкий

7685. Об инверсионной сложности систем функций. Марков (On the inversion complexity of a system of functions. Markov A. A.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 4, 331—334 (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1959, 1177).

7686. Элементы алгебры Буля. Виль (Eléments de l'algèbre de Boole. Ville J. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1955, **4**, 107—140) (франц.)

7687. Формализация модальных систем. Суэки, Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1955, № 7, 1—16 (японск.; рез. англ.)

Делается попытка формализовать синтаксис и семантику модальных систем, которые автор считает наиболее нормальными системами модальностей, соответствующими нашему обычному пониманию. Из резюме автора

7688. Фундаментальные конечные модальные системы. Мо Шао-куй (Moh Shaw-kwei), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 2, 153—180 (кит.; рез. англ.)

Конечная последовательность неотрицательных целых чисел называется модальной последовательностью, если любая тройка ее следующих друг за другом членов, имеющая вид $a\,0\,b$, отождествляется с $a+b$. Если две модальные последовательности $\alpha=a_1a_2\ldots a_h$ и $\beta=b_1b_2\ldots b_k$ таковы, что можно заменой нескольких членов a_{2i} и b_{2i} меньшими числами получить одну и ту же последовательность, то автор говорит, что α предшествует β ($\alpha\prec\beta$). Очевидно, отношение $\prec$ есть отношение порядка. Если $\alpha\prec\beta$ и $\beta\prec\alpha$, то α и β называются эквивалентными. Имеется бесконечно много неэквивалентных модальных последовательностей.

Если ввести некоторые новые отношения порядка, то может случиться, что в получающейся таким образом системе будет существовать только конечное число модальных последовательностей. Такие системы называются конечными модальными системами. Конечные модальные системы могут обладать свойствами, которые характеризуются неотрицательными целыми числами (параметрами). Если заданы значения параметров, то этим в системе устанавливаются некоторые отношения порядка. Число n называется порядком системы, если в ней имеет место отношение $n=n+1$. Пара (h,k) называется типом последовательности α, если в рассматриваемой системе имеет место отношение $\alpha^h=\alpha^{h+k}$, где α^h означает $\alpha\alpha\alpha\ldots\alpha$ (h раз). Исходя из типов последовательностей системы, автор определяет тип системы, который также является парой чисел. Рассматриваются конечные модальные системы, которые могут быть заданы одними лишь значениями параметров. Такие системы автор называет фундаментальными конечными модальными системами.

Основные результаты статьи:

1. Могут быть построены системы порядков 0 и 1. Они содержат 2 и 14 модальных последовательностей соответственно.

2. Если заданы тип $(h,2k)$ последовательности 1 и типы $(r_i,1)$ последовательностей $21^{2i-1}\left(i=1,\ldots,\left[\frac{h}{2}\right]\right)$, то можно построить систему порядка 2. Число модальных последовательностей в ней может быть вычислено.

3. Можно построить системы типа (1, 2) и системы 3-го порядка типа (2, 2). В этих системах, однако, последовательности, имеющие тип (1, 2) или (2, 2), не могут быть заданы произвольно.

4. С помощью zu-последовательностей, определяемых соотношениями $z\prec u$, $z^3=z^5$ и $zuz=zuz^3=z^3uz$, можно построить бесконечно много фундаментальных конечных модальных систем 3-го порядка.

5. Если можно построить все фундаментальные конечные модальные системы 3-го порядка типа (2, 2), то можно построить все фундаментальные конечные модальные системы.

См. также РЖМат, 1959, 4374. Н. М. Нагорный

7689. Открытые предложения и аксиома индукции. Шёнфилд (Open sentences and the induction axiom. Shoenfield J. R.), J. Symbolic Logic, 1958, 23, № 1, 7—12 (англ.)

Рассматриваются арифметические системы, в которых принцип индукции (у автора: „induction axiom“) применим лишь к открытым (не содержащим связанных переменных) формулам (у автора: „sentences“). Показано (теорема 1), что в арифметике Пеано без умножения (системе T) все следствия, выводимые из такого ослабленного принципа индукции, могут быть также получены из следующих доказуемых при его помощи четырех теорем:

$$\text{B1.}\quad x\neq 0\supset x=SPx;$$

$$\text{B2.}\quad x+y=y+x;$$

$$\text{B3.}\quad (x+y)+z=x+(y+z);$$

$$\text{B4.}\quad x+y=x+z\supset y=z;$$

здесь S — предикатный символ „следующего за“, P — „предшествующего“. Теоремы 2 и 3 показывают, что в условии теоремы 1 нельзя пренебречь ни одной из формул B1—B4. Устанавливается полнота для открытых предложений системы, получающейся присоединением к T бесконечной совокупности открытых формул:

$$C_m.\quad mx=my\supset x=y \qquad (m>0),$$

$$D_{m,n}.\quad S^n(mx)\neq my \qquad (0<n<m),$$

где S^n — сокращение для $SS\ldots S$ (n раз) (для формул, содержащих связанные переменные, такая система не полна — автор строит пример модели с истинной в ней, но недоказуемой в системе формулой). Тот же результат (полнота для открытых предложений) может быть достигнут присоединением к T правила „двойной индукции“:

Из $A(x,0)$, $A(0,y)$ и $A(x,y)\supset A(Sx,Sy)$ следует $A(x,y)$, где $A(x,y)$ — открытая формула.

Ю. А. Гастев

7690. О знаках $\supset$ и $\vdash$ в «Principia Mathematica» Уайтхэда и Рассела. Ли (Note on «$\supset$» and «$\vdash$» in Whitehead and Russell's Principia Mathematica. Lee H. N.), Mind, 1958, 47, № 266, 250—253 (англ.)

В связи с различными аспектами понятия импликации обсуждается вопрос о смысле символов $\supset$ и $\vdash$, употребляемых Расселом и Уайтхэдом в различных контекстах „Principia Mathematica“. Ю. А. Гастев

7691. Заметки о «пустом универсуме». Хокберг (A note on the «empty universe». Hochberg H.), Mind, 1957, 66, № 264, 544—546 (англ.)

Автор критикует рассмотрение „пустых универсумов“ (Так как в русском языке нет слова, равнозначного термину „universe“, означающему область изменения переменной, то мы переводим этот термин словом „универсум“. *Ред.*). Его рассуждения связаны с интерпретацией Куайна (РЖМат, 1959, 3437), согласно которой для переменной x, изменяющейся в пустом универсуме, выражения вида $\forall x\,A(x)$ рассматриваются как истинные, а выражения вида $\exists x\,A(x)$ — как ложные. Соответственно этому, в формальных системах выражения вида $\forall x\,A(x)$, $\neg\exists x\,A(x)$, $A(x)$, где x — переменная, изменяющаяся в пустом универсуме и входящая в формулу $A(x)$ свободно, следует считать теоремами.

Автор рассматривает трудность, вызванную следующим „доказательством“ непустоты пустого универсума: а) $f(x)\supset\exists x f(x)$; б) $\forall x\,f(x)\supset f(x)$; в) $\forall x\,f(x)\supset\exists x\,f(x)$; г) $\forall x f(x)$; д) $\exists x f(x)$. Он замечает, что для того, чтобы избежать этого парадокса, следует отказаться от постулатов исчисления предикатов, относящегося к непустому универсуму, и заключает отсюда, что рассмотрение пустого универсума является неприемлемым. А. С. Есенин-Вольпин

7692. Предостережение к переводу аксиом. Хиж (A warning about translating axioms. Hiż H.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 8. Part 1, 613—614 (англ.)

Возьмем сначала в качестве исходных, неопределяемых логических символов дизъюнкцию (V) и отрица-

ние ($\neg$). Тогда система из аксиом: 1) $\neg(s \vee s) \vee s$, 2) $\neg s \vee (s \vee t)$, 3) $\neg(s \vee t) \vee (t \vee s)$, 4) $\neg(\neg s \vee t) \vee [\neg(u \vee s) \vee (u \vee t)]$ — и одного правила вывода: из s и $\neg s \vee t$ следует t — полна (Гильберт и Аккерман, Основы теоретической логики, М., 1947, стр. 49, 66 и 60). Теперь при помощи равенств $\neg s \vee t = s \to t = \neg(s \,\&\, \neg t)$ и $s \vee t = \neg(\neg s \,\&\, \neg t)$ переведем нашу систему (аксиома и правило вывода) к виду, содержащему только символы конъюнкции ($\&$) и отрицания ($\neg$). Будем теперь исходными символами считать $\&$ и $\neg$. Останется ли система полной? Автор (при помощи трехзначной интерпретации с одним выделенным значением) показывает, что полученная система не будет полной. В частности, в ней не будут доказуемы тавтологии $\neg(\neg\, s \,\&\, s)$ и $\neg[(s \& t) \& \neg\neg\neg(s \& \neg\neg t)] (= (s \& t) \to \to \neg(s \to \neg t) = (s \& t) \to \neg(\neg s \vee \neg t))$. Ю. А. Шиханович

7693. О некоторых вопросах, связанных с обоснованием арифметики целых чисел. Молодший В. Н., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1958, **71**, 191—201

Рассматривается вопрос о существовании неизоморфных минимальных расширений области натуральных чисел относительно операции вычитания. Показано, что если отказаться от требования сохранения в расширении (всех или части) законов счета для натуральных чисел, то вопрос решается положительно. Автор строит соответствующие элементарные примеры (модели 1 – 3). Для этого ему приходится формулировать неходимые условия существования расширения, отличающиеся от общепринятых как раз отказом от сохранения в расширении законов счета исходной системы. По мнению автора, такая ослабленная трактовка понятия минимального расширения обладает методическими преимуществами (это, однако, не затрагивает проблем обоснования арифметики. *Реф.*). На стр. 192 автор говорит о полноте арифметики целых чисел, на стр. 193 — ссылается на теорему Гёделя о неполноте (арифметики). Из контекста ясно, что противоречия нет, но, по небрежности, не оговорено, что термин „полнота" понимается в двух различных смыслах. В статье имеются многочисленные гносеологические экскурсы, не формулируемые в точных терминах. Ю. А. Гастев

7694. Об одной системе аксиом для положительных чисел. Лэн Шэн-мин (Leng Sen-ming), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1958, **4**, № 1, 35—39 (кит.; рез. англ.)

Ранее автором была предложена система аксиом (I – XII) для положительных чисел (РЖМат, 1958, 3509). В реферируемой статье устанавливается эквивалентность этой системы двум другим, получающимся из первоначальной видоизменением некоторых ее аксиом. Отмечается, что в первоначальной системе аксиому V следует дополнить условием: $1/1 = 1$. Н. М. Нагорный

7695. О степени полноты. Идзуми (Sur le degré de la perfection. Isumi Yosihisa), Tôhoky Math. J., 1955, **7**, № 1-2, 128—131 (франц.)

Делается попытка построить пример, противоречащий двум теоремам А. Роз: 1. Если подсистема E исчисления высказываний такова, что 1) E полна в слабом смысле, 2) импликация выразима через примитивные E, 3) в E имеется правило подстановки и 4) в E имеется правило modus ponens,—то E полна в сильном смысле (Rose A., J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 204). 2. Если подсистема R исчисления высказываний такова, что 1) R полна в слабом смысле, 2′) примитивные R суть эквивалентность и отрицание эквивалентности, 3) в R имеется правило подстановки, 4′) в R имеется правило: „если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$", то степень полноты (Tarski A., Compt. Rend. Soc. Sci et lettres (Varsovie), 1930, 23, 22—29) системы R равна 3 (Rose A., Math. Z., 1951, **54**, 181—183).

Цель работы не достигается, так как лемма 5, на которую опирается построение примера автора, не верна. В самом деле, легко заметить, что истинная в двузначной логике формула $((x \sim y) \sim (x \sim z)) \sim y \sim z)$ в случае, когда $\sim$ есть эквивалентность в трехзначной логике Лукасевича и Вайсберга, при наборе аргументов $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ принимает значение 1, в то время как единственным выделенным значением является 0. К. Ф. Бутов

7696. Доказательство несовместности системы Куайна («Mathematical Logic, 1951»). Кристиан (A proof of the inconsistency of Quine's system, «Mathematical Logic (1951)». Christian Curt), Theoria, 1955, **3**, № 9, 135—136 (англ.)

Имеется ошибка в строке 8 второй колонки на стр. 135. Несовместность не доказана.

По реферату из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 818

7697. Об алгебре бинарных отношений. Сообщение I. Моисил (Asupra algebrei relatilor binare. Nota I. Moisil Gr. C.). Comun Acad RPR, 1958, **8**, № 12, 1251—1254 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор называет алгеброй Шрёдера булеву алгебру с операциями "+", "·" и "|", причем последняя операция обладает следующими свойствами: 1) ассоциативность; 2) дистрибутивность (правая и левая) по отношению к сложению; 3) существование нейтрального элемента u, для которого $a \mid u = u \mid a = a$; 4) $0 \mid a = a \mid 0 = 0$.

Доказана следующая теорема: Всякая конечная алгебра Шрёдера изоморфна некоторому множеству матриц с элементами 0, 1, причем операциям "+", "·", "|" отвечают соответственно булево сложение, булево умножение и матричное умножение, а нейтральному элементу u отвечает единичная матрица $\{\delta_{ij}\}$.

А. В. Гладкий

7698. Опосредованное отношение в математике. Бузулини (La relazione mediata nella matematica. Busulini Bruno. Ann. Univ. Ferrara, 1954—1955, Sez. 7, **4**, 69—80) (итал.)

Исследование общего характера, посвященное отношениям в математике. Разбираются некоторые примеры из книги Морана (РЖМат, 1956, 6368К), иллюстрирующие различие между конститутивными или фундаментальными отношениями и другими соединительными отношениями, действующими вне фундаментальной области. Указывается важность аналогии. G. Kurepa

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1065

7699. Отношение «внутрь» и отношение «наружу» в математике. Бузулини (Relazione ad intra e relazione ad extra nella matematica. Busulini Bruno. Ann. Univ. Ferrara, 1954—1955, Sez. 7, **4**, 91—106) (итал.)

Продолжение статьи, прореферированной выше (реф. 7698). Различие между индукцией и дедукцией сопоставляется с различием между отношениями „внутрь" (ad intra) и отношениями „наружу" (ad extra). Индукция и дедукция не изолированы друг от друга; производя индукцию, мы производим также и дедукцию. G. Kurepa

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1065

7700. О логически ложных высказываниях очевидности. Лебланк (On logically false evidence statements. Leblanc Hugues), J. Symbolic Logic, 1957, **22**, № 4, 345—349 (англ.)

Исследуется система аксиом для функции подтверждения $C(h, e)$ (РЖМат, 1959, 5465). Автор называет e „высказыванием очевидности" (evidence statements).

A1. $0 \leqslant C(h, e) \leqslant 1$;

A2. Если $\vdash h \equiv h'$ и $\vdash e \equiv e'$, то $C(h,e) = C(h', e')$;

A3. Если $\vdash e \supset h$, то $C(h, e) = 1$;

A4. Если $\vdash e \supset \sim(h.h')$, то $C(h \vee h', e) = C(h, e) + C(h', e)$;

A5. $C(h.h', e) = C(h, e) \times C(h', h.e)$.

(Знак $\vdash$ означает логическую истинность). Из этих аксиом следует:

$$\text{Если } \vdash \sim e, \text{ то } C(h \vee \sim h, e) = 1,$$

$$\text{Если } \vdash \sim e, \text{ то } C(h \vee \sim h, e) = 2.$$

Таким образом, в теориях подтверждения с аксиомами A1—A5 приходится исключать языки, содержащие логически ложные „высказывания очевидности" e. Более естественным представляется изменение системы аксиом A1—A5, различные варианты которого рассматриваются в данной статье.

Изменения касаются аксиом A3 и A4, которые принимают следующий вид:

A3′. Если $\vdash e \supset h$, то $C(h, e) = 1$, где не $\vdash \sim e$;

A4′. Если $\vdash e \supset \sim(h.h')$, то $C(h \vee h', e) = C(h, e) + C(h', e)$, где не $\vdash \sim e$.

Затем для системы аксиом A1, A2, A3′, A4′, A5 (системы AS1) предлагаются различные доопределения функции C в случае $\vdash \sim e$.

Первое доопределение: к AS1 добавляется аксиома A6. Если $\vdash \sim e$, то $C(h, e) = 1$.

То же доопределение получается, если в AS1 заменить A3′ на A3 (так как тогда A6 следует из A3).

Этот вариант исследовался также Карнапом (Carnap R., Logical foundations of probability, Chicago, 1950).

Второе доопределение: к AS1 добавляется аксиома A7. Если $\vdash \sim e$, то $C(h, e) = 0$.

То же доопределение получается, если в AS1 заменить A4′ на A4 (так как тогда A7 следует из A4).

Третье доопределение: к AS1 добавляется аксиома A8. $C(h, e) + C(\sim h, e) = 1$, где $\vdash \sim e$.

Этот вариант исследовался также Райтом (Wright G. H., The logical problem of induction, New York, 1957).

О. П. Кузнецов

7701. Формализация понятия «об». Патман (Formalization of the concept «about». Putman Hilary), Philos. Sci., 1958, **25**, № 2, 125—130 (англ.)

Исследуется проблема: как установить, о чем говорит данное предложение. Предлагается формализация понятия „об", использующая понятия описания состояния (Carnap, Logical foundations of probability, 1950) и количества семантической информации (Carnap, Bar-Hillel, Brit. J. Philos. Sci., 1953, **4**). Рассматриваются языки, содержащие только одноместные исходные предикаты и конечное число индивидов. Под описанием состояния в языке с m исходными предикатами и n индивидами понимается конъюнкция вида $P_1(a_1) \& P_1(a_2) \& \ldots \& P_i(a_j) \& \ldots \& P_m(a_n)$, где над некоторыми из $P_i(a_j)$, возможно, стоят отрицания. Количество информации $\inf(S)$, содержащейся в предложении S, определяется так:

$$(1)\ \inf(S) = \log_2 x - \log_2 y$$

(где x — число всех возможных описаний состояния, а y — число описаний состояния, в которых S истинно). Из этого определения следует, в частности, что количество информации атомарного предложения $\inf(P_i(a_j)) = 1$. То, в какой степени предложение S говорит о классе C, автор предлагает измерять величиной $\inf(S, C)$ — количеством информации о C, содержащейся в S. Определение этой величины строится следующим образом.

1. Пусть S—описание состояния; например (для языка с 5 индивидами и предикатами P и Q) S может иметь вид (2)

$$P(a_1)\,\bar{P}(a_2)\,P(a_3)\,\bar{P}(a_4)\,P(a_5)\,Q(a_1)\,Q(a_2)\,\bar{Q}(a_3)\,\bar{Q}(a_4)\,Q(a_5).$$

Относительно P то же самое количество информации содержится в предложении

$$(3)\ P(a_1)\,\bar{P}(a_2)\,P(a_3)\,\bar{P}(a_4)\,P(a_5)\,Q(a_1)\,\bar{Q}(a_3)\,Q(a_5).$$

Если класс C не является исходным предикатом, то в общем случае, количество информации о нем, содержащейся в описании состояния S, равно количеству информации, содержащейся в предложении вида

$$(4)\ C(a_{i_1})\,C(a_{i_2}) \ldots C(a_{i_k})\,\bar{C}(a_{j_1}) \ldots \bar{C}(a_{j_m})\,P_{11}(a_{i_1}) \ldots$$
$$\ldots P_{n1}(a_{i_1}) \ldots P_{k1}(a_{i_k}) \ldots P_{kn}(a_{i_k}),$$

где $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ суть все индивиды a_l такие, что $C(a_l)$ следует из S, $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ — все индивиды a_j такие, что $\bar{C}(a_j)$ следует из S, P_{lj} есть j-й исходный предикат или его отрицание такой, что $P_{lj}(a_{i_l})$ следует из S.

2. Пусть S — произвольное предложение и C — произвольный класс. Обозначим через T_C предложение, которое получено разложением S на дизъюнкцию описаний состояния и заменой в этой дизъюнкции каждого описания состояния на соответствующее ему предложение вида (4). Тогда определим

$$(5)\ \inf(S, C) \underset{\text{Df}}{=} \inf(T_C).$$

Например, $\inf((2), P) = \inf((3)) = 8$ (согласно (1)). Определение (5) представляет собой формализацию „количественного" понятия „об". (6) S говорит строго о C, если и только если $\inf(S, C) = \inf(S)$.

О. П. Кузнецов

7702. Относительно спора о смысле «вероятности». Блом (Concerning a controversy on the meaning of «probability». Blom Siri. Theoria, 1955, **21**, 65—98) (англ.)

7703. Дедукция, индукция и вероятность. Юхош (Deduktion, Induktion und Wahrscheinlichkeit. Juhos Béla von. Methodos. 1954, **6**, 259—278) (нем.)

7704. Приложение теории игр. Фюрст (Un'applicazione della teoria dei giuochi. Fürst Dario), Archimede, 1958, **10**, № 5, 211—223 (итал.)

Решается прикладная задача из теории игр: находятся оптимальные стратегии противников для парной нульсуммной игры, имеющей симметричную матрицу чистых стратегий третьего порядка. Новых результатов статья не содержит. Э. Д. Стоцкий

7705. Опыт полной формализации математических рассуждений на основе трех операций. Сюбле (Essai de formalisation complète du raisonnement mathématique sur la base de trois opérations. Sublet Jacques), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, **A5**, 91—94 (франц.)

Попытка описать основные математические понятия с помощью штриха Шеффера, терма „тот, который" и принадлежности множеству ε. Высказаны общие соображения. Ю. И. Янов

7706. Формализация логики в соответствии с перспективой содержательности. Санчес-Масас (Formalization of logic according to the perspective of intensionality. Sanchez-Mazas Miguel. Theoria, 1955, **3**, № 9, 105—117) (исп.; рез. франц., англ.)

Автор исследует классический силлогизм с точки зрения содержательной (intensional) логики в противоположность объемной (extensional). Используемая система есть часть исчисления высказываний с добавлением некоторых предикатов, операций и классов термов. Доказываются все законы логического квадрата и 24 модуса силлогизма.

Класс именных (nominal) переменных ($a, a', b, b', \ldots$) вводится с помощью предиката „( )": a ( ) b означает, что a инцидентно b. Определяются также: a) b [a включает b] и отрицания обоих этих отношений, a) (b и a(b. Если a) (a', то a/a' есть новый терм. Четыре категорических суждения определяются в терминах предиката

( ). Например, если $a = a/a'$ и $b = b/b'$, то Aab. [Все a суть b] означает $a)b$ и $a')b'$. Эта система может быть интерпретирована не только так, как выше, но также как система натуральных чисел с отношением делимости. Так, если a и a' — натуральные числа, то a/a' есть их частное, и $a( )a'$ означает, что они взаимно просты. При этой интерпретации теоремы системы становятся арифметическими теоремами о делимости. E. J. Cogan
Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 10, 1037—1038

7707. Краткое сообщение об основаниях универсальной алгебры. Хюммер (Kurze Mitteilung über die Grundlagen der Universal-Algebra. Huemmer W. S. L. Zurich, Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci. Zurich, 1954, Vol. 2. Neuchâtel, Ed. Griffon, 1955, 109—120) (нем.)

Статья должна, по-видимому, служить введением к обширному трактату, цель которого — „свести всю математическую логику и всю (аксиоматическую) математику к единой фундаментальной структуре". Автор использует большое число символов, вероятно, определенных в указанном трактате, но никаких конкретных результатов не формулирует и не дает указаний на дедуктивные методы используемые в работе. A. Robinson
Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 932

7708. Теория силлогизма в алгебраической форме. Санчес-Масас (The theory of the syllogism developed in algebraic form. Sanchez-Mazas Miguel. Theoria, 1954, 2, № 7-8, 95—109) (исп.)

7709. Аксиома и аксиоматика. Фрёйденталь (Axiom und Axiomatik. Freudenthal Hans), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1-2, 4—19 (нем.)

Популярная статья о возникновении и развитии аксиоматического метода в математике. А. А. Фридман

7710. О книге Витгенштейна «Заметки об основаниях математики». Крейсел (Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics. Kreisel G.), Brit. J. Philos. Sci., 1958, 9, № 34, 135—158 (англ.)

Критический обзор взглядов Витгенштейна на основания математики составленный на основе книги Витгенштейна (РЖМат, 1959, 23К) и личных бесед автора с последним. Отмечается что скепсис Витгенштейна по отношению к математическим понятиям в значительной мере обусловлен его подходом к ним, связанным с общефилософскими позициями Витгенштейна. Автор реферируемой статьи сомневается в плодотворности такого подхода и противопоставляет ему следующее оптимистическое credo: „Каждый значительный раздел математики заключает в себе основательную математическую суть; и если мы хорошо посмотрим, мы (непременно) разглядим ее". Обзор выполнен по немецкому оригиналу книги Витгенштейна и заканчивается перечнем исправлений к английскому переводу.
Ю. А. Гастев

7711. Некоторые замечания о номинализме. Хенкин (Some notes on nominalism. Henkin L.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 1, 19—29 (англ.)

Куайн и Гудман (Quine W. V., On universals; Goodman Nelson, Quine W. V., J. Symbolic Logic, 1947, 12, 74—84, 105—122), выдвигая философскую точку зрения, отказывающуюся иметь дело с абстрактными сущностями, рассмотрели возможность переистолкования языка классической математики в рамках узкой области (материальных) сущностей признаваемых ими. Реферируемая статья посвящена обсуждению этой программы. Автор предлагает метод интерпретации формул расширенного исчисления предикатов и подобных ему систем; при этом условия истинности формул исчисления могут быть даны в терминах только физических объектов. Язык N, употребляемый для такой интерпретации, состоящий из узкого исчисления предикатов с дополнительно определенными индивидуальными предикатами, подробно описан в одной из прежних статей автора (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, 14, 159—166).

Формулы N получают при этом стандартную номиналистскую интерпретацию (см. цит. работу Куайна). Автор в заключение отмечает, что предположение существования бесконечного множества физических объектов, используемое при такой интерпретации, не противоречит основной установке номинализма о непринятии существования нематериальных объектов.
Ю. А. Гастев

7712. Формализм, интуиционизм и метафизика. Исаиэ (Formalisme, intuitionnisme et métaphysique. Isaye G. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954. Vol. 2. Neuchâtel, Griffon, 1955, 121—127) (англ.)

7713. Трехзначная логика и соотношение неопределенностей Гейзенберга. Гюнтер (Dreiwertige Logik und die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation. Günther Gotthard. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954. Vol. 2. Neuchâtel, Griffon, 1955, 53—59) (нем.)

7714. Об исчислении экспериментальных предложений. Детуш (Über den Aussagenkalkül der Experimentalaussagen. Destouches J. L. Arch. Math. Logik Grundlagenforsch, 1956, 2, 104—105) (нем.)

7715. О попытках построения логически завершенной картины мира. Кустаанхеймо (Über die Versuche, ein logisch finites Weltbild aufzubauen. Kustaanheimo Paul. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954. Vol. 2. Neuchâtel, Griffon, 1955, 60—66) (нем.)

7716. Принцип перманентности в математике и отрицание отрицания. Стипанич (Le principe de la permanence dans les mathématiques et la négation de la négation. Stipanić Ernest. Proc. 2nd Internat. Congr. Internat. Union Philos. Sci., Zurich, 1954, Vol. 2. Neuchâtel, Griffon, 1955, 138—143) (франц.)

7717 К. Символическая логика. Копи (Symbolic logic. Copi J. M. New-York, the Macmillan Co., 1956, XVIII, 356 pp.) (англ.)

Книга задумана автором как учебник для начинающих изучение математической логики и содержит подробное изложение логики высказываний и логики предикатов (узкое исчисление); расширенное исчисление предикатов затрагивается лишь вскользь. Имеются два кратких приложения по разветвленной теории типов и по алгебре классов. Разбирается много примеров, приводятся обширные списки тренировочных упражнений.

В гл. II, III, IV, V дается содержательное построение логики высказываний и предикатов, а в гл. VII, VIII, IX даны соответствующие формально дедуктивные построения. Гл. I является вводной, а в гл. VI излагаются общие соображения о построении формально дедуктивных теорий и разъясняется смысл проблем полноты, непротиворечивости и независимости. При содержательной трактовке логики основное внимание уделено правилам преобразования не отдельных формул, а объектов, называемых автором "аргументами", или доказательствами и имеющими вид:

$$\frac{P_1, P_2, \ldots, P_k}{R},$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — посылки, R — заключение. Обоснование такого „аргумента" заключается в сведении его к последовательности элементарных „схем доказательств" из

списка девяти схем (modus ponens, гипотетический силлогизм и т. д.).

Рассматривается следующая формальная система (R. S.) логики высказываний (принадлежащая Россеру):

Ax 1. $P \supset (P.)$.

Ax 2. $P.Q \supset P$.

Ax 3. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q.R) \supset .\sim(R.P)]$

с правилом заключения $\frac{P, P \supset Q}{Q}$. Для R. S. устанавливается полнота, непротиворечивость и теорема дедукции.

Более бегло рассматриваются в гл. VIII система Гильберта и Аккермана, а также система Никода с единственной логической операцией (штрих Шеффера), единственной схемой аксиом и единственным правилом вывода. В гл. IX R. S. расширяется до исчисления предикатов путем добавления схем аксиом:

Ax 4. $(P \supset Q) \supset (P \supset (x)\,Q)$,

Ax 5. $(x)\,P \supset Q$.

(Q — результат замены в P переменной x свободной переменной y) и правила вывода $\frac{P}{(x)\,P}$. Показывается, что в этой системе формализуется техника дедукции, содержательно развитая в гл. II — V. Приводится доказательство полноты для логики предикатов по Хенкину (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, 14).

Б. А. Трахтенброт

7718 К. Введение в символическую логику с изложением ее применений. Карнап (Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Carnap Rudolf. Wien, Springer, 1954, 10, 209 S., ill., 27 DM) (гол.)

7719 К. Полные теории. Робинсон (Complete theories. Robinson Abraham. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956, VII, 129 pp., 13.50 gld.) (англ.)

Цель книги: определить два понятия (модельной полноты (model-completeness) и ограничивающего преобразования (bounding transform)), изучить их свойства и применить их к так называемым элементарным теориям некоторых математических структур. Краткое содержание книги по частям:

Часть I. Общее введение. После короткого описания функционального исчисления первого порядка определяется математическая структура как непустое множество констант и непустое множество отношений. Диаграмма структуры — это множество всех высказываний $R^*(a_1, \ldots, a_n)$, где R — одно из данных отношений, каждое a_i — одна из данных констант, а R^* есть R или $\sim R$ в зависимости от того, верно ли высказывание $R(a_1, \ldots, a_n)$ в рассматриваемой структуре или нет. Часть I заканчивается обсуждением теоремы Гёделя о полноте и критерием (тест Вота) для полноты множества высказываний (Множество K высказываний называется полным, если для каждого высказывания X, содержащего константы и отношения только из K, либо X, либо $\sim X$ выводимо из K, т. е. другими словами, если каждое такое X разрешимо в K).

Часть II. Модельная полнота. Непустое совместное множество K высказываний называется модельно-полным, если для любой структуры M, являющейся моделью множества K и содержащей отношения только из K, каждое высказывание (содержащее константы и отношения только из K) разрешимо в объединении множества K с диаграммой структуры M. Цель этой части: изучить понятие модельной полноты (и обобщение, названное частичной модельной полнотой). Ряд приложений теории основан на следующем факте: для модельной полноты непустого совместного множества K высказываний необходимо и достаточно, чтобы всякое примитивное высказывание, содержащее только константы и отношения из K, верное в некоторой модели множества K, было верным в любом расширении этой модели. (Примитивная формула — это конъюнкция атомных формул и их отрицаний, предваренная кванторами существования).

Часть III. Модельно-полные группы и поля. Доказывается, что некоторые хорошо известные типы математических структур модельно-полны. Типичный результат: элементарная теория алгебраически замкнутого поля с нетривиальной оценкой в упорядоченной абелевой группе модельно-полна.

Часть IV. Полнота. Изучаются связи между полнотой и модельной полнотой. Большинство результатов получается при помощи того факта, что каждое модельно-полное множество высказываний имеет простую модель, являющуюся полной (Простая модель множества K — это такая модель M множества K, что каждая модель множества K имеет подмодель, изоморфную структуре M). Этот факт, в соединении с предшествующими результатами о модельной полноте влечет полноту отдельных теорий.

Часть V. Приложения. Эта часть переформулирует и обобщает результаты предыдущих частей. Результаты обычно имеют форму „принципов перехода". Одним из простейших примеров такого принципа является утверждение о том, что каждое верное высказывание о комплексных числах (сформулированное в функциональном исчислении первого порядка в терминах равенства, сложения и умножения) остается верным в любом алгебраически замкнутом поле характеристики 0. Обсуждается ряд примеров из алгебры и алгебраической геометрии.

Часть VI. Синтаксические преобразования. Синтаксическое преобразование — это соответствие, относящее каждому элементу некоторого класса C высказываний (из функционального исчисления первого порядка) другое высказывание, получающееся из данного по определенным формальным правилам. Примером синтаксического преобразования является переход от высказывания к его нормальной форме Сколема.

Главный упор в этой части делается на так называемое ограничивающее преобразование. Эти преобразования (слишком сложные, чтобы определить их здесь) предназначаются главным образом для применения в теории упорядоченных структур (особенно — упорядоченных абелевых групп). Тривиальным примером (который, тем не менее, иллюстрирует цель теории) является переход от высказывания о существовании суммы x и y к высказыванию, что сумма x и y (существует и) равномерно ограничена в терминах данных границ для x и y. В общей теории показывается, что доказуемость некоторых высказываний влечет выводимость результатов применения к ним ограничивающих преобразований.

P. R. Halmos

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 8, 817

7720 Д. О соотношении логики математической и логики традиционной. Книгин А. Н. Автореф. дисс. канд. филос. н., ЛГУ, Л., 1958

См. также: 7834, 7893

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

7721. Представления больших двудольных. Райт (Partitions of large bipartites. Wright E. M.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 643—658 (англ.)

Продолжение работ автора (РЖМат, 1958, 78; 1959, 2288), результаты которых автор использует в реферируемой статье.

Под двудольным числом (m, n) понимается двумерный вектор с неотрицательными рациональными компонентами. Количеством представлений $p(m, n)$ двудольного числа (m, n) называется количество решений векторного уравнения $\sum_k (m_k, n_k) = (m, n)$ в двудольных числах, отличных от нуля. Рассматриваются также представления двудольных чисел, в которых ни одна часть не равна нулю, в которых обе компоненты различны и т. д. Для больших m и n, удовлетворяющих условию $1/2 - \varepsilon_1 < \log n/\log m < 2 - \varepsilon_2$ для любых малых положительных ε_1 и ε_2, выводится асимптотическая формула: $p(m, n) \sim e^{\sigma}$, где $\sigma = 3(amn)^{1/3} + b(m+n)/(amn)^{1/3} + (1/3)\{2 - c(n/m)\}\log(a^2/mn) + D(n/m) + \nu^{-1}T_k(\mu) + \mu^{-1}T_{k'}(\nu)$. Здесь a, b, k, k' — постоянные, $c = c(z)$ и $D = D(z)$ для каждого комплексного z с $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\mu = (amn^{-2})^{1/3}$, $\nu = (anm^{-2})^{1/3}$, $T_H(\mu) = a\sum_{h=3}^{2H-1} P_h \mu^{h-1}$ и P_h подсчитаны для $h = 1, 2, \ldots, 7$ в конце статьи.

С. М. Розин

7722. Разбиение конечного множества на ограниченные части. Микса, Мозер, Уайман (Restricted partitions of finite sets. Miksa F. L., Moser L., Wyman M.), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, № 2, 87—96 (англ.)

Пусть $G_{n,r}$ обозначает число способов распределения множества из n элементов на подмножества, содержащие не более, чем по r элементов. Авторы изучают свойства чисел $G_{n,r}$.

Устанавливается (в § 1) несколько рекуррентных формул для $G_{n,r}$ и вводится порождающая экспоненциальная функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,r}\, x^n/n! = \exp(x + x^2/2! + \ldots + x^r/r!).$$

Для простого числа p и $r < p$ доказываются сравнения

$$G_{p,r} \equiv 1 \pmod p,\quad G_{n+p,r} \equiv G_{n,r} \pmod p.$$

Устанавливается асимптотическое представление

$$G_{n,r} \sim (n/R)^n r^{-1/2} \exp(n/R + R^r/r! - n - 1),$$

где r фиксировано, $n \to \infty$, R — положительное число, удовлетворяющее уравнению $R + R^2/1! + R^3/2! + \ldots + R^r/(r-1)! = n$. Вводятся полиномы $G_{n,r}(t)$ и числа $\sigma^s_{n,r}$, определяемые соотношениями:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{n,r}(t)\, x^n/n! = \exp[t(x + x^2/2! + \ldots + x^r/r!)],$$

$$G_{n,r}(t) = \sum_{s=1}^{n} \sigma^s_{n,r}\, t^s.$$

Число $\sigma^s_{n,r}$ оказывается равным числу способов распределения множества из n элементов на s подмножеств, содержащих не более, чем по r элементов. Для полиномов $G_{n,r}(t)$ и чисел $\sigma^s_{n,r}$ устанавливаются рекуррентные соотношения, аналогичные формулам § 1.

Г. И. Перельмутер

7723. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы. Минеев М. П., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, 585—598

Дается асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения $m_1 g^{x_1} + \ldots + m_k g^{x_k} = n_1 g^{y_1} + \ldots + n_k g^{y_k}$ где g — целое $\geqslant 2$, $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_k$ — натуральные числа $0 \leqslant x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \leqslant p-1$, k фиксировано, $p \to \infty$. Комбинируя этот результат с методом моментов А. А. Маркова, передоказывается теорема Каца (Kac M., Ann. Math., second serie, 1946, **47**, № 1, 33—49) о пределе при $p \to \infty$ меры множества тех α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, для которых $\sum_{x=0}^{p-1} f(\alpha g^k) < \lambda\sqrt{p}$, где λ — постоянная, а $f(\alpha g^k)$ — функция, удовлетворяющая определенным условиям.

Примечание референта. Неудачна аннотация к работе. Есть мелкие неточности (в сноске на стр. 591 под знаком интеграла пропущено $d\alpha$, в формулировке теоремы на стр. 591 подинтегральная функция $e^{-z^2/2\sigma^2}$ и др.

А. Г. Постников

7724. Одна общая тауберова теорема, связанная с элементарным доказательством асимптотического закона распределения простых чисел. Питт (A general Tauberian theorem related to the elementary proof of the prime number theorem. Pitt H. R.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 32, 569—588 (англ.)

Рассматривается преобразование вида

$$g(x) = s(x) + \frac{1}{x}\int_0^x s(x-y)\,dk(y) \quad (x > 0), \tag{1}$$

являющееся абелевым в том смысле, что из $s(x) \to A$ следует $g(x) \to 2A$. На функцию $k(x)$ наложены условия

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } k(0) = 0,\quad k(x) \text{ возрастает при } x \geqslant 0, \\ \text{б) } k(x) \sim x \text{ при } x \to \infty, \\ \text{в) для каждого } \delta > 0 \\ \limsup\,[k(x) - k(x-\delta)] = \eta(\delta) < \infty. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Все рассматриваемые функции считаются измеримыми по Борелю и ограниченными в каждом конечном интервале, а интегралы берутся в смысле Лебега-Стилтьеса. Ставится вопрос о том, при каких условиях из $g(x) \to 2A$ следует $s(x) \to A$. Ответом служит

Теорема 1. Пусть $k(x)$ удовлетворяет условиям (2) и $s(x)$ — вещественная ограниченная и измеримая по Борелю в каждом конечном интервале функция такая, что

$$\liminf\,[s(x') - s(x)] \geqslant 0$$

при $x \to \infty$, $x' \geqslant x$, $x' - x \to 0$.

Пусть

$$k_1(x) = k(x),\quad k_n(x) = \int_0^x k_{n-1}(x-y)\,dk(y) \quad (n \geqslant 2)$$

и предположим далее, что для каждого $\delta > 0$ и каждой неограниченно возрастающей последовательности x_v найдутся нечетное положительное число n и четное положительное число m (зависящие от δ и последовательности x_v), для которых

$$\limsup_{v\to\infty}\; x_v^{1-n-m}\int_0^{x_v} [k_n(y) - k_n(y-\delta)]\,[k_m(y) - k_m(y-\delta)]\,dy > 0. \tag{3}$$

Тогда, если $g(x)$ определена (1) и $g(x) \to 2A$ при $x \to \infty$, то $s(x) \to A$.

Несколько неестественное и трудное для проверки условие (3) можно заменить эквивалентным ему условием

$$\liminf_{\sigma \to +0} \inf_{|t| \leqslant T} |1 + \sigma K(\omega)| > 0 \qquad (4)$$

(для каждого $T > 0$), где

$$K(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega y}\, d k(y), \quad \omega = \sigma + it, \quad \sigma > 0$$

(теорема 2).

Теоремы 1 и 2 не могут быть улучшены (теорема 3), так как, если $k(x)$ не удовлетворяет (3) или (4), найдется такая функция $s(x)$, для которой теорема 1 (или теорема 2) будет неверна.

Автор отмечает также, что теорема 1 остается справедливой и при замене условия (3) на условие $\lim_{\delta \to 0} \gamma_1(\delta) = 0$ (теорема 4).

Положим $k(x) = \sum_{\log p < x} p^{-1} \log p$ (p — простое). Сельберг (Selberg A., Ann. Math. Soc., 1949, **50**, 305—313) показал, что $g(x) \to 0$, если $s(x) = e^{-x} \vartheta(e^x) - 1$, где $\vartheta(u) = \sum_{p \leqslant u} \log p$. Но тогда, используя теорему 1, можно показать, что $s(x) \to 0$, а это последнее утверждение эквивалентно асимптотическому закону распределения простых чисел. Автор дает набросок нескольких вариантов такого доказательства. Д. Н. Ленской

7725. Обобщение метода решета А. Сельберга на алгебраические числовые поля. I. Ригер (Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. I. Rieger G. J.), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 3-4, 208—214 (нем.)

Доказана

Теорема. Пусть M — целое натуральное число $\geqslant 2$ n пробегает M не обязательно различных идеалов $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_M$ алгебраического поля K; пусть $\mathfrak{N}\mathfrak{d}$ — норма идеала $\mathfrak{d}$ из K, $\mathfrak{o}$ — единичный идеал в K; $(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ — общий наибольший делитель идеалов $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ из K, $[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]$ — наименьшее общее кратное идеалов $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ из K, $\mu(\mathfrak{d})$ — функции Мёбиуса для идеала $\mathfrak{d}$ из K, $f(\mathfrak{d})$ — мультипликативная функция идеала $\mathfrak{d}$ из K с условием $1 < f(\mathfrak{d}) < +\infty$ для $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{o}$, z — положительное вещественное число $\geqslant 2$. $S = N(\mathfrak{n}, \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}, \text{для } \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqslant z)$ обозначает количество тех идеалов $\mathfrak{n}$, каждый из которых не делится ни на один простой идеал $\mathfrak{p}$ с условием $\mathfrak{N}\mathfrak{p} \leqslant z$, пусть дальше

$$f_1(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{d} / \mathfrak{r}} \mu(\mathfrak{d})\, f(\mathfrak{r}\mathfrak{d}), \quad \mathfrak{r} \in K,$$

$$Z = \sum\nolimits' _{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqslant z} \frac{\mu_2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}; \quad S_{\mathfrak{d}} = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \\ \mathfrak{d} / \mathfrak{n}}}{}' 1, \quad \mathfrak{N}_{\mathfrak{d}} \sim S_{\mathfrak{d}} \sim \frac{\mu}{f(\mathfrak{d})},$$

$$\lambda(\mathfrak{d}) = \frac{\mu(\mathfrak{d})}{Z} \prod_{\mathfrak{p} / \mathfrak{d}} \left(1 - \frac{1}{f(\mathfrak{p})}\right)^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{N}\mathfrak{r} \leqslant \frac{z}{\mathfrak{N}\mathfrak{d}} \\ (\mathfrak{r}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}}}{}' \frac{\mu^2(\mathfrak{r})}{f_1(\mathfrak{r})}$$

в таком случае имеет место оценка

$$S \leqslant \frac{\mu}{Z} + O\left(\sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_1 \leqslant z} \sum_{\mathfrak{N}\mathfrak{d}_2 \leqslant z} |\lambda(\mathfrak{d}_1)\lambda(\mathfrak{d}_2)|\, |R_{[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}| \right).$$

Метод доказательства теоремы аналогичен методу Сельберга. А. И. Виноградов

7726. Инверсия формальных рядов Дирихле. Рибенбойм (Inversion de séries de Dirichlet formelles. Ribenboim P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 23 (франц.)

7727. Этюды по дзета-функции Римана. Майер (Studien zu Riemanns Zeta-funktion. Maier W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 58—59 (нем.)

7728. Некоторые гипотезы о простых числах. Серпинский (Quelques hypothèses sur les nombres premiers. Sierpiński W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 35 (франц.)

7729. Плотность простых чисел, имеющих различные специфические свойства. Лемер, Лемер (Density of primes having various specified properties. Lehmer D. H., Lehmer E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 32 (англ.)

Информация о результатах опытной проверки гипотез распределения следующих рядов простых чисел: а) пар простых чисел, отличающихся на константу < 72; б) троек и четверок простых чисел с данным разностным шагом; в) последовательностей простых чисел с данной разностью; г) простых чисел, составляющих арифметические прогрессии с модулем 4, 6, 8; д) простых чисел, имеющих данный первообразный корень; е) сумм числовых функций от простых чисел. Выводы из наблюдений: результаты для а) и б) подтверждают предположения Харди-Литлвуда; результаты для в) и г) частично перекрываются работами Кембриджской математической лаборатории; результаты для д) показывают необходимость модификации предположений Артина. Б. А. Кордемский

7730. О некоторых арифметических функциях. Деланж (Sur certaines fonctions arithmétiques. Delange H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 28 (франц.)

Пусть $h(n)$ — вещественная или комплексная мультипликативная арифметическая функция, по модулю не превосходящая единицы, $H(x) = x^{-1} \log x \sum_{p \leqslant x} h(p)$, где суммируется по всем простым $p < x$. Указывается, что при $x \to +\infty$ $x^{-1} \sum_{n \leqslant x} h(n) \to 0$, если только $\sum_p p^{-1} \{1 - \mathfrak{R}\, h(p)\} = +\infty$ и $H(x^\lambda) - H(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, где первая сумма берется по всем натуральным $n \leqslant x$, вторая по всем простым p и $\lambda > 0$.

Р. В. Уждавинис

7731. О теореме Эрдёша. Деланж (On a theorem of Erdös. Delange Hubert), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 109—116 (англ.)

Автор имеет в виду одну теорему Эрдёша о равномерном распределении по модулю 1 значений сильно аддитивных функций (Erdös P., Ann. Math., 1946, (2), **47**, 1—20). Пользуясь теоремой Вейля о равномерном распределении чисел по модулю 1, автор теорему Эрдёша получает из следующей теоремы: Пусть $f(n)$ — действительная сильно аддитивная функция, p — простое число,

$$\sum_p \frac{1}{p} \sin^2 \frac{f(p)}{2} = \infty,$$

$$\sum_{x < p \leqslant x^\lambda} \frac{1}{p} \left| \sin \frac{f(p)}{2} \right| \to 0$$

при $x \to \infty$ для любого $\lambda > 1$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} \exp\{i f(n)\} = o(x).$$

Отсюда также получается аналогичная теорема о распределении значений сильно аддитивных функций по модулю q, где $q > 0$ — целое число, в частности для функции $\omega_E(n)$, которая означает число простых делителей числа n, принадлежащих множеству простых чисел E.

Э. И. Вилкас

7732. К теории равнораспределения. Главка (Zur Theorie der Gleichverteilung. Hlawka E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 30 (нем.)

7733. Сравнения для коэффициентов модулярных форм и для коэффициентов от $j(\tau)$. Ньюман (Congruences for the coefficients of modular forms and for the coefficients of $j(\tau)$. Newman Morris), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 609—612 (англ.)

Рассматривается модулярный инвариант

$$j(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) x^n = \frac{1}{x} + 744 + 196\,884\,x + \ldots$$

$$(x = \exp 2\pi i \tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0).$$

Дается несколько сравнений mod 13 для коэффициентов $c(n)$. Дается также и явная формула для $c(n)$.

Г. А. Ломадзе

7734. Аппроксимация действительных чисел числами из поля, порожденного фуксовой группой. Данжуа (Approximation des nombres réels par ceux d'un corps fourni par un groupe fuchsien. Denjoy A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 45 (франц.)

Автор исходит из фуксовой группы G подстановок $S(z' = (pz + p')/(qz + q')$, представляющий которую многоугольник на верхней комплексной полуплоскости обладает единственной действительной вершиной (1,0) при подстановке $z' = z + 1$. Рассматриваются приближения действительных чисел, получаемые при помощи таких подстановок. Если G является группой Шварца, то получаются полное каноническое разложение действительного числа в цепную дробь и свойства функции Минковского.

А. Н. Хованский

7735. Теория диофантовых приближений. II. Неоднородные проблемы. Шош (On the theory of diophantine approximations. II. (Inhomogeneous problems). Sós Vera T.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 1-2, 229—241 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 107.

Дается геометрическая интерпретация алгорифма подходящих дробей иррационального числа α таким образом, что оказывается возможным распространение такого алгорифма на неоднородные диофантовы приближения. На этом пути автор получает ряд теорем для неоднородного случая, вполне аналогичных теоремам Бореля, Гурвица и т. д., известных в теории однопараметрических однородных диофантовых приближений (Хинчин А. Я., Цепные дроби, 1949).

Утверждается также, что предлагаемый метод позволяет указать новые нижнюю и верхнюю границы константы Хинчина c, определяемой равенством

$$c = \inf_{\alpha} \sup_{\beta} \inf_{x>0} \inf_{y\text{-целые}} x\,|\,\alpha x - \beta - y\,|\,.$$

Доказательство последнего утверждения не приводится.

А. Ф. Лаврик

7736. Диофантовы приближения и орициклические группы. Ранкин (Diophantine approximation and horocyclic groups. Rankin R. A.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 277—290 (англ.)

Пусть Γ — зональная орициклическая группа дробно-линейных преобразований $w = Tz = (az+b)/(cz+d)$, a, b, c, d — вещественные числа такие, что $ad - bc = 1$ (Γ — фуксова группа первого рода с неподвижной параболической точкой в ∞ и вещественной осью в качестве основной окружности).

Для такой группы существует наименьшее положительное λ такое, что $U^{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Преобразование U^{λ} порождает циклическую подгруппу группы Γ. Рассмотрим левый смежный класс группы Γ по подгруппе U^{λ}, определенный преобразованием T.

Тогда, так как $TU^{\lambda m}$ и T имеют одинаковые первые и третьи коэффициенты (a и c), то задачу о приближении иррациональных чисел рациональными можно обобщить следующим образом: если существует положительное число $h = h(\Gamma)$ такое, что неравенство

$$|\,\omega - T\infty\,| < \frac{1}{hc^2} \qquad (1)$$

справедливо для преобразований T в бесконечно большом числе левых смежных классов Γ_U в Γ, где ω — произвольное вещественное число, отличное от точек, конгруэнтных ∞ относительно Γ, то каков supremum последовательности h?

В частности, если Γ — полная модулярная группа, то эта задача сводится к задаче об аппроксимации иррациональных чисел рациональными и $\sup h = \sqrt{5}$. Этот результат Гурвица был получен Фордом (Ford R., Proc. Edinburg Math. Soc., 1917, **35**, 59 — 65) на основании изучения структуры фундаментальной области модулярной группы. Автор рассматривает поставленную задачу для произвольной зональной орициклической группы первого рода.

Отметим несколько результатов работы.

Теорема 1. Если Γ — зональная орициклическая группа первого рода и ω — вещественное число, не являющееся неподвижной параболической точкой Γ, то имеется бесконечное множество левых смежных классов в Γ по Γ_U таких, что всякое T из этих классов удовлетворяет неравенству

$$\left|\,\omega - \frac{a}{c}\,\right| = |\,\omega - T\infty\,| < \frac{1}{h_{\Gamma} c^2} \quad (c \neq 0), \qquad (2)$$

где h_{Γ} — удвоенное наименьшее расстояние от точек действительной оси до наибольших изометрических окружностей верхней полуплоскости.

Пусть $\mathfrak{S}(E, \Gamma)$ — последовательность положительных h, для которых (1) выполняется в бесконечном множестве левых смежных классов в Γ по Γ_U, $h(E, \Gamma) = \sup h\ (h \in \mathfrak{S}(E, \Gamma))$,

$$h'_{\Gamma} = \inf \rho_H,\ \rho_H = \frac{[(A+D)^2 - 4]^{1/2}}{|\,C\,|} \max\left\{1, \frac{C^2}{m^2(|A+D|-2)}\right\},$$

где H — гиперболическое преобразование, принадлежащее Γ ($H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $C > 0$, $A + D > 2$), m — наименьшее значение $|\,c\,|$ для $T \in \Gamma$, тогда согласно теореме 3 работы

$$h_{\Gamma} \leqslant h(E, \Gamma) \leqslant h'_{\Gamma}.$$

Рассматриваются обобщения этого результата.

Получены также другие результаты Скотта (Scott W. T., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 124—129) и Торнхейма

(РЖМат, 1956, 5065) относительно аппроксимации иррациональных чисел различного типа рациональными числами, доказанные ими при помощи теории цепных дробей. Б. В. Левин

7737. Укладка одинаковых сфер. Роджерс (The packing of equal spheres. Rogers C. A.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 32, 609—620 (англ.)

Говорят, что система одинаковых замкнутых сфер в n-мерном пространстве образует укладку, если ни одна пара сфер этой системы не имеет ни одной общей внутренней точки. Плотность ρ укладки определяется как предел, к которому стремится отношение объема части куба, покрытой сферами укладки, к объему всего куба при неограниченном увеличении его размеров. Пусть ρ_n — верхняя граница (обязательно достигаемая) плотностей тех укладок сфер в n-мерном пространстве, которые обладают плотностями. Рассматривая правильный симплекс n измерений, у которого расстояние между вершинами равно 2, и систему $n+1$ неперекрывающихся сфер радиуса 1, центры которых лежат в вершинах симплекса, автор устанавливает неравенство

$$\rho_n \leqslant \sigma_n, \qquad (1)$$

где σ_n есть отношение объема части симплекса, покрытой сферами системы, к объему всего симплекса. Неравенство (1) автор доказывает, комбинируя известные методы Блихфельда, Вороного, Сегре и Малера (Blichfeldt H. F., Trans. Amer. Math. Soc., 1914, 15, 227—235; Math. Ann., 1929, 101, 605—608; Voronoi G., J. reine und angew. Math., 1907, 133, 97—178; Segre B., Mahler K., Amer. Math. Monthly, 1944, 51, 261—270). σ_n, как граница для ρ_n, довольно близка к границе $(n+2)(1/\sqrt{2})^{n+2}$, указанной Блихфельдом, при этом

$$\sigma_n < (n+2)(1/\sqrt{2})^{n+2},$$

что улучшает результат Блихфельда.

В частном случае, когда $n=3$, неравенство (1) показывает, что плотность укладки одинаковых сфер не превышает

$$3\sqrt{2}\left(\arccos\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\pi\right) = 0{,}7797\ldots$$

Этот результат уточняет границу 0,828..., полученную для данного случая Ранкиным (Rankin R. A., Ann. Math., 1947, 48, 228 — 229). В заключение выводится асимптотическая формула

$$\sigma_n \sim \frac{(n+1)!\, e^{(n-1)/2}}{\sqrt{2}\,\Gamma(1+n/2)\,(4n)^{n/2}} \sim \frac{n}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n, \text{ когда } n \to +\infty.$$

Н. П. Соколов

7738. Целые точки в многомерных шарах. Вальфиш (Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Walfisz Arnold), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, 61, № 1, 11—31 (нем.)

Статья обзорного характера по теории целых точек в многомерных шарах. А. П. Лурсманашвили

7739. Целые решения двух совместных квадратных уравнений. Морделл (Integer solutions of two simultaneous quadratic equations. Mordell L. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 33 (англ.)

Рассматриваются квадратичные формы с целыми коэффициентами $f_n(x)$, $g_n(x)$ от n существенных переменных $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, не приводящиеся к формам с меньшим числом переменных, и указываются условия, при которых совместные уравнения $f_n(x) = 0$, $g_n(x) = 0$ имеют бесконечное множество целых ненулевых решений. Н. П. Соколов

7740. Заметка к одной недавней статье о линейных формах. Бейтман (Remark on a recent note on linear forms. Bateman P. T.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 7, 517—518 (англ.)

Пусть a, d, s — натуральные числа, $(a, d) = 1$. Для данного целого n рассмотрим возможность решения в целых x_i:

$$n = ax_0 + (a+d)x_1 + \ldots + (a+sd)x_s,\ x_0 \geqslant 0,\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots, x_s \geqslant 0. \qquad (1)$$

Дается упрощенное доказательство теоремы Робертса: Пусть $N = ga + (d-1)(a-1)$, где g — наименьшее целое, бо́льшее, чем $(a-2)/s$. Тогда, если $n > N$, то (1) разрешимо. Если $n \leqslant N-1$, то (1) неразрешимо. В. А. Голубев

7741. Один результат о линейных формах. У Чанцзю (Wu Changgu), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta. scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 33—36 (кит.; рез. англ.)

Доказывается теорема: Пусть $a_0, a_1 = a_0 + d, \ldots, a_s = a_0 + sd$ — натуральные числа и $a_0 \geqslant 2$, $d > 0$, $(a_0, a_1, \ldots, a_s) = 1$. Тогда линейная форма $F = a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_sx_s$ ($x_0, x_1, \ldots, x_s$ — неотрицательные целые числа) может представлять все натуральные числа, за исключением 19 указанных чисел. В. А. Голубев

7742. О диофантовом уравнении $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} = y_1^{b_1}y_2^{b_2}\ldots y_m^{b_m}$. Лу Вэнь-дуань (в подл. Лу Вень-туан) Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao, Ziran Kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 7—14 (кит.; рез. русск.)

А. Шинцель (РЖМат, 1956, 2753) нашел все решения в натуральных числах диофантова уравнения $x_1x_2\ldots x_n = t^k$, где k — натуральное число. Автор находит все решения в натуральных числах более общего уравнения

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} = y_1^{b_1}y_2^{b_2}\ldots y_m^{b_m}, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ — натуральные числа, при помощи следующей теоремы: Если $\alpha_k = \{c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kn}, d_{k1}, d_{k2}, \ldots, d_{km}\}$, $k = 1, 2, \ldots, s$ являются целыми неотрицательными решениями линейного уравнения

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_mv_m \qquad (2)$$

и каждое решение β уравнения (2) можно представить в виде $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_s\alpha_s$, где $l_1, l_2, \ldots, l_s$ — целые неотрицательные числа, то все решения в натуральных числах диофантова уравнения (1) находятся по формулам

$$x_i = t_1^{c_{1i}}t_2^{c_{2i}}\ldots t_s^{c_{si}},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_j = t_1^{d_{1j}}t_2^{d_{2j}}\ldots t_s^{d_{sj}},\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_s$ — любые натуральные числа.

Автор доказывает существование решений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, удовлетворяющих условию теоремы, и дает метод их нахождения. А. Н. Хованский

7743. О диофантовом уравнении $x^y y^y = z^z$. Шинцель (Sur l'équation diophantienne $x^y y^y = z^z$. Schinzel A.), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 81—83 (кит.; рез. франц.)

Хэ Чжао (Ko Chao, Chinese Math. J., 1940) доказал, что уравнение $x^y y^y = z^z$ не имеет решений в натуральных числах, больших 1, если $(x, y) = 1$. Автор доказывает, что в каждом решении этого уравнения в натуральных числах либо всякий простой делитель числа x является делителем числа y, либо всякий простой делитель числа y является делителем числа x. Остается открытым вопрос, должно ли иметь место по крайней мере одно из этих утверждений, либо они должны выполняться вместе. А. Н. Хованский

7744. Об уравнении $A^4+B^4+C^4+D^4=E^4$. Лич (On $A^4+B^4+C^4+D^4=E^4$. Leech John), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 4, 554—555 (англ.)

Эйлер предположил, что необходимо взять по меньшей мере 4 биквадрата натуральных чисел для того, чтобы их сумма была биквадратом. Это предложение доказал в 1911 г. Норри (Norrie), который нашел и наименьшее решение: $30^4+120^4+272^4+315^4=353^4$.

При помощи электронной машины EDSAC 2 (Cambridge) испытаны числа до $E=4303$. Дан список найденных восьми решений уравнения $A^4+B^4+C^4+D^4=E^4$ в натуральных числах. Указываются некоторые свойства чисел, удовлетворяющих данному уравнению.

В. А. Голубев

7745. О представлениях e-функций (mod r). I. Арифметические тождества. Коэн (Representations of even functions (mod r), I. Arithmetical identities. Cohen Eckford), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 401—421 (англ.)

Если функция $f(n, r)$ при целом $r>0$ и всех целых n удовлетворяет соотношению

$$f(n, r)=f((n, r), r),$$

где (n, r) — общий наибольший делитель n и r, то такую функцию назовем e-функцией (mod r). Работа посвящена изучению указанного класса функций. В основе ее лежит следующее предложение: необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(n, r)$ к классу e-функций (mod r) состоит в том, что $f(n, r)$ обладает разложением Фурье вида

$$f(n\ r)=\sum_{d|r} a(d, r)\, c(n, d),$$

$c(n, d)=\sum_{(x,r)=1} \exp(nx/r)$ — известная сумма Раманджана; и $a(d, r)=r^{-1}\sum_{\delta|r} f(r/\delta, r)\, c(r/d, \delta)$.

В работе по существу приведены многочисленные следствия этого утверждения, представляющие собой различного рода соотношения между арифметическими функциями. Автор отмечает, что многие из указанных им арифметических тождеств были получены ранее в работах Лиувилля, Кронекера, Н. П. Романова (Изв. АН СССР. Сер матем., 1946, **10**, 3—34) и др.

А. Ф. Лаврик

7746. О периодическом свойстве псевдослучайных последовательностей. Бофингер, Бофингер (On a periodic property of pseudorandom sequences. Bofinger Eve, Bofinger V. J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 3, 261—265 (англ.)

Последовательность $\{u_i\}$, образованная из вычетов чисел $a^i (i=0,1,2, \ldots)$ по модулю n, где $(n, a)=1$, оказывается периодической с периодом δ, где δ — показатель, которому принадлежит a по модулю n.

В первой части работы дается общий метод оценки для δ. Приводится ряд теорем, большей частью хорошо известных. Во второй части даны результаты нескольких известных испытаний случайностей, выполненных над цифрами, получающихся при указанном методе сравнения по mod n, при $a=3^{19}$ с целью определить последовательность максимального периода для $n=10^5$.

В. А. Голубев

7747. Упорядочение нескольких дублированных непрерывных дробей. Негоеску (Ordonarea unor fracţii continue duble. Negoescu N.), An. Ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I., 1957, 3, № 1-2, 11—17 (рум.; рез. русск., франц.)

Любое иррациональное число Θ может быть представлено в виде бесконечной непрерывной дроби $\Theta=[a_0, a_1, \ldots]$. Обозначим через $[a_1, \ldots, a_r, [a_{r+1}], a_{r+2}, \ldots]$ сумму $[a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots]+[0, a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1]$, называемую дублированной непрерывной дробью. Доказывается ряд неравенств и теорем. Главная теорема: Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, s — целые $\geqslant n$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные числа $>n$, B_0 обозначает $a_{r-1}, \ldots, a_1, [a_0], a_1, \ldots, a_{r-1}$, r — четное число. Тогда: $[\gamma, n, s, B_0, s-1, n, \delta]<[\alpha, n, s, B_0, s, n, \beta]$ и $[\gamma, n, s, B_0, s+1, n, \delta]>[\alpha, n, s, B_0, s, n, \beta]$, где α и $\beta<(n^2+1)^2 s+n(n^2+n+1)$.

В. А. Голубев

7748. Средние симметрические значения непрерывных дробей вида $\Theta_i=[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, i]$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$. Негоеску (Medii simetrice ale fracţiilor continue de forma $\Theta_i=[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, i]$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$. Negoescu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **10**, № 8, 482—491 (рум.; рез. франц., русск.)

Доказывается теорема: Если дано m непрерывных дробей вида $\Theta_i=[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1,i}]$ $(i=1,2,\ldots, m)$, то будем иметь: $m^{-1}\sum\Theta_i=[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \beta_{r+1}]$, где β_{r+1} удовлетворяет неравенствам

$$\frac{m\, a_{r+1,1}, \ldots, a_{r+1,m}}{\sum a_{r+1,1}, \ldots, a_{r+1,\, m-1}} \leqslant \beta_{r+1} \leqslant \frac{\sum a_{r+1,1}}{m}.$$

В. А. Голубев

7749. Несколько замечаний к статье Мак-Карти. Эрдёш (Some remarks on a paper of McCarthy. Erdös P.), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, № 2, 71—75 (англ.)

Доказываются две теоремы, продолжающие исследования Д. Х. Лемера (РЖМат, 1956, 2760) и Мак-Карти о равномерном распределении чисел, взаимно простых с n и не превышающих n.

В. А. Голубев

7750. О некоторых свойствах классов простых вычетов по модулю n. Якобсталь (Über einige Eigenschaften der primen Restklassen mod n. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1958, **31**, № 16, 6 S.) (нем.)

Доказывается ряд предложений для n четного и нечетного о существовании классов вычетов, взаимно простых с n или имеющих делитель d числа n.

В. А. Голубев

7751. Одна проблема теории чисел. Чэнь Чжун-му (Chen Chung-mu), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 63—72 (кит.; рез. англ.)

Пусть T — полная система вычетов по модулю m и S — подпоследовательность T. Назовем S сопровождающей последовательностью от T, если для каждого $a\in T$ сравнение $x+y\equiv a \pmod m$ имеет решение в S.

Доказаны теоремы: 1) Если $n>[m/2]$, то число сопровождающих последовательностей, содержащих n элементов из T, равно C_n^m; 2) Если $m=2n$, то число таких последовательностей

$$C_n^{2n}-n\,2^n+\sum_{t=0}^{n}\sum_{d|(t,\,n)}\Psi_t(d)\,nd^{-1}(d-1),$$

где

$$\Psi_t(d)=\sum_{d|d_1|(t,\,n)}\mu(d_1/d)\,C_{t/d_1}^{n/d_1},$$

3) Если m — нечетное, то число последовательностей с $(m-1)/2$ элементами T равно $C_{(m-1)/2}^m-2^{(m-1)/2}m+(m/2)\sum_{k=1}^{m-1}2^{(d-1)/2}$, где $d=(k, m)$.

В. А. Голубев

7752. О простых числах n^n+1. Серпинский (Sur les nombres premiers de la forme n^n+1. Sierpiński W.), Enseign. math., 1958, **4**, № 3, 211—212 (франц.)

Доказывается, что среди чисел, имеющих не более 300 000 цифр по десятичной системе счисления, существует только три простых числа вида n^n+1, где n — натуральное число, именно, 2, 5 и 257.

В. А. Голубев

7753. **Нечетные совершенные числа. Мак-Карти** (Odd perfect numbers. McCarthy Paul J.), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 43—47 (англ.)

Описывается все, что известно о нечетных совершенных числах: необходимые условия возможности их существования. Библ. 30 назв.

Примечание референта. Не указаны результаты И. С. Градштейна (Матем. сб., 1925, **32**, 476—510) о том, что не существует нечетных совершенных чисел, имеющих менее шести различных простых делителей. В. А. Голубев

7754. **Дополнение к статье «Об арифметической функции Штернека и ограничение делителей с отношением по модулю». Никол, Вандивер** (Supplement to a paper entitled «A Von Sterneck arithmetical function and restricted partitions with respect to a modulus». Nicol C. A., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, **44**, № 9, 917—918 (англ.)

Авторы назвали (РЖМат, 1955, 3606) выражение

$$\Phi(k, n) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n/(k, n))}\mu\left(\frac{n}{(k, n)}\right)$$

($\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, (k, n) — общий наибольший делитель чисел k и n) функцией Штернека. Так как было обнаружено, что числа $\Phi(k, n)$ рассматривались Дедекиндом в его известном приложении к книге Дирихле „Лекции по теории чисел“, то авторы будут называть числа $\Phi(k, n)$ числами Дедекинда. П. Н. Реморов

7755. **Заметка о пифагоровых числах. Хэ Чжао** (Ко Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 73—80 (кит.; рез. англ.)

Доказывается, что для пифагоровых чисел $a=2n+1$, $b=2n(n+1)$, $c=2n(n+1)+1$ диофантово уравнение $a^x+b^y=c^z$ не имеет целых положительных решений, кроме $x=y=z=2$, в следующих случаях: 1) $n\equiv 1$, 4, 5, 9, 10 (mod 12); 2) $n\equiv 1 \pmod 2$ и имеется простое число p и натуральное s такое, что $2n+1=p^s$; 3) $n\not\equiv 3 \pmod 4$ и имеется $p\equiv 3 \pmod 4$ такое, что $2n+1\equiv 0 \pmod p$. В. А. Голубев

7756. **Пифагоровы числа. Хан** (Pythagoreische Zahlen. Hahn Willi), Vermessungstechn. Rundschau, 1958, **20**, № 5, 159—169 (нем.)

7757. **Нормальные трехстепенные системы и вписанный четырехугольник с целыми сторонами и диагоналями. Глоден** (Système trigrade normal et quadrilatère inscrit à côtés et diagonales en nombres entiers. Gloden A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 29 (франц.)

7758. **Число целых неотрицательных решений уравнения $ax+by+cz=m$. Ткачев М. И.**, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1957, вып. 2, 249—256

7759. **О некоторых предложениях элементарной теории чисел. Якобсталь** (Über einige Sätze der elementaren Zahlentheorie. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1958, **31**, № 15, 8 S.) (нем.)

Доказываются теоремы относительно числа различных классов вычетов по данному модулю n при различных предположениях. В. А. Голубев

7760. **О вычислении квадратных чисел. Кюнель** (Zur Berechnung von Quadratzahlen. Kühnel U.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 5, 227 (нем.)

7761. **Об отношении между степенями целых чисел и арифметическими рядами. Зимон** (Über Beziehungen zwischen den Potenzen der ganzen Zahlen und den arithmetischen Reihen. Simon H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 5, 222—223 (нем.)

7762. **Об одной теореме Ферма. Мюшар** (Sur un théorème de Fermat. Muchart P.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 131—134 (франц.)

7763 К. **Целочисленные решения уравнений. Гельфонд** (Ganzzahlige Lösungen von Gleichungen. Gelfond Alexander O. München, R. Oldenbourg, 1954, 59 S., 7.80 DM) (нем.)

7764 К. **Фигурные числа в пифагоровой арифметике. Мишель** (Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne. Michel Paul-Henri. Alençon, Impr. alençonnaise, 1958, 24 p., ill., 165 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 30, 783 (франц.)

7765 К. **Проблема Ферма: обращение к математикам. Бовуа** (Problème de Fermat: Appel aux mathématiciens. Nouvelle éd. rev. et compl. Beauvois F.-Henri-A. Chartres, Impr. Durand, 1954, 24 p. 600 fr.) (франц.)

См. также: 7693

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7766. **Некоторые неравенства. Петров И. М.**, Сб. докл. Научн. студ. о-ва. Калининск. гос. пед. ин-т, 1957, сб. 1, 91—96

Элементарные задачи.

7767. **Об уравнениях четвертой степени. Никулин Н. А.**, Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), **29**, 254—260

7768. **К проблеме Рауса—Гурвица. Стрелицас** (Apie Rauso—Hurvico problemą. Strelicas S.), Уч. зап. Вильнюсск. ун-та. Сер. матем., физ. и хим. н., Mokslo darbai. Vilniaus univ. Matem., fiz., ir chem. mokslų ser., 1957, **7**, 33—36 (лит.; рез. русск.)

Доказано, что многочлен с действительными коэффициентами тогда и только тогда устойчив (является многочленом Гурвица), когда все его коэффициенты, а также все коэффициенты многочлена, корнями которого являются попарные суммы различных корней данного многочлена, представляют собой положительные числа. М. М. Постников

7769. **Об одном классе разрешимых уравнений. Курбатов В. А.**, Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 23—36

Пусть

$$x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n = 0 \qquad (1)$$

— неприводимое над числовым полем P уравнение простой степени n и $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — его корни. Устанавливается следующее достаточное условие разрешимости в радикалах этого уравнения: если какие-либо сопряженные величины $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n-1})$, не лежащие в поле P, связаны линейной зависимостью

$$C_0\varphi(x_0) + C_1\varphi(x_1) + \ldots + C_{n-1}\varphi(x_{n-1}) = 0, \qquad (2)$$

где C_i не все равны между собою и принадлежат полю $P(\varepsilon)$, ε — первообразный корень n-й степени из единицы, то уравнение (1) разрешимо в радикалах. Этой

теореме предшествуют две обширных леммы. В первой из них доказывается, что основными линейными зависимостями для $\varphi(x_k)$ являются

$$S_\alpha \equiv \varphi(x_0) + \varepsilon^\alpha \varphi(x_1) + \ldots + \varepsilon^{(n-1)\alpha}\varphi(x_{n-1}) = 0$$
$$(\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_i) \qquad (3)$$

и среди сумм

$$S_\beta \equiv \varphi(x_0) + \varepsilon^\beta \varphi(x_1) + \ldots + \varepsilon^{(n-1)\beta}\varphi(x_{n-1})$$
$$(\beta = \beta_1, \ldots, \beta_j;\ i + j = n) \qquad (4)$$

имеются отличные от нуля; при этом среди натуральных чисел α и β имеются несравнимые с нулем по mod n. Далее, через $R(n)$ обозначается группа классов вычетов по mod n, взаимно простых с n, которая разбивается на сумму двух непустых и непересекающихся подмножеств A и B. Как было показано автором (Матем. сб., 1949, 25, вып. 1) комплекс $AB^{-1} + BA^{-1}$ содержит все элементы группы $R(n)$, за исключением подгруппы H, называемой ядром сечения $[A, B]$. Вторая лемма утверждает, что если сумма

$$S_\lambda \equiv \varphi(x_0) + \varepsilon^\lambda \varphi(x_1) + \ldots + \varepsilon^{(n-1)\lambda}\varphi(x_{n-1})$$
$$(\lambda = 1, \ldots, n-1) \qquad (5)$$

равна нулю при $\lambda \in A$ и отлична от нуля при $\lambda \in B$, то для подстановок $\begin{pmatrix}\mu\\ \mu_k\end{pmatrix}$ группы Галуа уравнения (1) справедливы равенства:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{\mu_k - k\gamma} = 0, \qquad (6)$$

где γ пробегает все элементы группы $R(n)$, за исключением принадлежащих H.

На основе указанных лемм доказывается, что для подстановок $\begin{pmatrix}\mu\\ \mu_k\end{pmatrix}$ справедливы сравнения:

$$\mu_k \equiv ak + b \pmod n \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (7)$$

что и показывает разрешимость группы Галуа уравнения (1). А. Г. Школьник

7770. Линейная алгебра и линейные векторные пространства. Занен (Lineaire algebra en lineaire vectorruimten. Zaanen A. C.), Euclides (Nederl.), 1958, 34, № 4, 110—116 (гол.)

7771. Метод полигонов для графического исследования детерминантов. Применения к проблемам теоретической химии. Самюэль (Méthode des polygones, procédé d'étude graphique des déterminants. Applications aux problèmes de chimie théorique. Samuel Isaac), Cahiers phys., 1957, № 88, p. 441—488 (франц.)

Работа содержит практические методы раскрытия вековых детерминантов больших порядков, встречающихся в теоретической химии. Эти методы, по утверждению автора, значительно сокращают время, необходимое для вычисления) например, для детерминанта десятого порядка, содержащего 120 724 членов с 1 года до 1 недели).

Для симметрического определителя $D = |a_{ik}|_{i,k=1}^n$, в котором все диагональные элементы равны между собой (и равны y), автор выводит формулу

$$D = y^n - y^{n-2}\sum p_2 + y^{n-3}2\sum p_3 + y^{n-4}\left[\sum (p_2)_2 - 2\sum p_4\right] + y^{n-5}2\left[\sum p_5 - \sum p_3 p_2\right] + y^{n-6}\left[2\sum p_4 p_2 + 4\sum (p_3)_2 - 2\sum p_6 - \sum (p_2)_3\right] + y^{n-7}\left[2\sum p_7 + 2\sum p_3 (p_2)_2 - 2\sum p_5 p_2 - 4\sum p_4 p_3\right] + y^{n-8}\left[2\sum p_6 p_2 + 4\sum p_5 p_3 + 4\sum (p_4)_2 + 2\sum (p_2)_4 - 2\sum p_4 (p_2)_2 - 4\sum (p_3)_2 p_2 - 2\sum p_8\right] + y^{n-9}\left[2\sum p_9 + 2\sum p_5 (p_3)_2 + 4\sum p_4 p_3 p_2 + 8\sum (p_3)_3 - 4\sum p_6 p_3 - 2\sum p_7 p_2 - 4\sum p_3 p_4 - 2\sum p_3 (p_2)_3\right] + \ldots,$$

где p_2, p_3 — сокращенные обозначения для „циклических“ произведений вида $a_{ik}a_{kl}$, $a_{ik}a_{kl}a_{li}, \ldots$, причем в каждом произведении в правой части формулы сомножителями являются только дополнительные p (не имеющие общих индексов).

Для охвата всех таких циклических произведений предлагается геометрическая интерпретация: каждому диагональному элементу a_{ii} относится некоторая точка (i) плоскости, а каждому (отличному от нуля) недиагональному элементу a_{ik} — отрезок (ik) прямой, соединяющий точки (i) и (k). Циклическим произведениям соответствуют замкнутые полигоны. В вековых детерминантах, составленных для сложных органических молекул, точки (i) соответствуют атомам, а отрезки (ik) — связям между атомами. Рассматриваются приемы раскрытия более общих детерминантов (несимметрических, с неравными диагональными элементами), а также исследуется изменение величины детерминанта при изменении отдельных элементов. Приводится целый ряд теоретико-химических приложений. Ф. Р. Гантмахер

7772. Аксиоматическая теория кубических детерминантов. Гашпар (Eine axiomatische Theorie der kubischen Determinanten. Gáspár Julius), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 126—130 (нем.)

Аксиоматическое определение обычных детерминантов, данное автором (РЖМат, 1957, 102), распространяется с некоторыми видоизменениями и на кубические детерминанты. Пусть R — область целостности характеристики 0 и $A^{(3)}$ — кубическая матрица n-го порядка с элементами $a_{ikl} \in R$ $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$. Совокупность элементов матрицы $A^{(3)}$ с фиксированным значением одного из индексов i, k, l образует „плоское сечение“ по этому индексу, являющееся обычной матрицей n-го порядка. Автор приводит известное определение кубических детерминантов, порождаемых матрицей $A^{(3)}$ (J. Math. and Phys, 1930, 9, 47—71), и доказывает, что $\Phi(A^{(3)})$, где Φ — отображение множества $R_n^{(3)}$ кубических матриц порядка n в R, есть кубический детерминант, порождаемый матрицей $A^{(3)}$, если выполнены следующие условия:

$$\Phi(A^{(3)} + B^{(3)}) = \sum \Phi(C^{(3)}), \qquad (1)$$

где суммирование распространяется на все 2^n матриц $C^{(3)} = (c_{ikl})$ $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$, у которых каждое „плоское сечение“ по одному из индексов i, k, l совпадает с соответственным „плоским сечением“ по тому же индексу матрицы $A^{(3)} = (a_{ikl})$ или $B^{(3)} = (b_{ikl})$;

$$\Phi(M^{(2)}A^{(3)}) = |M^{(2)}|\,\Phi(A^{(3)}), \quad \Phi(A^{(3)}M^{(2)}) = \Phi(A^{(3)})\,|M^{(2)}|, \qquad (2)$$

где $|M^{(2)}|$ — детерминант (обычный) квадратной матрицы n-го порядка $M^{(2)}$ (над R);

$$\Phi(E^{(3)}) = 1, \qquad (3)$$

где $E^{(3)} = (e_{ikl})$ — кубическая матрица n-го порядка, у которой $e_{111} = e_{222} = \ldots = e_{nnn} = 1$, а все остальные элементы — нули.

Отмечается, что полученный результат может быть обобщен на случай p-мерных $(p > 3)$ детерминантов.

Н. П. Соколов

7773. Матричные уравнения, содержащие вспомогательную единичную матрицу. Маратхе (Some matrix equations involving the auxiliary unit matrix. Marathe C. R.), J. Univ. Bombay, 1957, **26**, № 3, A-39—A-47 (англ.)

Исследуется матричное уравнение $UX - XU = D$, в котором D — диагональная матрица, а U — нильпотентная жорданова клетка или степень такой клетки. Дается условие существования и структура общего решения.

Ф. Р. Гантмахер

7774. Некоторые свойства специальной квадратной матрицы. Маркович (Quelques propriétés d'une matrice carrée spéciale. Markovitch D.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3-4, 45—51 (франц.; рез. серб.)

Устанавливается тождество

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^n =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0(n) & a_1(n) & \dots & a_{m-1}(n) \\ a_0(n-1) & a_1(n-1) & \dots & a_{m-1}(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(n-m+1) & a_1(n-m+1) & \dots & a_{m-1}(n-m+1) \end{bmatrix} = X,$$

где элементы матрицы-степени определяются из рекуррентных соотношений

$$a_\nu(k+1) = a_0(k)\, a_\nu + a_{\nu+1}(k),\ a_\nu(-p) = \begin{cases} 1 & (p = \nu) \\ 0 & (p \neq \nu) \end{cases}$$

$(\nu = 0, 1, \dots, m+1;\quad k = 0,1,2,\dots;\quad p = 0, 1, \dots, m-2).$

Выясняется, что каждый корень x_0 уравнения

$$1 = a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{m-1} x^m$$

является общим корнем следующих уравнений:

$$1 = x^k [a_0(k) + a_1(k)\, x + \dots + a_{m-1}(k)\, x^{m-1}] \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

и что матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & P_{m-1} & \dots & P_1 \\ x_0 & x_0 P_{m-1} & \dots & x_0 P_1 \\ x_0^{m-1} & x_0^{m-1} P_{m-1} & \dots & x_0^{m-1} P_1 \end{bmatrix} \left(P_{m-k} = \sum_{\nu=k}^{m-1} a_\nu\, x_0^{\nu+1-k} \right)$$

является пределом матрицы (X) при $n \to \infty$.

Ф. Р. Гантмахер

7775. Характеристические корни произведения двух матриц. Хан (The characteristic roots of the product of two matrices. Khan N. A.), Proc. Indian Acad. Sci., 1958, **A47**, № 6, 348—356 (англ.)

Устанавливаются различные оценки для вещественной и мнимой частей характеристических чисел произведения AB двух комплексных перестановочных между собой матриц A и B с помощью характеристических чисел эрмитовых компонент:

$$H_A = \frac{1}{2}(A + A^*),\quad K_A = \frac{1}{2i}(A - A^*),\quad H_B = \frac{1}{2}(B + B^*),$$

$$K_B = \frac{1}{2i}(B - B^*).$$

Так, например, в предположении, что H_B и K_B — положительные, по крайней мере, полуопределенные матрицы, а H_A и K_A — неопределенные матрицы, устанавливаются неравенства

$$\operatorname{Re} c(AB) \leqslant c_\mu(H_A)\, c_\mu(H_B) - c_\mu(K_A)\, c_m(K_B),$$
$$\operatorname{Im} c(AB) \leqslant c_\mu(H_A)\, c_\mu(K_B) - c_\mu(K_A)\, c_\mu(H_B)$$

($c(A)$ обозначает произвольное характеристическое число матрицы A, а $c_\mu(H)$ и $c_m(H)$ — соответственно наибольшее и наименьшее характеристическое число эрмитовой матрицы H).

Аналогичные неравенства приводятся для случаев, когда H_A, H_B, K_A, K_B являются положительно полуопределенными или H_A, H_B — полуопределенными одного знака, а K_A, K_B — другого.

Ф. Р. Гантмахер

7776. Характеристические числа произведения некоторых матриц. Хан (Characteristic roots of the product of certain matrices. Khan N. A.), Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A46**, № 5, 367—370 (англ.)

Устанавливаются следующие результаты:

1. Если A и B — эрмитовы матрицы, то справедливо неравенство

$$|c(AB)| \leqslant [\max |c(A)|]\,[\max |c(B)|].$$

2. Если $AB = BA$ и одна из матриц (например, A) эрмитова, то

$$\operatorname{Re} c(AB) \leqslant [\max |c(A)|] \left[\max \left| c\left(\frac{B + B^*}{2}\right) \right| \right],$$

$$\operatorname{Im} c(AB) \leqslant [\max |c(A)|] \left[\max \left| c\left(\frac{B - B^*}{2i}\right) \right| \right]$$

(Этот результат легко распространяется на случай, когда A — косоэрмитова матрица).

3. Если A и B — эрмитовы матрицы, то

$$[\min |c(A)|]\,[\min |c(B)|] \leqslant |c(AB)|.$$

4. Если $AB = BA$, A — эрмитова матрица и все характеристические числа матрицы $A(B + B^*)/2$ положительны, то

$$[\min |c(A)|] \left[\min \left| c\left(\frac{B + B^*}{2}\right) \right| \right] \leqslant \operatorname{Re} c(AB).$$

5. Если $AB = BA$, A — эрмитова матрица и все характеристические числа матрицы $A(B - B^*)/2i$ положительны, то

$$[\min |c(A)|] \left[\min \left| c\left(\frac{B - B^*}{2i}\right) \right| \right] \leqslant \operatorname{Im} c(AB).$$

Через $c(X)$ автор обозначает произвольное характеристическое число матрицы X.

А. Ф. Голубчиков

7777. Собственные значения и минимальные многочлены симметрических матриц над полями. Краковский (Eigenwerte und Minimalpolynome symmetrischer Matrizen in kommutativen Körpern. Krakowski Fred), Comment. math. helv., 1958, **32**, № 3, 224—240 (нем.)

Изучаются те элементы алгебраически замкнутого расширения Ω данного поля K, которые являются характеристическими числами симметрических K-матриц. Доказано, что эти числа образуют поле Λ, замкнутое в том смысле, что оно содержит все характеристические числа симметрических Λ-матриц. Далее доказано: Если поле K формально действительно (т. е. -1 не является суммой квадратов элементов из K), то элемент λ из Ω тогда и только тогда является характеристическим числом симметрической K-матрицы, когда λ принадлежит ко всем формально действительным расширениям поля K внутри Ω (т. е. вполне действительно). Если же K не является формально действительным, то всякий элемент из Ω является таким характеристическим числом. В частности, алгебраическое число λ тогда и только тогда будет собственным значением симметрической матрицы с рациональными элементами, когда λ и все ему сопряжен-

ные числа — действительные. Для полей характеристики $p \neq 2$ минимальные многочлены симметрических K-матриц совпадают с многочленами, имеющими простые вполне действительные корни, а для не формально действительного поля K минимальными многочленами симметрических K-матриц могут быть любые многочлены над K. Для характеристики $p = 2$ первое утверждение верно, а второе — нет. Рассматриваются аналогичные вопросы о кососимметрических и ортогональных матрицах. Автору неизвестно, можно ли дать аналогичную характеристику собственных значений целочисленных симметрических матриц. И. В. Проскуряков

7778. О построении ортогональной симметрической матрицы. Зелмер (Despre construirea unei matrici ortogonale şi simetrice. Zelmer Violeta), An. ştiinţ. Univ. Iaşi., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 157—159 (рум.; рез. русск., франц.)

Излагаются известные свойства вещественной матрицы которая является одновременно симметрической и ортогональной. Ф. Р. Гантмахер

7779. О результате Шермана относительно дважды стохастических матриц. Шрейбер (On a result of S. Sherman concerning doubly stochastic matrices. Schreiber Shmuel), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 350—353 (англ.)

Пусть даны дважды стохастические (д. с.) матрицы P_1 и P_3 одного и того же порядка (РЖМат, 1956, 2793). По определению $P_1 < P_3$ тогда и только тогда, когда существует такая д. с. матрица P_2, что $P_1 = P_2P_3$. Дается простое доказательство теоремы Какутани — Шермана. Пусть P_1 и P_3 — д. с. матрицы, а матрица P_3 — неособенная. Если для любого действительного вектора a имеет место $P_1a < P_3a$, то $P_1 < P_3$.

Имеются опечатки. Х. Р. Сулейманова

7780. О полуупорядоченной матричной алгебре. Ленд ерс (Over de halfgeordende matrix-algebra. Leenders J. H.), Simon Stevin, 1958, **32**, № 3, 102—141 (гол.)

Пусть $A = (a_{ij}) \geqslant 0$, если $a_{ij} \geqslant 0$ для всех i, j. Исследуется алгебра матриц, полуупорядоченная описанным образом. Большая часть результатов элементарна, хотя привлекаются понятия из многих областей математики (теория структур, теория банаховых пространств и т. п.). Некоторые теоремы доказываются для пространства строк, полуупорядоченного условием $(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (0, \ldots, 0)$, если $a_i \geqslant 0$ для всех i.

Г. Зегелинг, Л. А. Скорняков

7781 К. Линейная алгебра. Грёйб (Lineare Algebra. Graeub Werner. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958, X, 219 S., ill., 39.—DM) Dtsch. National bibliogr., 1958, **A**, № 33, 2380 (нем.)

ГРУППЫ

7782. О функциях Шура. Фарахат (On Schur functions. Farahat H. K.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 32, 621—630 (англ.)

Пусть $h_1, h_2, \ldots$ — неопределенные (истолковываемые как коэффициенты ряда $f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i x^i$) и

$$(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \quad (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0)$$—разбиение натурального числа n на положительные слагаемые. Автор называет функцией Шура (или S-функцией), соответствующей разбиению (λ), определитель $\{\lambda\}_f = |h_{\lambda_i + j - i}|$ (число строк и число столбцов $= k$). Доказывается неприводимость многочлена, равного этому определителю, относительно неопределенных h_i. В дальнейшем выводятся формулы, дающие связь между функциями Шура, относящимися к различным рядам.

В. К. Туркин

7783. Реализация представлений конечных нильпотентных групп. Рокетт (Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotenter Gruppen. Roquette Peter), Arch. Math., 1958, **9**, № 4, 241—250 (нем.)

Пусть G — конечная нильпотентная группа порядка g, D — любое неприводимое представление G с помощью матриц над полем комплексных чисел, χ — характер D. Через $Q(\chi)$ обозначено поле рациональных чисел Q, с присоединением всех $\chi(a)$, где $a \in G$.

Доказана теорема: Для нечетного g (четного g) существует представление группы G, эквивалентное D, над полем $Q(\chi)$ (соответственно $Q(\chi, \sqrt{-1})$).

Доказательство этой теоремы, ранее сформулированной Брауэром (без публикаций), неявно содержится в работе Шиллинга (Schilling, J. reine und angew. Math., 1936, **174**, 188). М. Гриндлингер, Е. И. Пятницкая

7784. О мономинальных представлениях групп. Берман С. Д., Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та, 1958, № 2, 21

7785. Один специальный класс p-групп. Блэкберн (A special class of p-groups. Blackburn N.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 13 (англ.)

Рассматриваются p-группы, у которых фактор-группа по коммутанту является элементарной абелевой группой и все остальные факторы нижнего центрального ряда имеют порядок p. Изучение таких групп сводится к p-группам максимального класса, т. е. порядка p^n и класса $n-1$. Б. И. Плоткин

7786. О продолжаемости факторных систем. Кохендёрфер (Über die Fortsetzbarkeit von Faktorensystemen. Kochendörffer Rudolf), Math. Nachr., 1958, **18**, № 1-6, 173—177 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная абелева группа, $\mathfrak{g}$ — произвольная группа. Расширением группы $\mathfrak{A}$ посредством $\mathfrak{g}$ называется группа $\mathfrak{G} = \sum_{g \in \mathfrak{g}} \mathfrak{A} R_g (R_1 = 1)$. Группа $\mathfrak{G}$ определяется, во-первых, заданием автоморфизма $A \to A^g = R_g A R_g^{-1}$ $(A \in \mathfrak{A})$, дающего гомоморфное отображение группы $\mathfrak{g}$ на подгруппу $\Gamma(\mathfrak{g})$ группы автоморфизмов группы $\mathfrak{A}$, и, во-вторых, совокупностью множителей $C_{g,h}$ в равенствах $R_g R_h = C_{g,h} R_{gh}$ $(g, h \in \mathfrak{g}; C_{g,h} \in \mathfrak{A})$. Эту последнюю совокупность автор называет $\mathfrak{g}$-факторной системой. Факторные системы $\{C_{g,h}\}$ и $\{C'_{g,h}\}$ называются ассоциированными, если они соответствуют совокупностям вычетов $\{R_g\}$ и $\{R'_g\} = \{A_g R_g\}$, $A_g \in \mathfrak{A}$. Совокупность ассоциированных факторных систем называется классом факторных систем. Классы факторных систем составляют относительно умножения абелеву группу.

Пусть $\mathfrak{u}$ — подгруппа группы $\mathfrak{g}$ конечного индекса, взаимно простого с порядком группы $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{U}$ — расширение $\mathfrak{A}$ посредством $\mathfrak{u}$; соответствующие этому расширению факторные системы называются $\mathfrak{u}$-факторными системами; $\mathfrak{u}$ — факторная система называется продолжаемой до некоторой $\mathfrak{g}$-факторной системы, если она содержится в этой последней. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если в разложении $\mathfrak{g}$ по модулю $\mathfrak{u}$ совокупность вычетов $\mathfrak{r}$ может быть выбрана таким образом, что $v\mathfrak{r}v^{-1} = \mathfrak{r}$ для любого $v \in \mathfrak{u}$ и, кроме того: $\Gamma(\mathfrak{g}) = 1$, то всякая $\mathfrak{u}$-факторная система продолжаема до некоторой $\mathfrak{g}$-факторной системы.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{u}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{u}$-факторная система $\{C_{u,v}\}$ продолжаема до некоторой $\mathfrak{g}$-факторной системы в том и только в том случае, если она ассоциирована со всеми факторными системами $\{B^2_{u,v}\} = \{C^2_{r^{-1}ur, r^{-1}vr}\}$ $(r \in \mathfrak{r})$. В. К. Туркин

7787. Об одном классе двухступенных групп. Сесекин Н. Ф., Широковская О. С., Матем. сб.; 1958, **46**, № 2, 133—142

Неабелева группа G называется $Б$-группой, если она отлична от своего коммутанта, а все ее нормальные делители коммутативны. Фактор-группа $Б$-группы по ее коммутанту является либо примарной циклической группой, либо прямым произведением двух примарных циклических групп. В первом случае группа называется $Б_1$-группой, а во втором — $Б_2$-группой.

$Б_2$-группы сводятся к конечным p-группам, все подгруппы которых коммутативны. Большая часть работы посвящена выяснению строения $Б_1$-групп. Доказано также, что группа, отличная от своего коммутанта, все подгруппы которой коммутативны, либо сама коммутативна, либо является конечной группой Миллера—Морено.

Б. И. Плоткин

7788. К теории групп. I. Локально конечные группы. Шпехт (Beiträge zur Gruppentheorie. I. Lokalendliche Gruppen. Specht Wilhelm), Math. Nachr. 1958, **18**, № 1-6, 39—56 (нем.)

Рассматриваются следующие классы групп: 1) метаконечные группы — группы, обладающие возрастающим нормальным рядом с конечными факторами; 2) слабо метаконечные группы — группы, обладающие возрастающим рядом подгрупп $[H_\alpha]: H_0 = E$, $H_\alpha \subset H_{\alpha+1}$, $H_\gamma = G$ и для предельных α $H_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} H_\beta$ таким, что H_α имеет конечный индекс в $H_{\alpha+1}$ при любом $\alpha<\gamma$; 3) I-метаконечные группы — группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами.

Очевидно, что слабо метаконечные группы локально конечны. Вопрос о справедливости обратного утверждения не решен и представляет значительный интерес.

Рассмотрены простейшие свойства приведенных классов групп, а также построены примеры групп со следующими свойствами: 1) слабо метаконечной и не метаконечной группы, 2) метаконечной и не I-метаконечной, 3) I-метаконечной и не локально нормальной группы.

Б. И Плоткин

7789. Об одной специальной последовательности нормальных делителей. Шик (Über eine spezielle Reihe von Normalteilern. Schiek Helmut), Arch. Math., 1958, **9**, № 3, 236—240 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}[x]$ — свободное произведение группы $\mathfrak{G}$ и свободной циклической группы $\{x\}$ с образующим x. Через G_1 обозначается нормальный делитель в $\mathfrak{G}[x]$, порожденный подгруппой $\mathfrak{G}$, и через G_{i+1}—нормальный делитель в G_i, также порожденный подгруппой $\mathfrak{G}$. Тогда $\cap_i G_i = \mathfrak{G}$. Вводится обозначение $K_{i+1} = [\mathfrak{G}, G_i]$. Очевидно, что $G_{i+1} = \mathfrak{G}K_{i+1}$. Доказывается, что $\cap_i K_i = \mathfrak{G}'$, где $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

Б. И. Плоткин

7790. Продолжение групповых гомоморфизмов. Лонстра (Fortsetzung von Gruppenhomomorphismen. Loonstra F.), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 3-4, 192—202 (нем.)

Пусть A', A, Q и B', B, R — группы с такими гомоморфизмами k, f, f' и h, d, d', что выполняются условия:

$K(A)=A'$, $f(Q)=A$; $f'(Q)=A'$; $h(B)=B'$, $d(R)=B$, $d'(R)=B'$ $f'=kf$, $d'=hd$. Через $G(A, B)$ обозначается расширение группы A с помощью группы B. Доказывается, что существуют такие расширения $G'=G(A', B')$, $G=G(A, B)$, $S=G(Q, R)$ и такие гомоморфизмы g, t, t', что $g(G)=G'$, $t(S)=G$, $t'(S)=G'$, $t'=gt$ и g индуцирует k и h, t индуцирует f и d, t' индуцирует f' и d'.

Для случая, когда A', A и Q — абелевы группы, дается описание всех таких расширений.

Б. И. Плоткин

7791. О свободных группах и их автоморфизмах. Рапапорт (On free groups and their automorphisms. Rapaport Elvira Strasser), Acta math., 1958, **99**, № 1-2, 139—163 (англ.)

Пусть G— свободная группа конечного ранга, a, b, c, z— факсированные подмножества ее базы и d — элемент базы или обратный элементу базы, причем подмножества a, b, c, d^e ($e=\pm 1$) различны и (a, b, c, z) совпадает с базой. Тогда автоморфизм $T\{a\to ad; b\to db; c\to dcd; z\to z\}$, где $\bar{d}$ — обратный элементу d, насывается T-преобразованием для каждого разбиения базы указанного вида.

Привлекая сложные топологические средства, Уайтхед (Whitehead J. H. C., Ann. Math., 1936, **37**, 782—800) показал, что если сумма длин данной конечной совокупности слов может быть уменьшена использованием некоторых автоморфизмов, то она может быть уменьшена использованием только T-преобразований.

Статья содержит алгебраическое доказательство этой теоремы Уайтхеда, а также некоторые обобщения и приложения.

С. Р. Когаловский

7792. Теория свободных WR_π-групп. Бомслаг (A theory of free WR_π-groups. Baumslag G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 12—13 (англ.)

Группа G называется WR_π-группой, если извлечение корней p-й степени в G всегда возможно и однозначно для p, принадлежащих некоторому множеству простых чисел π. Расширение локально нильпотентной WR_π-группы с помощью периодической WR_π-группы снова является WR_π-группой.

Утверждается, что можно определить свободные WR_π-группы и свободные WR_π-произведения WR_π-групп. Соответствующих определений и доказательств в сообщении нет.

Б. И. Плоткин

7793. Сферические гармоники, имеющие симметрию группы икосаэдра. Коан (The spherical harmonics with the symmetry of the icosahedral group. Cohan Norah V.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 1, 28—38 (англ.)

Указан вид сферических функций, преобразующих согласно заданному неприводимому представлению группы икосаэдра и принадлежащих представлению веса $l \leqslant 14$ группы вращений пространства. Приведены подробные таблицы, позволяющие находить коэффициенты разложения таких функций по матричным элементам неприводимых представлений группы вращений.

Н. Я. Виленкин

7794. Представления группы вращений n-мерного евклидова пространства сферическими векторными полями. Кириллов А. А., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 538—541

Описание всех неприводимых унитарных представлений группы вращений n-мерного евклидова пространства, реализующихся в сферических векторных полях. Дана таблица, указывающая схему представлений вихревыми, градиентами векторными полями и сферическими функциями на сфере.

Н. Я. Виленкин

7795. К классификации простых групп Ли. Фрёйденталь (Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 4, 379—383; Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 379—383 (нем.)

Дается простой метод для нахождения всех π-систем (Дынкин Е. Б., Успехи матем. наук, 1947, **2**, № 4, 59—128) векторов евклидова пространства.

А. Л. Онищик

7796. О компактных группах Ли, действующих на компактном многообразии. Браконье (Sur les groupes de Lie compacts opérant dans une variété compacte. Braconnier Jean), Sémin. Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 163-1—163-12 (франц.)

Изложение работ Мостова (РЖМат, 1958, 7580, 7582) и Флойда (РЖМат, 1958, 7581). Основной результат этих работ состоит в том, что если компактная группа Ли G действует на компактном многообразии X, то сре-

ди стационарных подгрупп различных точек многообразия X существует лишь конечное число подгрупп, попарно не сопряженных в группе G. А. Л. Онищик

7797. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. VIII. Дьёдонне (Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p>0$. (VIII). Dieudonné Jean), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 740—772 (англ.)

Предыдущие части см. РЖМат, 1956, 4362, 4364—4366; 1957, 8483; 1959, 4508, 4509.

Рассматривается теория расширений и когомологий для формальных групп Ли над алгебраически замкнутым полем. Доказывается, что в случае разрешимости таких групп максимальные бесконечно делимые подгруппы их центров являются квазипрямыми множителями в группах. Если же в центре разрешимой группы G не содержится нетривиальных бесконечно делимых абелевых подгрупп, то группа G оказывается изогенной с полупрямым произведением торов и их максимальных унипотентных подгрупп, рассмотренных в одной из предыдущих работ автора.

Полученные результаты применяются для изучения двумерных формальных групп Ли над алгебраически замкнутыми полями. В. М. Глушков

7798. О параметрическом представлении Кели. Дьёдонне (Sur la représentation paramétrique de Cayley. Dieudonné Jean), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 39—41 (франц.)

Указывается обобщение известной формулы Кели, пригодное для полей любой характеристики; из этого обобщения вытекает, что классические группы являются и в случае поля характеристики 2 рациональными алгебраическими многообразиями. В. В. Морозов

7799. Характеристики метризационных колец с помощью теории r-идеалов. Обер (Caractérisations des anneaux de valuation à l'aide de la théorie des r-idéaux. Aubert Karl Egil), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris. 1956—1957, 10. Paris, 1958, 10-1—10-8 (франц.)

Основное содержание статьи составляет повторение результатов, ранее опубликованных автором (РЖМат, 1955, 5651). Определяется r-умножение r-идеалов группы (знак умножения O_r): $A_r O_r B_r = (AB)_r$. Доказано, что направленная частично упорядоченная абелева группа изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел тогда и только тогда, когда ее S_v-идеалы образуют группу относительно S_v-умножения. Отсюда в качестве следствия получается, что область целостности является метризационным кольцом с действительными значениями нормы тогда и только тогда, когда ее ненулевые S_v-идеалы образуют группу относительно S_v-умножения (или соответственно S-идеалы образуют группу относительно S-умножения).

Е. П. Шимбирева

7800. Функциональное представление частично упорядоченных групп. Флейшер (Functional representation of partially ordered groups. Fleischer Isidore), Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 260—263 (англ.)

Фань Цюй (Ky Fan, Ann. Math., 1950, **51**, № 2,409—427) характеризовал множество всех непрерывных вещественных функций, определенных на компактном пространстве, как частично упорядоченную абелеву группу. При этом он не пользовался понятиями теории структур. В реферируемой статье решена та же проблема, но с применением структурных понятий, отчего, как замечает сам автор, решение получается короче и проще; вместе с тем достигается некоторое обобщение результатов Фань Цюя. А. А. Виноградов

7801. О дуальных полугруппах. Шварц (On dual semigroups. Schwarz S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 23—24 (англ.)

Сформулированы некоторые теоремы о дуальных полугруппах, определяемых аналогично дуальным кольцам (см., например, М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., ГИТТЛ, 1956). Л. М. Глускин

7802. Стракты на одномерной сфере. Круле (Structs on the 1-sphere. Krule I. S.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 3, 405—413 (англ.)

Пусть L — монотонный непрерывный стракт (РЖМат. 1957, 213) континуума X. $L(X)=X$ тогда и только тогда, когда каждый плотный L-идеал, содержащий K_L, связен. Если K_L связен, $k\in K_L$ и $\mathrm{int}(L_{\bar{k}})\neq\emptyset$, то $K_L=L_k$. Пусть X — простая замкнутая кривая и $L(X)=X$. Тогда: 1) Из $k\in K_L$ следует $L_k=k$ или $L_k=K_L$, 2) Если $X\neq K_L$, то существует единственный L-максимальный элемент g; если C_1 и C_2 — компоненты $X\setminus(g\cup K_L)$ и $x\in C_1\cup C_2$, то $L_x=x$ или L_x состоит точно из двух точек $\xi_1\in C_1$ и $\xi_2\in C_2$. Приведены и другие теоремы о страктах одномерных пространств. В частности, получена характеристика некоторого класса кривых, являющихся границами, при помощи монотонных непрерывных страктов. Л. М. Глускин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

7803. Два элементарных доказательства, касающихся простых квадратичных полей. Эннола (Two elementary proofs concerning simple quadratic fields. Ennola Veikko), Nord, mat. tidskr., 1958, **6**, № 3, 114—117 (англ.)

7804. Определение полей с заданным подполем. Годуин (The determination of fields with a given subfield. Godwin H. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 29 (англ.)

Краткое содержание доклада, посвященного построению конечных алгебраических полей, имеющих заданное подполе, дискриминанты которых не превосходят заданной границы. Б. М. Уразбаев

7805. Задача погружения для распадающихся расширений. Шафаревич И. Р., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1217—1219

Сообщается следующий результат: Пусть k — поле алгебраических чисел, являющееся конечным нормальным расширением поля Ω с группой Галуа F. Если $G\supseteq F$ — группа, которая представляется в виде полупрямого произведения $G=N\cdot F$, где N — нильпотентный нормальный делитель группы G, то существует такое нормальное расширение K/Ω, что G есть группа Галуа K над Ω, а N — группа Галуа K над k.

Частными случаями этой теоремы являются полученные различными авторами результаты о задаче погружения и задаче построения полей с заданной группой Галуа. В частности, из нее вытекает доказанное ранее автором другим путем существование поля алгебраических чисел с произвольной разрешимой группой Галуа, так как всякая разрешимая группа является факторгруппой группы G, получающейся цепочкой последовательных расщепляемых расширений с нильпотентными ядрами.

Отмечается, что для доказательства теоремы используются соображения, близкие к тем, которые применялись в предыдущих работах автора (РЖМат, 1956, 243, 244; 1957, 186), но при этом понятие шольцева поля заменяется понятием относительно шольцева поля.

С. Д. Берман

7806. О группах Галуа локальных полей. Ивасава (On Galois groups of local fields. Iwasawa Kenkichi), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 448—469 (англ.)

Пусть p — простое число, Ω_p — поле p-адических чисел, Ω — алгебраическое замыкание поля Ω_p, $k \subset \Omega$ — конечное расширение поля Ω_p, V — композит в Ω всех конечных расширений поля k с полным ветвлением, T — композит в Ω всех конечных расширений поля k без ветвления, а $G(\Omega/k)$ — группа Галуа поля Ω над k.

Предположим, что I — произвольная группа, а $\{N_\delta\}$ — некоторое семейство нормальных делителей конечного индекса группы I. Фактор-группу I/N, где $N = \bigcap_\delta N_\delta$, можно превратить в ограниченную в себе топологическую группу, если принять множества $\{N_\delta/N\}$ за фундаментальную систему окрестностей единицы группы. Пополнение $\overline{I}$ этой группы будет тогда вполне несвязной бикомпактной группой.

Если семейство $\{N_\delta\}$ состоит из всех нормальных делителей группы I, то $\overline{I}$ называется тотальным пополнением группы I, а в случае, когда множество $\{N_\delta\}$ — совокупность всех нормальных делителей группы I, индексы которых суть степени p, $\overline{I}$ называется p-пополнением группы I.

Основным результатом работы является следующая теорема: Группа Галуа $G(V/k)$ изоморфна тотальному пополнению Γ группы I, которая задается двумя образующими элементами α, β и определяющим соотношением $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^q$, где q — число классов вычетов поля k по простому идеалу поля, делящему p. Если σ и τ — элементы группы Γ, соответствующие элементам $\alpha, \beta \in I$, то существует такой изоморфизм ψ группы Γ на $G(V/k)$, что $\psi(\sigma)$ индуцирует автоморфизм Фробениуса поля T над k, а $\psi(\tau)$ порождает всюду плотную подгруппу группы $G(V/T)$. Группа $G(\Omega/V)$ изоморфна p-пополнению свободной группы со счетным числом образующих. Группа $G(\Omega/V)$ является замкнутым нормальным делителем группы $G(\Omega/k)$ и расширение $G(\Omega/k)$ группы $G(\Omega/v)$ расщепляемо. С. Д. Берман

7807. Конечные некоммутативные тела. Алберт (Finite noncommutative division algebras. Albert A. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 928—932 (англ.)

Пусть F — конечное поле порядка $q > 2$, K — его расширение степени $n > 2$ и c — такой элемент поля K, что $c \neq -1$ и $c \neq a^{q-1}$ ни для какого элемента $a \in K$ (существование таких элементов доказывается). Пусть, далее, отображения $x \to x'$ и $x \to x''$ обратны соответственно отображениям $x \to x - x^q c$ и $x \to x^q - xc$ поля K на себя.

Доказывается, что множество элементов поля K относительно сложения и операции $x \cdot y = x'(y'')^q - cy''(x')^q$ является некоммутативным (а значит, и неассоциативным) телом.

В случае, когда $q = 2^m$ и mn нечетно, этот результат дает новые примеры недезарговых конечных проективных плоскостей. А. И. Ширшов

7808. Коммутативные подпрямо неразложимые кольца. Дивинский (Commutative subdirectly irreducible rings. Divinsky Nathan), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 642—648 (англ.)

Рассматриваются подпрямо неразложимые кольца, т. е. кольца, у которых пересечение всех ненулевых идеалов есть ненулевой идеал. Доказывается, что всякое коммутативное подпрямо неразложимое кольцо является либо полем, либо ограничено своим максимальным нильидеалом N, т. е. $N^* \subseteq N$, где N^* — аннулятор идеала N. Устанавливается также, что если коммутативное подпрямо неразложимое кольцо A содержит как нильпотентные элементы, так и элементы, не являющиеся делителями нуля, и если в A выполнено либо условие минимальности, либо условие максимальности, то кольцо A имеет единицу. Строится пример коммутативного подпрямо неразложимого кольца, у которого каждый элемент является делителем нуля, но которое не будет нильпотентным. Приводится также пример коммутативного подпрямо неразложимого кольца без единицы, содержащего как нильпотентные элементы, так и элементы, не являющиеся делителями нуля. Показывается, что всякое подпрямо неразложимое кольцо без единицы может быть вложено в подпрямо неразложимое кольцо с единицей. В. А. Андрунакиевич

7809. Некоммутативные конечные кольца второй ступени. Редеи (Die zweistufig nichtkommutativen endlichen Ringe. Rédei L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 22—23 (нем.)

Конечные коммутативные кольца образуют класс R_0. К классу R_n относятся конечные кольца, все собственные подкольца которых (но не они сами!) принадлежат какому-либо классу R_k, $k < n$. Эти кольца называются кольцами n-й ступени. Результаты не сформулированы. Л. А. Скорняков

7810. О размерностях модулей и алгебр. VIII. Эйленберг, Розенберг, Зелинский (On the dimension of modules and algebras, VIII. Dimension of tensor products. Eilenberg Samuel, Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 71—93 (англ.)

Устанавливается ряд неравенств, связывающих различные размерности алгебр с размерностями их тензорного произведения. Рассматриваются случаи, когда эти неравенства переходят в равенства (кольца мат иц, треугольных матриц и многочленов). Доказательства проводятся в основном методом спектральных последовательностей. М. М. Постников

7811. Теория нетеровых колец, полугрупп и модулей в некоммутативном случае. Лесьёр (Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. Lesieur L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 19 (франц.)

7812. Полупервичные кольца. Джонсон (Semi-prime rings. Johnson R. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 3, 375—388 (англ.)

Кольцо R называется полупервичным, если пересечение всех его простых идеалов есть нулевой идеал; полупервичные кольца это в точности кольца без нильпотентных идеалов. Компонентой I^c правого идеала I называется левый аннулятор правого аннулятора идеала I. Правый идеал I называется простым, если из $AB \subseteq I$, где A и B — правые идеалы, следует $B^c = R$. Подмножество простых правых идеалов, удовлетворяющее определенным условиям, автор называет структурой кольца R. Если структура кольца содержит минимальные элементы (атомы), то она называется a-структурой. Вместе с полупервичным кольцом R рассматривается кольцо $N(R)$, содержащее R в качестве идеала, причем $N(R) = R^c$. Основным результатом является теорема о том, что кольцо R будет полупервичным с a-структурой тогда и только тогда, когда $B + B' \subseteq R \subseteq N(B) + N(B')$, где B есть прямая сумма первичных колец, каждое из которых имеет a-структуру, а B' — полупервичное кольцо, структура которого не есть a-структура. В. А. Андрунакиевич

7813. Простое решение одной проблемы Кёте. Ли Симинь (Li Hsi-min), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжань—кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1955, № 1, 178—180 (кит.; рез. англ.)

Передоказывается теорема Левицкого о нильпотентности ниль-кольца с условием максимальности для правых идеалов.

7814. Кольца, допускающие модули ограниченной размерности. Левитт (A ring admitting modules of limited dimension. Leavitt William G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 660—664 (англ.)

Для каждого n существует такое кольцо K, что модули над K конечномерны тогда и только тогда, когда они имеют базис длины $\leqslant n$. Этим дан ответ на вопрос, поставленный автором в РЖМат, 1958, 1033.

Л. А. Скорняков

7815. О двух проблемах теории колец. Сас (Két gyűrűelméleti problémáról. Szász Ferenc), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 2, 213—218 (венг.)

Кольцо R называется кольцом с условием P_s, если каждое его подкольцо S состоит из всех элементов вида nr, $r\in R$, n — целое рациональное число. Кольцо R называется кольцом с условием P_2, если любое его подкольцо является прямым слагаемым. В работе исследуются кольца с условиями P_1 и P_2. Доказываются теоремы:

1) Кольцо R тогда и только тогда циклическое (РЖМат, 1958, 2760), когда оно с условием P_1;

2) Кольцо R тогда и только тогда кольцо с условием P_2, когда оно является прямой суммой колец простой характеристики и среди слагаемых имеется не более одного простого поля K_p.

Г. Н. Веселая

7816. Теорема двойственности для модулей характеров над кольцами, удовлетворяющими условию минимальности. Татикава (Duality theorem of character modules for rings with minimum condition. Tachikawa Hiroyuki), Math. Z., 1958, **68**, № 5, 479—487 (англ.)

Указаны условия, налагаемые на инъективный модуль Q, при выполнении которых модули Q-характеров (т. е. гомоморфизмов в модуль Q) простых модулей также являются простыми модулями. Если основное кольцо A удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов, то при выполнении тех же условий для модулей с конечным числом образующих имеет место теорема двойственности понтрягинского типа.

Если кольцо A является алгеброй конечного ранга над полем P, то для любого модуля $\mathfrak{L}$ с конечным числом образующих двойственный модуль $\mathfrak{L}^*$ (модуль всех P-гомоморфизмов $\mathfrak{L}\to P$) изоморфен модулю A^*-характеров модуля $\mathfrak{L}$.

М. М. Постников

7817. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка. Морозов В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 161—171

Доказывается, что нильпотентная алгебра Ли порядка n содержит коммутативный идеал порядка $m\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{8n+1}-1)$. С помощью этой теоремы дается классификация нильпотентных алгебр Ли над полем характеристики нуль до пятого порядка включительно. Далее проводится классификация точных представлений алгебр Ли нильпотентными матрицами четвертого порядка, откуда получается классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка над произвольным полем нулевой характеристики. Данная классификация сравнивается с классификацией Умляуфа (Umlauf Karl Arthur, Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen von Range Null, Leipzig, 1891, 80 SS.) нильпотентных алгебр Ли шестого порядка над полем комплексных чисел. М. Гриндлингер, Е. И. Пятницкая

7818. О некоммутативных J-алгебрах. Шейфер (On noncommutative Jordan algebras. Schafer R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 110—117 (англ.)

Пусть A — алгебра с ассоциативными степенями конечного ранга над полем F и с единицей 1. Такая алгебра называется нодальной, если $A=1F+N$, где элементы $z\in N$ нильпотентны, но множество N не является подалгеброй алгебры A. Некоммутативные J-алгебры характеристики 0, а также коммутативные J-алгебры характеристики $n\neq 2$ (РЖМат, 1957, 7704), альтернативные, ассоциативные алгебры произвольной характеристики не могут иметь нодальных подалгебр. Однако некоммутативная J-алгебра конечной характеристики может быть нодальной. В статье описывается структура полупростых и простых некоммутативных J-алгебр A, для которых A_k не имеет нодальных подалгебр (K — алгебраическое замыкание поля F). В заключение доказывается несколько теорем о нодальных алгебрах.

Г. В. Дорофеев

7819. Ограниченные некоммутативные J-алгебры характеристики p. Шейфер (Restricted noncommutative Jordan algebras of characteristic p. Schafer R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 141—144 (англ.)

Продолжение серии работ автора по структурной теории некоммутативных J-алгебр. Некоммутативная J-алгебра характеристики $p>2$ называется ограниченной, если $R_x{}^p=R_x^p$ для любого элемента x (R_x — правое умножение на элемент x). Оказывается, что ограниченные некоммутативные J-алгебры не имеют нодальных подалгебр, и это позволяет применить к ним результаты предыдущей работы (реф. 6593). Г. В. Дорофеев

7820. Примеры нодальных некоммутативных J-алгебр. Кокорис (Some nodal noncommutative Jordan algebras. Kokoris Louis A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 164—166 (англ.)

Дается конструкция класса нодальных (реф. 6596) некоммутативных алгебр произвольной конечной характеристики $p\neq 2$. Выделен подкласс, содержащий простые алгебры; дано описание идеалов алгебр, не являющихся простыми; построена простая нодальная коммутативная (!) J-алгебра характеристики 2. Все построенные алгебры таковы, что аглебра A^+ ассоциативна.

Г. В. Дорофеев

7821. Простые нодальные некоммутативные J-алгебры. Кокорис (Simple nodal noncommutative Jordan algebras. Kokoris Louis A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 652—654 (англ.)

Доказывается теорема: Если $\mathfrak{A}$ — простая нодальная (реф. 7820) некоммутативная J-алгебра характеристики $n\neq 2$, то $\mathfrak{A}^+$ ассоциативна.

Г. В. Дорофеев

7822. Числовое условие модулярности структур. Авани (Numerical condition for modularity of a lattice. Avann S. P.), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 1, 17—22 (англ.)

Будем писать a/b, если a покрывает b. Пусть $C(a)=\{x;\ x+a/x$ и $x+a/a\}$, $D(a)=\{x;\ x/ax$ и $a/ax\}$. Конечная структура L называется неомодулярной, если она удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда, а для каждого $a\in L$ множества $C(a)$ и $D(a)$ содержат одинаковое число элементов. Последнее условие вместе с полудедекиндовостью влечет дедекиндовость структуры. Строится пример недедекиндовой неомодулярной структуры.

Л. А. Скорняков

7823. Структуры с полными дополнениями. Пашенков В. В., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 228—229

Полная структура L называется структурой с полными дополнениями, если для любого множества $\{a_\alpha\}$ элементов из L и любых дополнений a'_α к элементам a_α элементы $\Sigma a'_\alpha$ и Π'_α являются дополнениями элементов Πa_α и Σa_α соответственно. Устанавливается, что элементы структуры L разбиваются на множество K классов $A(a)$ таких, что в $A(a)$ входят те и только те элементы, которые имеют дополнение, являющееся дополнением элемента a. Будем считать, что $A(a)\geqslant A(b)$, если для некоторых $x\in A(a)$ и $y\in A(b)$ имеет место $x\geqslant y$. Оказывается, что это определение превращает K в полную булеву алгебру, причем отображение $x\to A(x)$ сохраняет точные верхнюю и

нижнюю грани любого множества элементов. Указывается способ, позволяющий, исходя из булевых алгебр, построить все структуры с полными дополнениями. Доказательства не приведены. Л. А. Скорняков

7824. О структуре всех эндоморфизмов по объединению некоторой структуры. Гретцер, Шмидт (On the lattice of all joinendomorphisms of a lattice. Grätzer G., Schmidt E. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 722—726 (англ.)

Обозначим через $L_\cup$ множество всех эндоморфизмов по объединению некоторой структуры L, частично упорядоченное условием $\Theta \leqslant \Phi$ тогда и только тогда, когда $\Theta(x) \leqslant \Phi(x)$ для всех x. Если структура L полна, то множество $L_\cup$ оказывается полной структурой, хотя в общем случае оно может структурой и не быть. Если L полна, но не дистрибутивна, то $L_\cup$ может оказаться не полудедекиндовой структурой. Этим отрицательно решается 93 проблема из книги Биркгофа (Теория структур, М., 1952). Кроме того, показывается, что в случае конечности L структуры L и $L_\cup$ дистрибутивны одновременно. Ср. РЖМат, 1959, 1286. Л. А. Скорняков

7825. Тангенциальные структуры. Бауэр (Tangentialstrukturen. Bauer F. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 94 (нем.)

Тангенциальная структура состоит из атомного частично упорядоченного множества M, структуры A и сохраняющего порядок отображения множества M в A. Точных определений нет. Л. А. Скорняков

7826. О полноте фактор-алгебр полной булевой алгебры. I. Дуингер (On the completeness of the quotient algebras of a complete Boolean algebra I. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 4, 448—456; Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 448—456 (англ.)

Для любой полной бесконечной булевой алгебры найдется неполная фактор-алгебра, а также такая полная фактор-алгебра, что естественный гомоморфизм не сохраняет бесконечных сумм. В ходе изложения передоказываются некоторые результаты Смита и Тарского (РЖМат, 1959, 1289). Л. А. Скорняков

7827. Некоторые замечания о p-кольцах и их булевой геометрии. Земмер (Some remarks on p-rings and their Boolean geometry. Zemmer Joseph L.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 1, 193—208 (англ.)

Фостер показал (Foster A., Duke Math. J., 1945, **12** 193—208), что идемпотенты коммутативного кольца R образуют булеву алгебру B при операциях $x \cup y = x + y - xy$ и $x \cap y = xy$, и доказал (Acta math., 1951, **84**, 231—261), что для фиксированного положительного простого числа p это устанавливает с точностью до изоморфизма взаимно однозначное соответствие между P-кольцами и булевыми алгебрами.

Автор дает простое доказательство этого утверждения. Далее автор замечает, что для p-кольца R функция $\varphi(x) = x^{p-1}$ из R на B есть булева оценка (в том смысле, что $\varphi(x) = 0$) тогда и только тогда, когда $x = 0, \varphi(xy) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$ и $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) \cup \varphi(y)$. Соответствующая „функция расстояния" определяется через $d(x, y) = \varphi(x-y)$. Говорят, что R обладает свободным движением, если любое соответствие между подмножествами кольца R можно распространить до изометрии кольца R. Основной результат работы состоит в том, что для $p > 2$ это возможно тогда и только тогда, когда булева алгебра B является полной. B. Jónsson

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 108.

7828. Гомоморфизмы a-полных булевых алгебр. Дуингер (Homomorphisms of a-complete Boolean algebras. Dwinger P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 16 (англ.)

7829. Об отношениях «полумежду» и «параллельности» в структурах. Мацусима (On the relations «semi-between» and «parallel» in lattices. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 341—346 (англ.)

Пусть $B^*(a, b) = \{x; b \in B(a, x)\}$ (РЖМат, 1958, 7553) и $ab \parallel cd$ означает, что $B^*(a, b) \cap B^*(c, d) = 0$. Скажем, что элементы a, b, c, d образуют четырехвершинник, если a и b не сравнимы, $a+b=c$, $ab=d$. Устанавливается справедливость соотношений: $cb \parallel da$, $ca \parallel db$, $cd \parallel db$, $ab \parallel ba$, $ca \parallel ab$, $ab \parallel cd$.

Для получения этих и некоторых других результатов продолжается изучение множеств, рассматривавшихся в цитированной выше работе. В частности, показывается, что в дедекиндовой структуре из $x, y \in B(a+b, ab) \cap J(a, b)$ вытекает $x+y$, $xy \in B(a, b)$. Доказывается также, что структура является дедекиндовой тогда и только тогда, когда из $x \in J(a, b)$ вытекает $(a+x)(b+x) = x+ab$. Л. А. Скорняков

7830. Идеалы в некоммутативных структурах. Мацуита (Ideals in non-commutative lattices. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 7, 407—410 (англ.)

Приводятся доказательства анонсированных ранее результатов автора (РЖМат, 1953, 1115).

Л. А. Скорняков

7831. Заметка о вычислительной теореме Дейвиса и Слепяна. Харари (Note on an enumeration theorem of Davis and Slepian. Harary Frank), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 149—153 (англ.)

Пусть Φ — множество, содержащее b элементов, называемых фигурами. Последовательность S фигур называется конфигурацией длины s. Пусть Γ — группа подстановок степени s порядка h. Две конфигурации называются Γ-эквивалентными, если в Γ существует подстановка, переводящая одну из них в другую. Пусть B — число Γ-неэквивалентных конфигураций. Подстановку из Γ относят к типу $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$, если в ее записи в виде произведения циклов содержится j_k циклов длины k, $k = 1, 2, \ldots, s$. Пусть $h(j)$ — число элементов из Γ типа (j). Формула Дейвиса (РЖМат, 1954, 2489) — Слепяна (РЖМат, 1953, 1113) такова: $B = \frac{1}{h} \sum_{(j)} h(j)\, b^{\sum_l^s j_k}$. Пусть каждой фигуре поставлена в соответствие n-мерная строка неотрицательных чисел $(m_1, \ldots, m_n)$ — контент фигуры. Контентом конфигурации считается векторная сумма контентов ее фигур. Пусть $b_{m,n}$ — число фигур с контентом (m, n) и пусть $b(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{m,n} x^m y^n$ — степенной ряд фигуры. Пусть $B_{m,n}$ — число Γ-неэквивалентных конфигураций с контентом (m, n) и $B(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n} x^m y^n$ — числовой ряд конфигурации. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — неизвестные. Цикловым индексом группы называется $Z(\Gamma) = 1/h \sum_{(j)} h(j) f_1^{j_1} f_2^{j_2} \ldots f_s^{j_s}$. Если $p(x, y)$ — произвольный степенной ряд, то обозначим через $Z(\Gamma, P(x, y))$ ряд, полученный из $Z(\Gamma)$ заменой каждого неизвестного f_k рядом $p(x^k, y^k)$. Формула Пойа (Pólya G, Acta math., 1937, 68, 145 — 254): $B(x, y) = Z(\Gamma, B(x, y))$. В реферируемой статье показывается, как формула Дейвиса — Слепяна может быть выведена из формулы Пойа, и даются некоторые иллюстрации. Отмечается, что формула Пойа дает число Γ-неэквивалентных конфигураций с данным контактом, в то время как формула Дейвиса—Слепяна дает более удобное выражение для числа Γ-неэквивалентных конфигураций, не используя контента. S. Sherman

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 633.

7832. О классификации квазистроений. Лонго-Барлетта (Contributo alla classificazione delle quasi

schiere. Longo Barletta Carmelo), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 506—510 (итал.)

Сертен (Certaine J., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 869—874) рассматривал множества G с тернарной операцией (abc), удовлетворяющей постулатам:

$$A_1)\ ((aub)\ cd) = (au, (bcd)),$$
$$A_2)\ (auu) = a, \quad A_3)\ (aau) = u,$$

где a, b, c, d, u — произвольные элементы множества. Назовем такие множества строениями (schiere). Множество с тернарной операцией называется квазистроением, если для некоторого элемента u и произвольных элементов $a; b, c, d$ выполнены условия $A_1) — A_3)$.

В работе обобщаются некоторые предложения Сертена на квазистроения и дается оценка сверху для числа неизоморфных квазистроений конечного порядка.

Ю. И. Соркин

7833. Эквационально-полные расширения конечных алгебр. Скотт (Equationally complete extensions of finite algebras. Scott Dana), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 1, 35—38; Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 35—38 (англ.)

Для произвольной алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{P}_n[\mathfrak{A}]$ алгебру, образованную разбиением свободной алгебры термов с n переменными на части, согласно конгруэнтности: $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда равенство $\alpha = \beta$ истинно в $\mathfrak{A}$. Доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если для некоторого $n > 1$ алгебра $\mathfrak{A}_n[\mathfrak{S}]$ конечна, то существует только конечное число эквационально-полных классов алгебр, содержащихся в классе алгебр, порожденном алгеброй $\mathfrak{A}$ (РЖМат, 1958, 2776).

Теорема 2. Если алгебра $\mathfrak{A}$ эквационально полна, то для каждого $n > 1$ алгебра $\mathfrak{A}$ содержится в классе алгебр, порожденном алгеброй $\mathfrak{P}_n[\mathfrak{A}]$, и является $\mathfrak{P}_n$-простой (т. е. каждый нетривиальный гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{P}_n[\mathfrak{A}]$ изоморфен самой алгебре $\mathfrak{P}_n[\mathfrak{A}]$); обратно: если для некоторого $n > 1$ алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{P}_n$-простой и содержится в классе алгебр, порожденном алгеброй $\mathfrak{P}_n[\mathfrak{A}]$, то алгебра $\mathfrak{A}$ эквационально полна.

Из первой теоремы следует, что множество тождеств конечной алгебры имеет только конечное число эквационально-полных расширений, т. е. класс алгебр, порожденных конечной алгеброй, содержит только конечное число эквационально-полных классов алгебр. Вторая теорема дает алгоритм для определения, эквационально полна произвольная конечная алгебра или нет. В случае конечной не эквационально-полной алгебры $\mathfrak{A}$ можно эффективно определить число эквационально-полных классов, содержащихся в классе алгебр, порожденном алгеброй $\mathfrak{A}$.

Ю. А. Шиханович

7834. О классах моделей, замкнутых относительно прямого произведения. Тайманов А. Д., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 231—232

Резюме сообщения, сделанного на Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре. Устанавливается новая характеристика аксиом условного класса (CONDC), из которой следуют результаты Бинга (РЖМат, 1957, 53) и некоторые новые результаты относительно аксиом условного класса.

С. Р. Когаловский

См. также: 7676, 7677, 7719 К, 7739, 7864, 8187, 8189 8218, 8484 К

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

7835. Вложения пределов обратных спектров. Исбелл (Embeddings of inverse limits. Isbell J. R.), Abstr. Short communs internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, **96** (англ.)

7836. Равномерная сходимость отображений. Уайберн (Uniform convergence of mappings. Whyburn G. T.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 102—103 (англ.)

7837. О качественных свойствах углов симплекса. Фидлер (Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe. Fiedler Miroslav), Чехосл. матем. ж. 1957, **7**, № 3, 463—478 (нем., рез. русск.)

Под качеством угла евклидова пространства подразумевается свойство угла быть острым, прямым или тупым. Сопоставляем граф n-мерному симплексу по следующему правилу: $(n-1)$-мерным граням соответствуют вершины графа G; если внутренний угол между двумя $(n-1)$ гранями симплекса не прямой, им сопоставляем ребро, „положительное“, если угол острый, „отрицательное“ в противном случае. Множество „положительных“ ребер связно. Это свойство и достаточно для того, чтобы граф определял симплекс. Каждая грань нетупоугольного симплекса также является нетупоугольным симплексом. Прямоугольный n-мерный симплекс — это n-мерный симплекс, обладающий максимальным возможным числом $\binom{n}{2}$ прямых внутренних углов (остальные острые). Графом такого симплекса является дерево, состоящее из „положительных“ ребер. Доказывается, что барицентрические координаты центра описанной гиперсферы прямоугольного n-мерного симплекса зависят только от степеней вершин графа G. Кроме того, исследуются свойства грани гипотенузы

Из резюме автор

7838. О пути шахматного коня. Одзэки (On the path of the knight. Ozeki Nobuo), Тиба дайгаку бунригакубу киё, сидзэн кагаку, J. Coll. Arts and Sci. Chiba Univ. Natur. Sci. Ser., 1957, **2**, № 2, 93—96 (англ.)

Исследуется вопрос о возможности полного однократного обхода шахматным конем прямоугольной доски размером $(m \times n)$ клеток. Доказывается, что обход возможен всегда при $m, n \geqslant 3$, кроме случаев: (3×3), (3×5), (3×6), (4×4). Автор пользуется методом окаймления доски рамкой ширины 2 и показывает, как, зная схему обхода доски $(p\times q)$, построить схему обхода окаймленной доски $[(p+4)\times(q+4)]$. Применяется также последовательный обход нескольких досок; например, обход доски (3×19) представляет собой цепь обходов досок (3×4), (3×4), (3×4) и (3×7), приложенных одна к другой меньшими сторонами. Кроме того, указывается связь рассматриваемой задачи с проблемой расстановки на шахматной доске наибольшего числа коней, из которых ни один не бил бы другого.

Ф. Я. Ветухновский

7839. О перестановочной связности графов. Келли, Мерриллл (On the transpose-connectivity of graphs. Kelly Paul, Merriell David), Math. Mag., 1958, **32**, № 1, 1—3 (англ.)

Пусть A — граф, каждые две вершины которого связаны самое большее одним ребром. Транспозицией графа A называется граф $T(A)$, полученный обращением отношения связи и несвязи в A (допускаются и петли). Если оба графа, A и $T(A)$, связны, то A называется перестановочно связным, сокращенно T-связным. Если из связного графа удалить вершину α вместе со всеми инци-

дентными ей ребрами, то α называется внутренней или внешней в зависимости от того, связан или нет оставшийся граф. Внутренняя вершина P графа A является внешней в $T(A)$ (теорема 3). Доказывается, что связный граф порядка $n \geqslant 2$ имеет по крайней мере 2 внешних точки, причем минимум достигается в случае, когда граф есть простой путь. Устанавливаются также некоторые индуктивные критерии связности и T-связности графа: необходимым и достаточным условием T-связности графа порядка $n \geqslant 6$ является наличие у него двух T-связных подграфов порядка $(n-1)$. Граф называется циклически связным, если через каждые две вершины проходит некоторый цикл. Графы A и $T(A)$ порядка n являются одновременно циклически связными, если все подграфы порядка $(n-1)$ T-связны. Окончательный результат: Связный граф A является T-связным тогда и только тогда, когда его вершины нельзя разбить на два множества A_1 и A_2 такие, что каждая вершина из A_1 связана ребром с каждой вершиной из A_2. Указывается также алгоритм, позволяющий исследовать T-связность графа.

Ф. Я. Ветухновский

7840. Произвольно вычерчиваемые и направленные графы. Харари (On arbitrarily traceable graphs and directed graphs. Harary Frank), Scripta Math., 1958, 23, № 1-4, 37—41 (англ.)

Произвольно вычерчиваемым графом из точки A, или A-вычерчиваемым графом, является граф, у которого любой путь, выходящий из A и проходящий по любому ребру не более одного раза, есть замкнутый цикл (прежде такие графы назывались „цугами", РЖМат, 1956, 2042). Подграф H A-вычерчиваемого графа G называется простым, если H — A-вычерчиваемый граф, содержит более чем одну вершину, имеет только одну общую вершину с подграфом, порожденным множеством $G-H$, и минимален в этом смысле. Тогда каждый A — вычерчиваемый граф однозначно разлагается в прямую сумму своих простых подграфов. Разрезающая точка связного графа это та, после удаления которой граф становится несвязным. Блоком называется максимальный связный подграф, не имеющий разрезающих точек. Доказывается, что A-вычерчиваемый граф может иметь в качестве разрезающей точки только вершину A, а понятие блока совпадает с простыми подграфами. Далее вводится понятие направленного A-вычерчиваемого графа (A-вычерчиваемый „дираф"). Если число исходящих ребер равно числу входящих, то граф называется „изографом". Граф является эйлеровым диграфом, если он связный изограф. Если все циклы эйлерова диграфа содержат точку A, то диграф называется эйлеровым A-вычерчиваемым. На такие диграфы обобщаются известные теоремы об эйлеровых графах.

Р. Е. Кричевский

7841. Самодвойственные конфигурации и их графы Леви. Арци (Self-dual configurations and their Levi graphs. Artzy Rafael), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, 299—303 (англ.)

Конфигурацией называется множество точек и прямых (всюду вместо прямых можно иметь в виду плоскости) с определенными между ними инциденциями. Конфигурацию можно описать графом Леви, в котором каждой прямой и каждой точке конфигурации ставится в соответствие вершина и каждая пара образов инцидентных объектов соединена ребром. Рассматриваются только самодвойственные конфигурации, т. е. такие, для которых существует взаимнооднозначное соответствие r между точками и прямыми, обладающее следующим свойством: если точка P лежит на прямой d, то точка $r(d)$ инцидентна прямой $r(P)$. Если теперь в графе Леви самодвойственной конфигурации отождествить вершину, соответствующую каждой точке P конфигурации, с вершиной, соответствующей прямой $r(P)$, то получится редуцированный граф Леви, сокращенно RLG (reduced Levi graph). Если в конфигурации P и $r(P)$ инцидентны, то соответствующая им вершина в RLG имеет петлю. Одна и та же конфигурация может иметь много неизоморфных RLG, соответственно числу различных отображений r; однако по RLG конфигурация восстанавливается однозначно. В работе разбираются различные примеры самодвойственных конфигураций, их связь с проективной геометрией.

Ф. Я. Ветухновский

7842. Замечание к разложениям конечного четного графа на множители первой степени. Коциг (Poznámka k rozkladom konečných párnych pravidelných grafov na ilneárne faktory. Kotzig Anton), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 3, 384—354 (словацк.; рез. русск., нем.)

Граф, все вершины которого имеют одинаковую степень, называется регулярным. Множитель k-й степени регулярного графа G — это такой его подграф G', что каждой вершине графа G инцидентны ровно k ребер подграфа G'. Разложением регулярного графа на множители называется представление его в виде объединения (теоретико-множественного) непересекающихся множителей. Пусть G—произвольный регулярный граф $(2m+1)$-й степени $(m>0)$, $2n$ — число его вершин, $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, \ldots, L_{2m+1}\}$ — произвольное разложение графа G на множители первой степени. Обозначим через $\varkappa_{i,j}$ число компонент в объединении множителей L_i и L_j и пусть $\varkappa(G, \mathfrak{R}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2m+1} \varkappa_{ij}$. Доказывается (теорема 1). что $\varkappa(G, \mathfrak{R}) = mn \pmod 2$. Пусть G — регулярный граф m-й степени $(m>2)$, имеющий такое разложение $\mathfrak{R} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ на множители первой степени, что произвольное объединение множителей L_i и L_j $(i<j)$ является гамильтоновой линией графа G. Тогда утверждается, что n — число вершин графа G есть число вида $4k+2$.

Ф. Я. Ветухновский

7843. Частота появления некоторого типа конечных графов. Айгнер (Die Häufigkeitsverteilung gewisser Typen von endlichen Graphen. Aigner Alexander), J. reine und angew. Math., 1958, 200, № 1-2, 125—128 (нем.)

Определения см. РЖМат, 1959, 5659, 5638. Полагая, что для произвольной пары вершин графа равновероятно быть соединенными ребром или нет (т. е. вероятность соединения равна $\frac{1}{2}$), подсчитывается вероятность вхождения в граф той или иной фигуры. Автора особенно интересует предельное распределение при $n \to \infty$ (n — число вершин графа). С помощью рекуррентных соотношений подсчитываются вероятности появления графа типа K среди графов с n вершинами и предельные вероятности при $n \to \infty$. Подсчитывается также математическое ожидание типа графа с n вершинами. Оно оказывается равным $2-2^{-n+1}$ (если не считать пустого множества, очевидно, удовлетворяющего определению четного решения) и в предельном случае равно 2. Указывается также на „неполную симметрию отношений „быть связанными" и „не быть связанными" (из-за запрета петель), ведущую к необходимости различать случаи четного и нечетного n.

Ф. Я. Ветухновский

7844. Заметка о формулах Пойа и Оттера для подсчета деревьев. Харари (Note on the Pólya and Otter formulas for enumerating trees. Harary Frank), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 2, 109—112 (англ.)

Дерево—конечный связный граф, не содержащий замкнутых путей (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, гл. V, Leipzig, 1936). Ветвь дерева определяется вершиной P и отрезком PQ и состоит из всех вершин и рёбер, достижимых из P путями, начинающимися ребром PQ. Вес ветви — число содержащихся в ней рёбер. Все вершины P дерева — наибольший из весов ветвей, начинающихся в P. Центр массы дерева состоит из одной или двух смежных вершин минималь-

ного веса. Два дерева изоморфны, если существует взаимно однозначное и сохраняющее смежность соответствие между множествами их вершин. Корневое дерево — это дерево, в котором выделена одна из вершин (корень). t_n — число изоморфных деревьев, содержащих n отрезков (или $n+1$ вершин). T_n — соответствующее число корневых деревьев. Производящая функция $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$ удовлетворяет функциональному уравнению Кэли:

$$T(x) = \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} T(x^r), \qquad (1)$$

позволяющему последовательно находить T_n. Пойа (Pólya G., Acta math., 1937, 68) нашел для t'_n и t''_n (число деревьев из n рёбер с центром массы, состоящим соответственно из одной и из двух вершин) следующие выражения:

$$t'_n = \operatorname{coe} f_n \{(1-x)^{-T_1} (1-x^2)^{-T_2} \dots (1-x^{n+1})^{-T_m}\}, \qquad (2)$$

где $m = [n/2] - 1$, $\operatorname{coe} f_n \{F(x)\}$ — коэффициент при x^n в разложении $F(x)$ в степенной ряд;

$$t''_{2k} = 0, \quad t''_{2k+1} = \binom{T_k + 1}{2}. \qquad (3)$$

Две вершины (два ребра) графа G называются подобными, если существует автоморфизм графа G, отображающий эти вершины (ребра) друг на друга. Подобное ребро графа — такое, вершины которого подобны. Пусть p, k и k_e — соответственно числа вершин и ребер (не являющихся подобными) и подобных ребер дерева. Оттер (Otter R., Ann. Math., 1948, 49, 3) установил следующее характеристическое для деревьев соотношение:

$$p - k + k_e = 1, \qquad (4)$$

с помощью которого вывел уравнение, связывающее производящие функции

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \text{ и } T(x):$$

$$t(x) = T(x) - \frac{x}{2}\left[T^2(x) - T(x^2)\right]. \qquad (5)$$

В настоящей статье уравнение Оттера (5) выводится непосредственно из формул Пойа (2) и (3) без соотношения (4), а с помощью преобразования степенных рядов.

А. Г. Школьник

7845. Формула Кэли для подсчета деревьев. Кларк (On Cayley's formula for counting trees. Clarke L. E.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 4, 471—474 (англ.)

Известно, что общее число деревьев с n вершинами n^{n-2} (формула Кэли, РЖМат, 1955, 137). Дерево принадлежит типу l, если у него в какой-то вершине заканчивается l ребер. Для числа графов с n вершинами типа l дается формула $N_l = \binom{n-2}{l-1} (n-1)^{n-l-1}$; она применяется для решения одной задачи анализа.

Р. Е. Кричевский

7846. Число ориентированных графов. Харари (The number of oriented graphs. Harary Frank), Michigan Math. J., 1957, 4, № 3, 221—224 (англ.)

Продолжение предыдущей заметки автора (РЖМат, 1957, 1210). Ориентированный граф — одномерный ориентированный симплициальный комплекс. Дается формула производящего многочлена для случая ориентированных графов; выписаны производящие многочлены для $p = 1, 2, \dots, 5$.

Р. Е. Кричевский

7847. Теорема Вендта об узлах. Киносита (On Wendt's theorem of knots. Kinoshita Shin'ichi), Osaka Math. J., 1957, 9, № 1, 61—66 (англ.)

Вендт (Wendt H., Math. Z., 1937, 42, 680—696) комбинаторным образом по регулярной проекции узла ввел число заузленности S и доказал для g-листного разветвленного циклического накрывающего, что для минимального числа образующих одномерной группы гомологий e_g, $e_g \leqslant S(g-1)$. Автор показал, что неравенство остается справедливым при замене S на $\tilde{S}$ — слабое число заузленности. Слабое число заузленности — минимальная последовательность несколько обобщенного вида смен надкрестий, после которой узел становится тривиальным.

В. К. Белов

7848. О лемме Дена и асферичности узлов. Папакирьякопулос (On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Papakyriakopoulos C. D.), Ann. Math., 1957, 66, № 1, 1—26 (англ.)

Дается доказательство леммы Дена (Dehn M., Math. Ann., 1910, 69, 137—168), в доказательстве которой у Дена была обнаружена существенная ошибка. Лемма Дена: Пусть M — трехмерное многообразие, компактное или нет, с границей или без нее, и пусть в M расположена двумерная клетка D с самопересечениями (особенностями), имеющая границей простую замкнутую полигональную кривую C; предположим, что существует замкнутая окрестность кривой C в D, являющаяся плоским кольцом (т. е. на C нет особых точек). Тогда существует двумерная клетка D_0 с границей C, кусочно-линейно вложенная в M. Кроме того, доказано аналогичное утверждение — теорема о сфере в следующей формулировке: Пусть M — ориентируемое трехмерное многообразие, компактное или нет, с границей или без нее, и $\pi_2(M) \neq 0$ и пусть M можно кусочно-линейно вложить в трехмерное многообразие N, обладающее следующим свойством: фактор-группа по любой подгруппе с конечным числом образующих $\pi_1(N)$ по коммутанту этой подгруппы имеет элемент бесконечного порядка. Тогда существует такая двумерная сфера S, кусочно-линейно вложенная в M, что $S \neq 0$ в M. Доказательство использует конструкцию башни. Далее дается несколько приложений этих теорем, в частности к решению проблемы Уайтхеда: Непустое собственное открытое связное подмножество U трехмерной сферы S^3 асферично тогда и только тогда, когда $S^3 \setminus U$ геометрически не расщепляемо, т. е. не существует такой двумерной сферы $S^2 \subset S^3 \setminus U$, что обе компоненты множества $S^3 \setminus S^2$ содержат точки U. В частности, если F — любой узел или связный граф, то $S \setminus F$ асферично. Другое приложение к доказательству следующей теоремы: Пусть V — такое открытое связное подмножество ориентируемого трехмерно многообразия N, что группа $\pi_1(N)$ локально свободна, тогда $\pi_1(V)$ не имеет элементов конечного порядка. Имеется несколько неточностей, легко устранимых. В конце ставится несколько проблем.

В. К. Белов

7849. Лемма Дена и асферичность узлов. Папакирьякопулос (On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Papakyriakopoulos C. D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 1, 169—172 (англ.)

Предварительное (реф. 6623) сообщение с кратким планом доказательства леммы Дена и теоремы о сфере.

В. К. Белов

7850. Доказательство и обобщение леммы Дена. Шапиро, Уайтхед (A proof and extension of Dehn's lemma. Shapiro Arnold, Whitehead J. H. C.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, № 4, 174—178 (англ.)

Используя в конструкции башни при доказательстве Папакирьякопулосом леммы Дена и теоремы о сфере (реф. 6624) вместо универсальных накрывающих двулистные накрывающие, авторы дают другое, более простое

доказательство леммы Дена. Распространение леммы Дена относится к случаю — связной, компактной двумерной сферы, продырявленной по множеству r одномерных сфер на ней. В. К. Белов

7851. О концах фундаментальных групп трехмерных незамкнутых многообразий. Папакирьякопулос (On the ends of the fundamental groups of 3-manifolds with boundary. Papakyriakopoulos C. D.), Comment. math. helv., 1957, **32**, № 2, 85—92 (англ.)

В добавлении к результатам предыдущей статьи автора (РЖМат, 1956, 7936; реф. 6623) получены следующие результаты, которые полностью решают вопрос о концах группы узла в S^3 (конец обозначим e): 1) если M асферично и вложение $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ — изоморфизм для каждой компоненты границы, то $e = 1$; 2) если M асферично, N — связная замкнутая поверхность рода 1 и $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ не изоморфизм, то $e = 2$; 3) во всех остальных случаях $e \neq 2$. В частности, $e \neq 2$ для любого кратного узла. Кроме того, дается краткое доказательство теоремы о пути (реф. 6627). В. К. Белов

7852. О трехмерных телах. Папакирьякопулос (On solid tori. Papakyriakopoulos C. D.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 26, 281—299 (англ.)

Методом, аналогичным используемому при доказательстве теоремы о сфере и леммы Дена, доказывается следующая теорема о пути: Пусть M — трехмерное многообразие, компактное или нет, с границей, состоящей из ориентируемой замкнутой поверхности, и пусть L — путь, принадлежащий открытому множеству U границы такой, что $L \simeq 0$ в M и $\not\simeq 0$ на границе N. Тогда существует простой (без самопересечений) путь $L_0 \subset U$ такой, что $L_0 \not\simeq 0$ в M и $\not\simeq 0$ на N. Кроме того, доказывается следующая теорема о трехмерных телах рода h (т. е. таких, граница которых состоит из замкнутых поверхностей рода h): Если M — компакт, $\pi_1(M, N)$ — свободная циклическая и N рода h, то существуют простые (без самопересечений) циклы $A_1 B_1, \ldots, A_h, B_h$ на N такие, что $B_i \simeq 0$ в M и $A_1 \cup \ldots \cup A_h$ есть деформационный ретракт M. В тех же предположениях при справедливости гипотезы Пуанкаре доказывается, что это трехмерное многообразие есть трехмерное тело рода h. Эти теоремы вытекают из несколько более общих теорем автора относительно свойств трехмерного многообразия в зависимости от поведения фундаментальных групп компонент его границы при отображении вложения $I : \pi_1(N) \to \pi_1(M)$. В. К. Белов

7853. Некоторые проблемы, относящиеся к трехмерным многообразиям. Папакирьякопулос (Some problems on 3-dimensional manifolds. Papakyriakopoulos C. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 6, 317—335 (англ.)

Обзор вопросов, связанных с классической проблемой классификации трехмерных многообразий в связи с новыми результатами, полученными при доказательстве леммы Дена и теоремы о сфере автора, и некоторыми анонсированными результатами Милнора, полученными при предположении справедливости гипотезы Пуанкаре. Библ. 30 назв. В. К. Белов

7854. К вопросу о нормальных пространствах, обладающих свойством (A). Киртадзе Г. А., Сохумис сахелмцифо педагогиури институтис шромеби, Тр. Сухумск. гос. пед. ин-та, 1958, **10-11**, 481—484

Свойство (A), в терминологии автора, состоит в том, что всякая регулярно убывающая последовательность непустых открытых множеств имеет непустое пересечение. Доказывается, что в упорядоченных топологических пространствах (с их естественной топологией) это свойство эквивалентно компактности. П. С. Александров

7855. О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности. Скляренко Е., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 1, 36—39

Для каждого нормального пространства строится хаусдорфово бикомпактное расширение того же веса и той же размерности. Этот фундаментальный результат, являющийся окончательным обобщением известной теоремы Гуревича о включении метрического пространства со счетной базой в компакт той же размерности, доказывается посредством построения на данном нормальном пространстве X веса τ и размерности n равномерной структуры Σ_λ, состоящей из открытых конечных покрытий и обладающей следующими двумя свойствами: 1) в структуре Σ_λ имеется конфинальная часть мощности τ; 2) в Σ_λ, имеется конфинальная часть, состоящая из покрытий кратности $n+1$. П. С. Александров

7856. О подпространствах чеховского расширения. Исивата (On subspaces of Čech compactification space. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1957, **A5**, 15 Oct., 304—309 (англ.)

Обозначая через $\widetilde{X}$ чеховское расширение вполне регулярного пространства X, автор называет $*$-подмножеством пространства $\widetilde{X}$ всякое множество Y, удовлетворяющее (точным) включениям $X \subset Y \subset \widetilde{X}$. О $*$-множествах доказывается ряд теорем, среди которых наиболее существенными представляются следующие две. Если X — компактное, локально бикомпактное нормальное пространство, состоящее из бесконечного множества точек, то всегда имеется открытое не нормальное $*$-множество. Аналогичный результат, но без требования открытости соответствующих множеств, получается и для любых локально бикомпактных пространств. П. С. Александров

7857. Обобщение теоремы М. Рудин, касающейся проблемы однородности. Исивата (A generalization of Rudin's theorem for the homogeneity problem. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1957, **A5**, 15 Oct., 300—303 (англ.)

Обобщая результат М. Рудин (РЖМат, 1958, 3602), автор доказывает, опираясь на гипотезу континуума, что при произвольном не псевдокомпактном вполне регулярном пространстве X пространство $\beta X - X$ не является однородным. П. С. Александров

7858. К вопросу о связи между пространствами близости и бикомпактными расширениями вполне регулярных пространств. Фомин С. В., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 236—238

Указывается способ получения теоремы референта (о взаимно однозначном соответствии между пространствами близости и бикомпактными расширениями (Матем. сб., 1952, **31**, № 3, 557)) из общей теории коммутативных нормированных колец с помощью известной теоремы Гельфанда — Шилова. Для этого доказывается, 1) что совокупность $C(R_\Delta)$ всех ограниченных Δ-непрерывных функций, определенных на пространстве близости R_Δ, является замкнутым подкольцом кольца $C(R)$ всех ограниченных непрерывных функций, содержащим вместе с каждой функцией и комплексно ей сопряженную, 2) что всякое такое подкольцо C кольца $C(R)$ превращает данное вполне регулярное пространство R в пространство близости (лишь разные точки могут оказаться близкими). Если же на подкольца C наложить еще естественное условие разделения, то получаемое пространство близости будет обычным и удовлетворять условию согласования с топологией пространства R. Рассматривая только такие пространства близости R_Δ, автор получает, что соответствие $R_\Delta \to C(R_\Delta)$ взаимно однозначно и сохраняет естественный порядок в обоих пространствах.

Примечание референта. Автор фактически доказывает, что соответствие $R_\Delta \to C(R_\Delta)$ взаимно однозначно для всех пространств близости R_Δ, явля-

ющихся непрерывными образами пространства R. В определении согласованности пропущено условие о том, что точки, близкие к какому-либо множеству, должны входить в его замыкание. Имеется описка в условии разделения для подколец: нужно, чтобы в подкольце C существовали функции, разделяющие любую точку от любого не содержащего ее замкнутого множества.

Ю. М. Смирнов

7859. Пример нульмерного нормального пространства, имеющего бесконечную размерность в смысле покрытий. Смирнов Ю., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 1, 40—42

Строится пример, названный в заглавии, причем нульмерность понимается в смысле обычного индуктивного определения размерности. При построении этого примера применяется обобщение конструкции, посредством которой Даукер доказал существование нормального пространства X, для которого $\dim X=1$, $\operatorname{ind} X=0$. Попутно (также обобщая один из результатов Даукера) автор доказывает (без применения континуум-гипотезы), что всякое метрическое пространство со счетной базой является суммой трансфинитной последовательности типа ω_1 неубывающих нульмерных множеств.

П. С. Александров

7860. Продолжение отображений компактов. Тайманов А. Д., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, 3, 198—202

Известно, что открытый образ плоского компакта есть плоский компакт. Из доказанной в статье теоремы следует, что всякое непрерывное отображение f плоского, нигде не плотного компакта X на компакт Y может быть дополнено до открытого отображения F множества $E\supset X$ на Y, где E — плоское множество типа F_σ. Общее доказанное здесь утверждение заключается в том, что, каково бы ни было непрерывное отображение f метрического сепарабельного пространства X на пространство Y, добавив к X множество размерности $\leqslant 1$, можно построить пространство $E\supset X$ и открытое отображение F пространства E на Y, совпадающее с f на X. Если X — нигде не плотный компакт в n-мерном кубе I_n, $n\geqslant 2$, то $E\subset I_n$.

Л. В. Келдыш

7861. Непрерывные выборы. I. Майкл (Continuous selections. I. Michael Ernest), Ann. Math., 1956, 63, № 2, 361—382 (англ.)

Пусть X, Y — топологические пространства, 2^Y — семейство непустых подмножеств пространства Y. Через $f, g, h \ldots$ обозначим однозначные отображения X в Y, а через φ, ψ, Θ — многозначные. Выбором (униформизацией) для отображения $\varphi: X\to 2^Y$ называется непрерывное отображение $f: X\to Y$ такое, что $f(x)\in\varphi(x)$ для каждого $x\in X$. Выбор $f: X\to Y$ для отображения $\varphi: X\to 2^Y$ называется распространением на X выбора $g: A\to Y$ для $\varphi: A\to 2^Y$, если $f(x)=g(x)$ для всех $x\in A$. Отображение $\varphi: X\to 2^Y$ называется полунепрерывным снизу, если для каждого открытого в Y множества V совокупность всех тех точек $x\in X$, для которых $\varphi(x)\cap V\neq\Lambda$, открыта в X. Рассматриваются следующие задачи: Пусть даны X, $A\neq\bar{A}\subset X$, $S\subset 2^Y$.

(Q_1) Если $\varphi: X\to S\subset 2^Y$ полунепрерывно снизу, то каждый выбор $f: A\to Y$ для $\varphi|A$ можно распространить в X, т. е. является ли φ абсолютным экстензором.

(Q_2) Если $\varphi: X\to S\subset 2^Y$ полунепрерывно снизу (AE), то каждый выбор для $\varphi|A$ можно распространить в выбор для $\varphi|U$, где U — некоторое открытое множество, содержащее A, т. е. является ли φ абсолютным окрестностным экстензором (ANE).

Если $\varphi: X\to 2^Y$ таково, что для каждой пары точек $x_0\in X_0$ и $y_0\in\varphi(x_0)$ существует выбор f для $\varphi|U$ (U открыто и $U\supset A$) такой, что $f(x_0)=y_0$, то φ полунепрерывно снизу. Даны необходимые (но не достаточное) и некоторые достаточные (но не необходимые) условия для Q_1, Q_2 (РЖМат, 1956, 1166). Доказан ряд теорем о существовании выбора, аналогичных теоремам распространения Урысона, Дугунджи, Ханнера.

Теорема 1. 4. Если $S\subset 2^Y$ содержит все одноточечные подмножества элементов из S, то следующие свойства эквивалентны: а) каждое полунепрерывное снизу отображение $\varphi: X\to S$ имеет выбор; б) (Q_1) верно для любого $A=\bar{A}\subset X$.

Следствие. Если $S\subset 2^Y$ содержит каждое одноточечное подмножество из Y и $Y\in S$, то из того что, каждое полунепрерывное снизу $\varphi: X\to S$ имеет выбор, следует S является пространством распространения для X (т. е. любое непрерывное отображение $g: A\to Y$ любого замкнутого множества $A\subset X$ можно распространить на X).

Теорема 3. 2. Для T_1-пространства X следующие условия эквивалентны: (а) X паракомпактно, (б) если Y — пространство Банаха, то всякое полунепрерывное снизу отображение пространства X в множество всех непустых, замкнутых, выпуклых подмножеств Y имеет выбор. Отсюда следует: Если Y и X — пространства Банаха и g — линейное непрерывное отображение Y на X, то существует непрерывное отображение $f: X\to Y$ такое, что $f(x)\in g^{-1}(x)$ для всех $x\in X$. Дан ряд приложений этих теорем, в частности следующая характеристика паракомпактных пространств: Топологическое пространство X паракомпактно только тогда, когда всякое $A\subset X$, пересекающееся с каждым паракомпактным подмножеством $B\subset X$ по пустому или замкнутому множеству, будет замкнутым.

А. Д. Тайманов

7862. Непрерывные выборы. II. Майкл (Continuous selections. II. Michael Ernest.), Ann. Math., 1956, 64, № 3, 562—580 (англ.)

Задачи Q_1, Q_2 (реф. 7Ж61) рассматриваются для пространств конечной размерности и доказывается обобщение теоремы Куратовского об абсолютных экстензорах (Fundam. math., 1935, 24, 269—288). Пусть X — паракомпактное пространство, $A\subset X$ замкнуто, $\dim_X(X\setminus A)\leqslant n+1$ (т. е. для каждого замкнутого в X $C\subset X\setminus A$ $\dim C\leqslant n+1$), Y — полное замкнутое метрическое пространство, equi-LC^n и $\varphi: X\to S$ полунепрерывно снизу; тогда каждый выбор для $\varphi|A$ можно распространить в U, где U — открытое множество, содержащее A. Если каждое $S\in S(Y)$ есть C^n, то можно положить $U=X$. Как следствия отсюда следует: Если Y — полное метрическое пространство, X — нульмерное паракомпактное и отображение $f: Y\to X$ непрерывно, открыто, $f(Y)=X$, то существует непрерывное $g: X\to Y$ такое, что $g(x)\subset f^{-1}(x)$, для каждого $x\in X$. Пусть X — нульмерное паракомпактное пространство, C — пространство комплексных чисел, $g: X\to C$ непрерывно. Пусть $w: U\to C$ аналитическая функция, определенная на открытом множестве U, $U\subset C$ и $w(u)\subset g(X)$. Тогда существует непрерывная функция $f: X\to C$ такая, что $w(f(x))=g(x)$ для всех $x\in X$.

А. Д. Тайманов

7863. Непрерывные выборы. III. Майкл (Continuous selections. III. Michael Ernest), Ann. Math., 1957, 65, № 2, 375—390 (англ.)

Если Y — метрическое пространство с метрикой ρ, то $\varphi: X\to 2^Y$ называется непрерывным, если для любого $\varepsilon>0$ и для любой точки $x_0\in X$ существует такая окрестность $U(x)$ точки x_0, что для всех $x\in U$

$$\varphi(x_0)\subset N_\varepsilon(\varphi(x)),\ \varphi(x)\subset N_\varepsilon(\varphi(x_0)),$$

где $N_\varepsilon(A)=\{y\in Y/\rho(y,A)<\varepsilon\}$.

Задача Q рассматривается для непрерывных отображений $\varphi: X\to 2^Y$. Доказан ряд теорем, связанных со сле-

дующим условием (1·1): X паракомпактно, $(Y, \rho) = Y$ — полное метрическое пространство, $S \subset E(Y)$ и равномерно equi LC^n относительно метрики ρ, $\varphi : X \to S$ непрерывно относительно ρ.

Теорема. Пусть Z паракомпактно,

$$X = Z \times I,\ I = [0,1] \text{ и } Y, S \subset 2^Y,\ \varphi : X \to S$$

удовлетворяют условиям (1·1). Пусть $\overline{B} = B \subset Z$

$$\dim_Z (Z \setminus B) \leqslant n,\ A = (Z \cup \{0\}) \cup (B \times I).$$

Тогда каждый выбор для φ / A можно распространить в выбор для φ. Теоремы выбора, доказанные в первой части работы, переносятся для непрерывных отображений φ при условии (1,1). В частности, если X — пространство Банаха, то каждое непрерывное отображение $\varphi : X \to F(Y)$ имеет выбор. Если X — сепарабельное пространство Банаха, то каждое непрерывное отображение $\varphi : X$ в выпуклые замкнутые $D(Y)$ имеет выбор. Если X — нормированное линейное пространство, то каждое непрерывное отображение φ пространства X в семейство непустых, выпуклых открытых подмножеств пространства Y имеет выбор. А. Д. Тайманов

7864. Зависимость непрерывных отображений по Борсуку и двойственность. Хилтон (On Borsuk dependence and duality. Hilton P. J.), Bull. Soc. math. Belgique, 1955, **7**, № 2, 143—155 (англ.)

Борсук ввел понятие зависимости непрерывных отображений (РЖМат, 1956, 5780; 1957 4676), которое было обобщено автором (РЖМат, 1959, 211). Вводя подобным образом зависимости модулей, автор рассматривает двойственность этих понятий. Это рассмотрение базируется на общем определении двойственности, данное автором и Экманом. Отображение $\varphi : A \to B$ называется i-нульгомотопным ($\varphi \simeq_i 0$), если гомотопно можно распространить на каждый модуль, содержащий A. Отображение $\psi : A \to C$ называется i-зависимым от $\varphi : A \to B$, если для каждого $A' \supset A$ существование распространения φ на A' влечет за собой существование распространения ψ на A'. Двойственные определения: Отображение $\varphi : A \to B$ называется p-нульгомотопным ($\varphi \simeq_p 0$), если для любого B' и отображения на $j : B' \to B$ существует отображение $\varphi' : A \to B'$, так что $j\varphi' = \varphi$. Отображение $\psi : C \to A$ называется p-зависимым от $\varphi : B \to A$, если для каждого отображения на $j : A' \to A$ из существования распространения отображения φ в A' вытекает существование распространения отображения ψ в A'. Доказываются теоремы, аналогичные теоремам Борсука: 1. Отображение $\psi : A \to C$ i-зависимо от $\varphi : A \to B$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma : B \to C$, так что $\psi \simeq_i \sigma\varphi$. 2. Отображение $\psi : C \to A$ p-зависимо от $\varphi : B \to A$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma : C \to B$, так что $\psi \simeq_p \varphi\sigma$.

Эти определения обобщаются при переходе к топологическим пространствам следующим образом: Отображение $g : x \to z$ топологических пространств зависит от $f : X \to Y$, если для любого $X' \supset X$ (так, что пара (X', X) удовлетворяет теореме о распространении гомотопии) из существования распространения f на X' вытекает существование распространения g на X'. Подобное обобщение дается и для i-зависимости и p-зависимости отображений топологических пространств. В случае зависимости отображений в размерности n основные теоремы переносятся с тем изменением, что f достаточно заменить на гомотопически эквивалентное ему в размерности n.

J. W. Jaworowski

7865. Инвариантные метрики в однородных пространствах. Гёц (Invariante Metriken in homogenen Räumen. Goetz A.), Fundam. math., 1957, **45**, № 1, 78—83 (нем.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования в топологическом пространстве с транзитивной группой гомеоморфизмов G а) метрики, инвариантной относительно G и б) инвариантной равномерной структуры относительно G. М. И. Граев

7866. О категории Люстерника-Шнирельмана. Берштейн (Sur la catégorie de Lusternik—Schnirelmann. Berstein Israël), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 3, 362—364 (франц.)

Пусть X — топологическое пространство. Множество $U \subset X$ называется категорическим (m-категорическим), если включение $i : U \to X$ (т. е. всякое непрерывное отображение $\varphi : P \to U \subset X$ полиэдра P размерности $\leqslant m$) гомотопно нулю. Категорией cat X (m-мерной категорией cat$_m X$) пространства X называется наименьшее число $k \leqslant \infty$, для которого существует открытое покрытие пространства X, состоящее из k категорических (m-категорических) множеств. Предположим, что X — полиэдр размерности $\leqslant n$. Тогда: 1) $\operatorname{cat} X \leqslant \operatorname{cat}_m X + \left[\frac{n}{m+1}\right]$; 2) $\operatorname{cat} X \leqslant \max(\operatorname{cat}_{n-1} X, 2)$; 3) $\operatorname{cat} X = n + 1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{cat}_1 X = n + 1$ (Последнее утверждение было получено независимо референтом (РЖМат, 1959, 1326). Пусть теперь V^n — n-мерное замкнутое многообразие, $\pi_1(V^n, x_0) = \Pi$, $\pi_i(V^n, x_0) = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant k-1$, где $k - 1 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда имеет место один из следующих трех случаев:

$$1)\ \operatorname{cat} V^n = \operatorname{cat}_1 V^n = n + 1 \leqslant \dim \Pi + 1;$$

$$2)\ \operatorname{cat} V^n = \operatorname{cat}_1 V^n + 1 = \dim \Pi + 2 \leqslant n - k + 2;$$

$$3)\ \operatorname{cat}_1 V^n = 3,\ \operatorname{cat} V^n = 3 \text{ или } 4,\ \dim \Pi = 1$$

(реализуется ли третий случай, неизвестно). Размерность $\dim \Pi$ абстрактной группы Π понимается в смысле Эйленберга—Ганя (РЖМат, 1958, 210). Из только что сформулированной теоремы вытекает, что категория трехмерного многообразия V^3 целиком определяется группой $\Pi = \pi_1(V^3, x_0)$. Именно, если группа Π тривиальна, то $\operatorname{cat} V^3 = 2$, $\operatorname{cat}_1 V^3 = 1$; если Π — свободная группа, то $\operatorname{cat} V^3 = 3$, $\operatorname{cat}_1 V^3 = 2$; если $\dim \Pi \geqslant 3$, то $\operatorname{cat} V^3 = \operatorname{cat}_1 V^3 = 4$; если $\dim \Pi = 1$, но группа Π не свободна, то $\operatorname{cat} V^3 = \operatorname{cat}_1 V^3 = 3$. Неизвестно, реализуется ли последний случай; случай $\dim \Pi = 2$ невозможен. А. С. Шварц

7867. Об итерированной суспензии. Джеймс (On the iterated suspension. James I. M.), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 17, 1—10 (англ.)

Пусть S^n — n-мерная сфера, $a \in S^n$, F_n — пространство отображений сферы S^n в себя, гомотопных тождественному отображению и оставляющих на месте точку a. Пространство F_n вкладывается в пространство F_{n+k}: каждому отображению $f : S^n \to S^n$, $f \in F_n$ ставится в соответствие его k-кратная надстройка $E^k f : S^{n+k} \to S^{n+k}$, $E^k f \in F_{n+k}$. Это вложение обозначим через i. Точную (гомотопическую последовательность пары (F_{n+k}, F_n) автор использует для изучения гомотопических групп сфер. Как известно, существует изоморфизм $\varsigma : \pi_r(F_n) \to \pi_{r+n}(S^n)$ (изоморфизм Гуревича). Легко видеть, что отображение $i_* : \pi_r(F_n) \to \pi_r(F_{n+k})$ переходит при изоморфизме ς в гомоморфизм $(-1)^k \cdot E^k = \varsigma i_* \varsigma^{-1}$, где E^k — k-кратная итерация гомоморфизма надстройки: $E^k : \pi_{r+n}(S^n) \to \pi_{r+n+k}(S^{n+k})$. В пространство F_n вкладывается группа $SO(n)$ вращений сферы S^n, оставляющих на месте точку a. Это вложение обозначаем через j, а порождаемое им отображение пары $(SO(n+k), SO(n))$ в пару (F_{n+k}, F_n) через h. Автор показывает, что отображение $j_* : \pi_r(SO(n+k), SO(n)) \to \pi_r(F_{n+k}, F_n)$ при $r \leqslant 2n - 2$ является изоморфизмом. Применяя изомор-

физмы c и j_*, получаем из гомотопической точной последовательности пары (F_{n+k}, F_n) точную последовательность $\pi_{3n-2}(S^n) \xrightarrow{E^k} \ldots \to \pi_{r+n}(S^n) \to \pi_{r+n+k}(S^{n+k}) \xrightarrow{H_k} \to \pi_r(SO(n+k), SO(n)) \xrightarrow{P_k} \pi_{r+n-1}(S^n) \to \ldots$. Изучаются гомоморфизмы H_k и P_k. В частности, показывается, что $P_k = J \cdot \partial$, где $\partial : \pi_r(SO(n+k), SO(n)) \to \pi_{r-1}(SO(n))$ — граничный гомоморфизм, а $J = c j_* : \pi_{r-1}(SO(n)) \to \pi_{r+n-1}(S^n)$. Отдельно исследуется случай $k=1$ и показывается, что в этом случае построенная точная последовательность совпадает с точной последовательностью, построенной Уайтхедом (РЖМат, 1954, 3979). Указываются некоторые приложения.

А. С. Шварц

7868. Гомотопическая теория пучков сфер над сферами. I, II. Джеймс, Уайтхед (The homotopy theory of sphere bundles over sphere. I, II. James I. M., Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1954, **4**, № 14, 196—218; 1955, **5**, № 18, 148—166 (англ.)

Исследуются гомотопические свойства пространства пучка q-мерных сфер над n-мерной сферой (т. е. косого произведения с базой S^n, слоем S^q и группой $O(q+1)$). Первая часть работы посвящена косым произведениям, имеющим секущую поверхность, во второй части существование секущей поверхности не предполагается. Пусть $p : B \to S^n$ — косое произведение со слоем S^q и группой $SO(q+1)$, имеющее секущую поверхность. Обозначим через $\chi(B)$ соответствующий этому косому произведению элемент группы $\pi_{n-1}(SO(q+1))$. Пусть $i : SO(q) \to SO(q+1)$ — естественное вложение $J : \pi_{n-1}(SO(q)) \to \pi_{n+q-1}(S^q)$ — гомоморфизм, определенный в реф. 7867, $P : \pi_n(S^q) \to \pi_{n+q-1}(S^q)$ — гомоморфизм, определенный формулой $P\alpha = [\alpha, \iota_q]$, где ι_q — образующий элемент группы $\pi_q(S^q)$. Из существования секущей поверхности следует, что элемент $\chi(B)$ может быть представлен в виде $\chi(B) = i_*\xi$, где $\xi \in \pi_{n-1}(SO(q))$. Элемент $J\xi \in \pi_{n+q-1}(S^q)$ определен с точностью до элементов из группы $P\pi_n(SO(q))$, поэтому, полагая $\Lambda_{n,q} = J\pi_{n-1}(SO(q))/P\pi_n(S^q)$ и обозначая через l естественный гомоморфизм $J\pi_{n-1}(SO(q))$ на $\Lambda_{n,q}$, можно однозначно определить элемент $\lambda(B) \in \Lambda_{n,q}$ с помощью формулы $\lambda(B) = lJ\xi$. Указываются случаи, в которых определение инварианта $\lambda(B)$ может быть упрощено. Пусть $p_i : B_i \to S^n$ ($i = 1, 2$) — два косых произведения со слоем S^q и группой $SO(q+1)$, имеющие секущие поверхности, S_i^q — один из слоев в B_i. Тогда 1) пары пространств (B_1, S_1^q) и (B_2, S_2^q) гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda(B_1) = \pm\lambda(B_2)$; 2) в случае, когда одно из чисел n и q четно или $n=1$, пространства B_1 и B_2 гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda(B_1) = \pm\lambda(B_2)$; 3) если оба числа n и q нечетны и $n \geq 1$, то для гомотопической эквивалентности пространств B_1 и B_2 необходимо и достаточно, чтобы существовало число d, взаимно простое с порядком элемента $\lambda(B_1)$ и удовлетворяющее условию: $\lambda(B_2) = d\lambda(B_1)$. Указываются аналоги этих теорем для случая, когда косые произведения не имеют секущих поверхностей. При $n \leqslant 6$ вычисляется количество пучков q-мерных сфер над n-мерной сферой, пространства которых гомотопически не эквивалентны. Доказывается, что штифелевское многообразие $W_{n,2} = SO(n)/SO(n-2)$ гомотопически эквивалентно произведению сфер $S^{n-1} \times S^{n-2}$ лишь в случае, когда группа $\pi_{2n-1}(S^n)$ содержит элемент с хопфовским инвариантом 1 (т. е., как показал Адамс, лишь при $n = 2, 4, 8$). Аналогичный результат получен для комплексных и кватернионных штифелевских многообразий $U(n)/U(n-2)$ и $Sp(n)/(n-2)$. Приводятся также некоторые другие результаты.

А. С. Шварц

7869. Тождество Якоби для произведения Уайтхеда. Уэхара, Масси (The Jacobi identity for Whitehead products. Uehara Hiroshi, Massey W. S.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 361—377 (англ.)

Дается подробное доказательство тождества Якоби для произведения Уайтхеда: если $\alpha \in \pi_p(X, x)$, $\beta \in \pi_q(X, x)$, $\gamma \in \pi_r(X, x)$, $p, q, r \geq 2$, то

$$(-1)^{p(r+1)}[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{q(r+1)}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{r(q+1)}[\gamma, [\alpha, \beta]] = 0$$

(это тождество было доказано независимо многими другими авторами). Доказательство проводится следующим образом. Замечается, что достаточно провести доказательство для случая, когда $X = S_1 \vee S_2 \vee S_3$ — букет сфер размерностей соответственно p, q и r, а элементы α, β и γ представляются отображениями вложения $S_1 \to X$, $S_2 \to X_1$, $S_3 \to X$. Дается подробное описание группы $\pi_{p+q+r-2}(S_1 \vee S_2 \vee S_3)$ и на основе этого описания показывается, что элементы $[\alpha, [\beta, \gamma]]$, $[\beta, [\gamma, \alpha]]$ и $[\gamma, [\alpha, \beta]]$ связаны линейным соотношением. Наконец вычисляются коэффициенты этого линейного соотношения. В доказательстве используется тройное произведение Масси классов когомологий. Если X — топологическое пространство, A — кольцо, $u \in H^p(X; A)$, $v \in H^q(X; A)$, $w \in H^r(X; A)$ — классы когомологий (например, сингулярных когомологий), удовлетворяющие условию $uv = vw = 0$, u', v', w' — коциклы из классов когомологий u, v, w, $u' \cdot v' = \nabla a$, $v' \cdot w' = \nabla b$, то тройное произведение $\langle u, v, w \rangle$ определяется как смежный класс группы $H^{p+q+r-1}(X; A)$ по подгруппе $H^{p+q-1}(X, A) \cdot w + u \times H^{q+r-1}(X; A)$, состоящий из классов когомологий, представляемых коциклами вида $a \cdot w' + (-1)^{p-1} u' \cdot b$. В работе определяется и изучается эта операция, а также связанные с ней функциональные операции.

А. С. Шварц

7870. О теории препятствий в расслоенных пространствах. Ляо (On the theory of obstructions of fiber bundles. Liao S. D.), Ann. Math., 1954, **60**, № 1, 146—191 (англ.)

Пусть $p : E \to B$ — расслоение, база которого B является локально конечным клеточным комплексом, а слой гомеоморфен m-мерной сфере S^m ($m \geqslant 2$). Предположим, что локальная система коэффициентов, образованная группами гомологий слоя, проста (при $m > 2$ это предположение несущественно). Пусть первое препятствие к распространению секущей поверхности в расслоении $p : E \to B$ равно нулю (иначе говоря, целочисленная спектральная последовательность этого расслоения тривиальна). Тогда существует такой класс когомологий $a \in H^m(B, Z)$, что элемент i^*a является основным классом когомологий сферы S^m (здесь $i : S^m \to E$ — естественное вложение). Любой класс когомологий $S \in H^{m+k}(E; G)$ однозначно представляется в виде $s = a_\cup p^*x + p^*y$, где класс когомологий $x \in H^k(B; G)$ не зависит от выбора элемента a. Гомоморфизм β, ставящий в соответствие элементу $s \in H^{m+k}(E; G)$ построенный только что элемент $x \in H^k(B; G)$, носит название „интегрирования по слою“ (он фигурирует в точной последовательности Гизина). Пусть f — секущая поверхность над $(m+1)$-мерным остовом B^{m+1} базы B расслоения $p : E \to B$, $\Theta(f) \in H^m(E, Z)$ — элемент, определяемый соотношениями: $i^*\Theta(f)$ является основным классом когомологий сферы S^m, $f^*\Theta(f) = 0$. Тогда класс когомологий $Z^{m+2}(f) \in H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(S^m))$ препятствия к распространению f на $(m+2)$-мерный остов (т. е. второго препятствия) определяется формулами $p^* Z^{m+2}(f) = \Theta(f) \cup p^*\beta(Sq^2\Theta(f)) + Sq^2\Theta(f)$ ($m \geqslant 2$), $p^* Z^4(f) = \Theta(f) \cup p^*\beta(\Theta(f) \cup \Theta(f)) - \Theta(f) \cup \Theta(f)$ ($m = 2$

Если расслоение $p : E \to B$ — является косым произведением, структурной группой которого является группа вращений сферы S^m, то эти формулы могут быть упрощены:

$$p^*Z^{m+2}(f) = \Theta(f) \cup p^*W^2 + Sq^2\Theta(f) \quad (m > 2),$$

$$p^*Z^4(f) = \Theta(f) \cup \alpha^*\Theta(f)$$

(здесь W^2 — двумерный штифелевский класс, $\alpha : E \to E$ — отображение, переводящее каждую точку слоя в диаметрально противоположную точку того же слоя). Из этих формул автор получает формулу Болтянского, выражающую разность вторых препятствий двух секущих поверхностей через различающую этих секущих поверхностей (РЖМат, 1956, 8787).

Примечание референта. А. М. Виноградов показал, что из формулы Болтянского легко следуют формулы автора. Таким образом получаются формулы, обобщающие результаты Ляо на те классы косых произведений, которые были рассмотрены В. Г. Болтянским (РЖМат, 1958, 211). (Ляо указывает, что обобщение его формул на случай любого расслоения со слоем, асферичным в размерностях $< m$, будет содержаться в другой работе, но эта работа до сих пор не опубликована). С другой стороны, референт обнаружил, что формулы Ляо и их обобщения на расслоения со слоем, асферичным в размерностях $< m$, легко получаются непосредственно.

А. С. Шварц

7871. О кольце когомологий пучка сфер. Масси (On the cohomology ring of a sphere bundle. Massey W. S.), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 2, 265—289 (англ.)

Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоенное пространство со слоем S^{k-1}. Автор исследует строение кольца когомологий пространства E в предположении, что расслоение ориентируемо (т. е. локальная система коэффициентов, образованная группами гомологий слоя, проста) и база B компактна. Кольцо когомологий рассматривается с коэффициентами в Z или Z_m. В первой части работы устанавливается связь произведения классов когомологий в пространстве E с тройным произведением Масси классов когомологий в B (реф. 6644). Пусть $\beta : H^q(E) \to H^{q-k+1}(B)$ — гомоморфизм, фигурирующий в точной последовательности Гизина. Доказываются утверждения: 1) Если $u \in H^p(B)$, $v \in H^q(B)$, $u \cdot v = 0$ и $v \cdot W_k = 0$, то $(p^*)^{-1}(p^*u \cdot \beta^{-1}v) = (-1)^{p+1} < u, v, W_k >$; 2) Если $u \in H^p(B)$, $v \in H^q(B)$ и $u \cdot W_k = v \cdot W_k = 0$, то $\beta(\beta^{-1}u \cdot \beta^{-1}v) = (-1)^{p+k+1} < u, W_k, v >$ (здесь $W_k \in H^k(B, Z)$) — характеристический класс расслоения $p : E \to B$, левые и правые части доказываемых равенств представляют собой элементы фактор-групп группы $H^{p+q+k-1}(B)$ по одним и тем же подгруппам). Второе из этих утверждений по существу содержится в работе Хирша (РЖМат, 1956, 8681). Вторая часть работы посвящена расслоениям на сферы с характеристическим классом $W_k \in H^k(B, Z)$, равным нулю. Пусть $a \in H^{k-1}(E)$ — класс когомологий, высекающий на слое фундаментальный класс когомологий сферы S^{k-1} (иначе говоря, $\beta(a) = 1 \in H^0(B)$). Из точной последовательности Гизина следует, что всякий элемент $u \in H^q(E)$ однозначно представляется в виде $u = p^*(u_1) + a \cdot p^*(u_2)$, где $u_1 \in H^q(B)$, $u_2 \in H^{q-k+1}(B)$. В частности, $a^2 = p^*(x) + a \cdot p^*(y)$ и знание элементов x и y полностью определяет структуру кольца когомологий $H(E)$. Следует отметить, что элементы x и y зависят от выбора элемента a. Автор показывает, что в случае, когда k четно, $y = W_{k-1}$, а в случае, когда k нечетно, $y \equiv W_{k-1} \pmod 2$ (здесь W_{k-1} — $(k-1)$-мерный штифелевский класс расслоения $p : E \to B$). Если k нечетно, B — полиэдр и расслоение $p : E \to B$ является косым произведением со структурной группой $SO(k)$, то $4x + y^2 = P_{2k-2}$, где $P_{2k-2} \in H^{2k-2}(B)$ — класс Понтрягина размерности $2k-2$. Из этих утверждений и результатов Ляо (реф. 6645) получается следующая теорема: Пусть $p : E \to B$ — косое произведение со слоем S^2 и структурной группой $SO(3)$. Предположим, что B — полиэдр, $W_3 = 0$ и группа $H^4(B, Z)$ не содержит элементов порядка 2. Тогда секущая поверхность над четырехмерным остовом базы B существует в том и только в том случае, когда найдется класс когомологий $y \in H^2(B, Z)$, удовлетворяющий условиям $y \equiv W_2 \bmod 2$, $y^2 = P_4$ (Часть утверждений этой теоремы была получена У Вэнь-цзюнем (РЖМат, 1957, 1250). Указываются также приложения результатов работы к проблеме вложения дифференцируемых многообразий в евклидово пространство. Именно, показывается, что при $m > 1$ комплексное проективное пространство действительной размерности $4m$ не может быть гладко вложено в эвклидово пространство E^{6m+1}, а при $m > 2$ кватернионное проективное пространство действительной размерности $4m$ не может быть гладко вложено в E^{6m+1}.

А. С. Шварц

7872. Интерпретация формул Кундерта, относящихся к препятствиям высших порядков. Вен (An interpretation of the formulae of Kundert concerning higher obstructions. Ven A. J. H. M. van de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch 1957, **A60**, № 2, 196—200; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 196—200 (англ.)

Автор дает новую формулировку некоторых результатов Кундерта (Ann. Math., 1951, **54**, 215—246) и приводит доказательство некоторых из этих результатов.

А. С. Шварц

7873. О соотношениях между операциями Смита и степенями Стинрода. У Вэнь-цзюнь (On the relations between Smith operations and Steenrod powers. Wu Wen-tsün), Fundam. math., 1957, **44**, № 3, 262—269 (англ.)

Пусть K — конечный симплициальный комплекс, p — простое число, K^p — произведение p экземпляров пространства K, $t : K^p \to K^p$ — периодическое преобразование, определяемое формулой $t(a_1, \ldots, a_p) = (a_p, a_1, \ldots, a_{p-1})$ $(a_i \in K)$, $d_0 : K \to K^p$ — диагональное вложение: $d_0(a) = (a, a, \ldots, a)$. Обозначим через L разбиение пространства K^p на произведения клеток из симплициального разбиения K, через L' — такое симплициальное подразделение разбиения L, что $d_0 u t$ являются симплициальными отображениями. Будем рассматривать цепи и гомологии только по модулю p. Группа цепей $C(L)$ комплекса L отождествляется с тензорным произведением $C(K) \otimes \ldots \otimes C(K)$ p экземпляров групп цепей комплекса K. Через ω обозначим естественное отображение $C(L)$ в $C(L')$; гомоморфизмы групп цепей, порождаемые отображениями t и d_0, будем обозначать теми же символами. Определим гомоморфизмы $d : C(L') \to C(L')$ и $s : C(L') \to C(L')$ с помощью формул $d = 1 - t$, $s = 1 + t + \ldots + t^{p-1}$. По каждому q-мерному циклу x комплекса K построим две последовательности цепей $x_i \in C(L')$, $y_i \in C(K)$ так, что цепи x_i не содержат симплексов подкомплекса $d_0(K) \subset L'$ и выполняются равенства:

$$\omega(x \otimes \ldots \otimes x) = sx_0 + d_0 y_0,$$

$$\Delta x_0 = dx_1 + d_0 y_1, \ldots, \Delta x_{2i-1} = sx_{2i} + d_0 y_{2i},$$

$$\Delta x_{2i} = dx_{2i+1} + d_0 y_{2i+1}, \ldots.$$

(такие последовательности рассматривались Смитом). Показывается, что цепь $y_{k+(p-1)q}$ является $(q-k)$-мерным циклом, класс гомологий которого зависит только от класса гомологий цикла x. Класс гомологий этого цикла обозначается $Sm_k x$. Определенные таким образом отображения $Sm_k : H_q(K, Z_p) \to H_{q-k}(K, Z_p)$ оказываются гомоморфизмами. Гомоморфизмы Sm_k и двойственные им гомоморфизмы $Sm^k : H^{q-k}(K, Z_p) \to H^q(K, Z_p)$ групп

когомологий автор называет операциями Смита. Стинродовские степени обозначаются $St^k : H^{q-k}(K, Z_p) \to H^q(K, Z_p)$.

Доказывается следующая теорема: Смитовские операции и стинродовские степени определяют друг друга с помощью соотношений: $Sm^0St^0 = 1$; $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j Sm^{k-j} \times St^j = 0$, если $k > 0$ и $p = 2$, или pk нечетно; $\sum_{j=0}^{k} Sm^{2k-2j} St^{2j} = 0$, если $k > 0$ и $p > 2$. Эта теорема была впервые доказана автором (Colloque de topologie de Strasbourg, 1951) с помощью аксиоматического определения степеней Стинрода, данного Томом. В реферируемой статье дается прямое доказательство. Из формул, связывающих Sm^k и St^j, вытекает, что операции Sm^k только численными множителями отличаются от введенных Томом гомоморфизмов $Q^k : H^{q-k}(K, Z_p) \to H^q(K, Z_p)$. А. С. Шварц

7874. **О соотношениях между операциями Смита и степенями Стинрода.** У Вэнь-цзюнь (Wu Wen-tsün), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 2, 235—241 (кит.; рез. англ.)

Китайский вариант одноименной работы автора (реф. 7873). А. С. Шварц

7875. **Приведенные степени Стинрода в спектральной последовательности расслоенного пространства.** Араки (Steenrod reduced powers in the spectral sequences associated with a fibering. II. Araki Shoro), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1957, **A11**, № 2, 81—97 (англ.)

Тем же способом, что и в предыдущей работе автора РЖМат, 1958, 4603), в спектральной последовательности $\{E_r^{p,q}(Z_p)\}$ расслоенного пространства $p : E \to B$ определяется система гомоморфизмов

$$ {}_FP^S : E_r^{a,b} \to E_r^{a,b+2s(p-1)},\ 1 \leqslant r \leqslant \infty,\ p > 2, $$

$$ {}_BP^S : E_r^{a,b} \to E_{p(r-2)+2}^{a+(2S-b)(p-1),pb},\ 2 \leqslant r \leqslant \infty,\ p > 2, $$

$$ {}_FSq^j : E_r^{a,b} \to E_r^{a,b+j},\ 1 \leqslant r \leqslant \infty, $$

$$ {}_BSq^j : E_r^{a,b} \to E_{2r-2}^{a+j-b,2b},\ 2 \leqslant r \leqslant \infty,\ p = 2, $$

которые автор называет соответственно приведенными степенями типа F и типа B. Приведенные степени естественны по отношению к отображениям расслоенных пространств и обладают следующими свойствами: 1) ${}_FP^S = 0$, если $s < 0$ или $Rs > b$; ${}_BP^S = 0$, если $2s < b$; ${}_FSq^j = 0$, если $j < 0$ или $j > b$; ${}_BSq^j = 0$, если $j < b$; 2) ${}_FPp^0$ и ${}_FSq^0$ — тождественные отображения 3) ${}_BSq^b = \varkappa^r_{2r-2} \circ {}_FSq^b$ на группе $E_r^{a,b}$; ${}_BP^b = \varkappa^r_{p(r-2)+2} \circ {}_FP^b$ на группе $E_r^{a,2b}$; на группах $E_r^{0,b}$ и $E_r^{0,2b}$ ${}_FSq^b$ и ${}_FP^b$ являются соответственно возведениями в квадрат и степень p; 4) если расслоение имеет линейно связные слои, а его локальные коэффициенты тривиальны, то операции ${}_FP^S$ и P^S совпадают на группе $H^a(F) = E^{0,a}$, а операции ${}_BP^S$ и P^S — на группе $H^a(B) = E^{a,0}$; далее, ${}_FP^S = 0$, $s > 0$, на группе $H^a(B)$ и ${}_BP^S = 0$, $b \neq 2b'$, $s \neq b$, на группе $H^b(F)$. Имеют место также соотношения между операциями и дифференциалами. Укажем некоторые из них: $d_l \circ {}_FP^S = 0$ при $r - 1 \leqslant l \leqslant \max(r-1, (p-1)(r+2s-b-1)+r-1)$, $d_l \circ {}_BP^S = 0$ при $p(r-2)+1 \leqslant l \leqslant p(r-1)$; ${}_FP^S \circ d_r = d_r \circ {}_FP^S$ при $0 \leqslant 2s \leqslant b-r+1$, $\varkappa_\mu^{p(r-2)+2} \circ {}_BP^S \circ d_r = d_\mu \circ \varkappa^r_{\mu \circ {}_FP^S}$ при $b-r+1 \leqslant 2s \leqslant b$, где $\mu = p(r-1) + (2s-b)(p-1)+1$. Доказаны некоторые соотношения коммутативности между операциями и g-трансгрессией τ. Например,

$$ \varkappa^{p(b-1)+2}_{2s(p-1)+b+1} \circ {}_BP^S \circ \tau(x) = \tau \circ {}_FP^S(x) \text{ для } 0 \leqslant 2s \leqslant b \text{ и} $$

$$ \varkappa^{p(b-1)+2}_{pb+1} \circ {}_BP^S \circ \tau(x) = \tau \circ {}_BP^S(x) \text{ для } b \leqslant 2s \leqslant a+b, $$

$$ x \in E_2^{a,b}. $$

Формула Картана доказана без всяких ограничений на область определения. Методом, использованным при доказательстве этой формулы, показано, что при естественном изоморфизме $E_2^{a,b} \approx H^a(B) \otimes H^b(F)$ операции ${}_FP^S$ и ${}_BP^S$ переходят соответственно в операции $i \otimes P^S$ и $P^{s-b/2} \otimes l$, где i — тождественное отображение, а l — операции возведения в степень p. Пусть $x \in E_r^{a,b}$, $y \in E_r^{c,d}$; тогда выполнены соотношения

$$ {}_BP^S(x \cup y) = {}_BP^{s-d/2} x \cup \varkappa^r_{p(r-2)+2} y^p,\ d \text{ — четно},\ c = 0, $$

$$ {}_BP^S(x \cup y) = 0,\ d \text{ — нечетно},\ c = 0,\ {}_FP^S(x \cup y) = $$

$$ = x \cup {}_FP^S y,\ b = 0. $$

Соотношения Адема доказаны также и при $p > 2$:

$$ {}_FP^a \cdot {}_FP^b = $$

$$ = \sum_{i=0}^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(b-i)(p-1)-1}{a-pi} {}_FP^{a+b-i} {}_FP^i, $$

$$ r \geqslant 1,\ a < pb, $$

$$ {}_BP^a {}_BP^b = $$

$$ = \sum_{i=0}^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(b-i)(p-1)-1}{a-pi} {}_BP^{a+b-i} \circ {}_BP^i, $$

$$ r \geqslant 2,\ a < pb. $$

Устанавливается, что новые операции совпадают с операциями, введенными автором ранее. Для новых операций оказывается справедливой теорема Тома, в силу чего автор, определив операции ${}_FSt^n$ и ${}_BSt^n$, рассматривает лишь операции ${}_FP^S$ и ${}_BP^S$. Л. Н. Ивановский

7876. **Гомотопические множества и их индуцированные отображения. I.** Пуппе (Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I. Puppe Dieter), Math. Z., 1958, **69**, № 4, 299—344 (нем.)

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение (из категории пространств с отмеченной точкой), а C_f — его „конус", т. е. пространство, получающееся из цилиндра отображения f стягиванием в точку „нижнего основания". Пространство C_f содержит пространство Y, причем в результате стягивания последнего пространства в точку из конуса C_f получается надстройка SX над пространством X. Так как конус C_{Sf} надстройки $S_f : SX \to SY$ над отображением f является надстройкой SC_f над конусом C_f, то возникает следующая бесконечная последовательность

$$ X \to Y \to C_f \to SX \to SY \to SC_f \to S^2X \to \ldots \qquad (1) $$

Эта последовательность точна в том смысле, что для любого пространства V индуцированная последовательность

$$ \pi(X,V) \leftarrow \pi(Y,V) \leftarrow \pi(C_f, V) \leftarrow \pi(SX, V) \leftarrow \ldots $$

точна в обычном алгебраическом смысле; через $\pi(X, V)$ обозначается множество всех гомотопических классов $X \to V$ (в категории пространств с отмеченными точками); понятие точной последовательности таких множеств определено потому, что каждое из них содержит нуль-элемент (класс постоянного отображения). Кроме того последовательность (1) гомотопически инвариантна, т. е. при замене отображения f другим отображением $f' : X' \to Y'$, имеющим (в понятном смысле) тот же гомотопический тип, гомотопический тип последовательности (1) не меняется. В качестве применения этих общих результатов автор доказывает, что если надстройка $S_f : SX \to SY$ гомотопически обратима справа, а X и Y являются связными полиэдрами, причем полиэдр Y односвязен, то для любого пространства V индуцированное отображение $f^* : \pi(Y, V) \to \pi(X, V)$ изоморфно (т. е. обладает тривиальным ядром), а при некоторых дополнительных предположениях даже инъективно (т. е. различные элементы переводит в различные). В заключение автор рассматривает операцию приведенного соединения и доказывает, в частности, ее гомотопическую ассоциативность. Здесь же выведена интересная формула для надстройки над топологическим произведением. Для случая двух сомножителей эта формула утверждает, что пространство $S(X \times Y)$ имеет гомотопический тип пространства $SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$, где $\vee$ — „букетное" объединение, а $\wedge$ — приведенное соединение. М. М. Постников

7877. Гомотопические множества и их индуцированные отображения. II. Многообразия, подобные сфере. Пуппе (Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen II. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten. Puppe Dieter), Math. Z., 1958, **69**, № 5, 395—417 (нем.)

Пусть P^n — ориентируемое n-мерное псевдомногообразие и $g : P^n \to S^n$ — его непрерывное отображение на n-мерную сферу, имеющее степень 1. Псевдомногообразие P^n автор называет подобным сфере, если для любого топологического пространства V и любых отображений $a, a' : S^n \to V$ из соотношения $g \circ a \sim g \circ a'$ следует, что $a \sim a'$ (это свойство псевдомногообразия P^n не зависит от выбора отображения g). Автор доказывает (существенно используя результаты предыдущей работы реф. 6651), что: 1) псевдомногообразие P^n тогда и только тогда подобно сфере, когда естественное отображение $\pi_{n+1}(SP^n) \to H_{n+1}(SP^n)$ эпиморфно (SP^n — надстройка над P^n); 2) прямое произведение псевдомногообразий, подобных сфере, также подобно сфере (этот факт был неизвестен даже для сфер); 3) „сумма" двух псевдомногообразий (получающаяся вырезыванием из данных псевдомногообразий по n-мерному шару и отождествлением их границ) тогда и только тогда подобна сфере, когда этим свойством обладает каждое „слагаемое"; 4) если псевдомногообразие P^n подобно сфере, то ни один отличный от нуля $n+1$-мерный класс когомологий псевдомногообразия SP^n (над произвольной областью коэффициентов) не является результатом применения некоторой когомологической операции к классам низших размерностей; откуда, в частности, следует, что ни один отличный от нуля n-мерный класс когомологий псевдомногообразия P^n (по модулю p) не является результатом применения приведенных степеней Стинрода к классам низших размерностей; если n нечетно, то аналогичное утверждение имеет место и для операции референта (обозначаемой Уайтхедом (Whitehead, Ann. Math., 1951, **54**, 68—84) символом P_0); 5) для $n \leqslant 3$ указанное в 4) необходимое условие оказывается также и достаточным, причем для $n = 2$ оно выполнено автоматически (т. е. любое двумерное псевдомногообразие подобно сфере), а для $n = 3$ оно сводится к требованию равенства нулю операции P_0. Особое внимание автор уделяет случаю, когда псевдомногообразие P^n является гладким многообразием M^n. Для этого случая автор доказывает, что 1) если многообразие M^n можно вложить (пусть даже не гладко) в пространство R^{n+1}, то многообразие M^n подобно сфере (обратное неверно даже для $n = 3$); 2) многообразие M^n тогда и только тогда подобно сфере, когда оно является образом некоторого вложимого (в смысле 1) многообразия при отображении степени 1; 3) для многообразия, подобного сфере, все классы Штифеля — Уитни (кроме конечно нульмерного) равны нулю, т. е. оно внутренне гомологично нулю по модулю 2; 4) трехмерное многообразие тогда и только тогда подобно сфере, когда знаменатель коэффициента самозацепления любого его одномерного класса гомологий порядка 2^k (где k произвольно) делится на 2^{k-1}; 5) для линзовых пространств (p, q) последнее условие выполнено тогда и только тогда, когда p нечетно.

М. М. Постников

7878. Векторные поля, снабженные весом на компактном комплексном многообразии. Везентини (Campi di vettori dotati di peso sopra una varietà complessa compatta. Vesentini Edoardo), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 4, 564—580 (итал.)

На аналитическом многообразии комплексной размерности m рассматривается поле F контравариантных комплексных векторов $v = \{v^\alpha\}$ веса $(w, \bar{w})$, т. е. преобразующихся при переходе от одних локальных координат к другим по формуле $v^{\alpha'} = J^w \bar{J}^{\bar{w}} v^\alpha \dfrac{\partial z'^\alpha}{\partial z^\alpha}$, где J — якобиан преобразования $\dfrac{\partial(z^1, \ldots, z^m)}{\partial(z'^1, \ldots, z'^m)}$, $\bar{J}$ — его комплексное сопряженное, w и $\bar{w}$ — данные целые числа. Показывается, что двумерная различающая коцепь $d(F, G)$ такого векторного поля и векторного поля G веса $(0, 0)$, расположенных без особенностей, т. е. без обращения вектора поля в нуль, на трехмерном остове некоторой триангуляции многообразия, дается соотношением $d(F, G) = (\bar{w} - w)\, c_m$, где c_r $(r = 1, \ldots, m)$ — классы Чжэнь Шэн-шеня (Черна) рассматриваемого многообразия. Подставляя это значение различающей коцепи в формулы, найденные Кундертом (Kundert E. G., Ann. Math., 1951, **54**, 215—246), автор получает соотношение

$$c_1^* = (\bar{w} - w)^{m-1} (\bar{w} - w - 1)\, (c_m)^m + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} ((\bar{w} - w)\, c_m)^{i-1} \cdot c_i \quad (m > 1),$$

выражающее класс когомологий c_1^* препятствия к продолжению без особенностей поля F на все многообразие с его $(2m-1)$-мерного остова через классы Чжэнь Шэн-шеня этого многообразия, причем умножение и возведение в степень классов когомологий понимается в смысле Колмогорова-Александера. Таким же образом получается более общая формула, выражающая через классы Чжэнь Шэн-шеня класс когомологий c_r^* препятствия к продолжению системы r линейно независимых векторных полей весов $(w_1, \bar{w}_1), \ldots, (w_r, \bar{w}_r)$ $(r = 1, \ldots, m)$ с $(2m - 2r + 1)$-мерного на $(2m - 2r + 2)$-мерный остов многообразия. Аналогичные формулы находятся и для случая ковариантных векторных полей. Если M есть неприводимое алгебраическое многообразие без особенностей комплексной размерности m $(m > 1)$, на котором заданы r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ замкнутых дифференциальных форм типа $(m-1, 0)$

$$jQ = jQ_{1 \ldots \hat{\alpha} \ldots m}\, dz^1 \ldots \hat{dz^\alpha} \ldots dz^m \quad (\alpha = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, r),$$

то эти формы естественно порождают на многообразии r ковариантных векторных полей весов $(0, 1)$. Формулы, выражающие соответствующий класс когомологий c_{*r}

через классы Чжэнь Шэн-шеня многообразия, принимают здесь вид

$$c_{*r} = \binom{m-1}{r-2}(c_m)^{m+1-r} + \sum_{i=r}^{m-1}(-1)^{m-i+1}\binom{i-1}{r-1}c_i\,(c_m)^{i-r}\quad (r>1),$$

$$c_{*1} = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i+1}\,c_i\,(c_m)^{i-1}.$$

Оказывается, что этот класс когомологий c_{*r} будет с точностью до знака двойственным $(2r-2)$-мерному классу гомологий, содержащему в качестве представителя подмногообразие многообразия M, состоящее из точек, в которых матрица коэффициентов $Q = \| jQ_{1\ldots\hat{a}\ldots m} \|$ имеет ранг $< r$, если только это подмногообразие будет чистым алгебраическим многообразием (комплексной) размерности $\leqslant r-1$. М. Ф. Бокштейн

7879. Поля комплексных линейных элементов на компактном комплексном многообразии. Везентини (Campi di elementi lineari complessi sopra una varietà complessa compatts. Vesentini Edoardo), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **42**, 325—379 (итал.)

Дается доказательство результатов, приведенных в более ранней статье автора (РЖМат, 1957, 6652). Для мероморфной функции F, заданной на компактном комплексном многообразии M комплексной размерности m и удовлетворяющей перечисленным там условиям, выводится формула, дающая число ν поверхностей постоянного уровня этой функции, имеющих двойные точки:

$$\nu = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i+1}\,i\,I\,((S)^{i-1}\,C_{2i-2}),$$

где C_r — r-й класс гомологий Чжэнь Шэн-шеня (Черна), а (S) — класс гомологий основного цикла естественным образом ориентированного подмногообразия S, локально получающегося в результате приравнивания нулю знаменателя мероморфной функции, причем умножение и возведение в степень классов гомологий понимаются как взятие их пересечений, а символ I означает нахождение индекса Кронекера (суммы коэффициентов) нульмерной цепи. В случае $m=2$ эта формула превращается в формулу, ранее найденную Хирцебрухом (РЖМат, 1954, 2328), однако случай $m>2$ требует нового доказательства, так как множество точек неопределенности функции F уже не будет более состоять из изолированных точек, а превращается в подмногообразие положительной размерности, что мешает пользоваться обычной теорией препятствий. Эта трудность преодолевается с помощью предложенного Томом выделения этого подмногообразия его геодезической трубчатой окрестностью. В качестве более общей постановки задачи на многообразии M рассматривается r мероморфных функций $F^1, \ldots, F^r$. Им ставится в соответствие $(2r-2)$-мерный целочисленный класс гомологий $J(F^1, \ldots, F^r)$, являющийся классом гомологий естественно ориентированного основного цикла подмногообразия точек соприкосновения поверхностей уровня этих функций. Доказывается формула, выражающая этот класс через классы Чжэнь Шэн-шеня многообразия M и классы гомологий основных циклов подмногообразий, определенных заданными на M мероморфными функциями, и дающая вышеприведенную формулу в случае $r=1$. Для получения этих результатов во вступительной части работы предварительно выводится некоторое обобщение результатов, приведенных в предыдущем реферате (реф. 7888), относящееся к более общему, чем там указано, преобразованию локальных координат векторного поля — вместо множителя $J^w\overline{J^w}$ рассматривается произвольная скалярная комплексная функция, образующая на многообразии M (или даже на произвольном связном конечном полиэдре) сечение расслоенного пучка комплексных прямых. М. Ф. Бокштейн

7880 К. Расслоенные пространства и их приложения. Сб. перев. ред. Болтянский В. Г., Дынкин Е. Б., Постников М. М. М., Изд-во ин. лит., 1958, 460 стр., 30 р. 15 к.

7881 К. Введение в топологию. Спрингер (Einführung in die Topologie. Springer George. Münster, Aschendorffsche Verlagsbuchhandl., 1955, vii, 192 S., 15.00 DM) (нем.)

Популярная брошюра.

См. также: 7802, 7897, 8127, 8154, 8494

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

7882. Заметка о теореме Гаусса—Грина. Федерер (A note on the Gauss—Green theorem. Federer Herbert), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 447—451 (англ.)

Пусть $A \subset E_n$ измеримо в смысле лебеговой меры L_n. Единичный вектор u называется внешней нормалью к множеству A в точке x, если

$$r^{-n}L_n(\{y \mid |y-x|<r,\ (y-x)\cdot u<0,\ y\notin A\}) \to 0,$$
$$r^{-n}L_n(\{y \mid |y-x|<r,\ (y-x)\cdot u>0,\ y\in A\}) \to 0$$

при $r\to+0$, где $\cdot$ означает скалярное произведение. Если такой вектор существует, то он единственен и обозначается через $\nu(A,x)$. Если такого вектора не существует, то принимаем $\nu(A,x)=0$.

Доказывается, что для любой дифференцируемой в E_n функции f, обращающейся в нуль на бесконечности, условие

$$H_n^{n-1}(\{x \mid |\nu(A,x)|=1\})<\infty \text{ и } \int_A D_i f dL_n = \int_{E_n} f(x)\,\nu_i(A,x)\,d\,H_n^{n-1}\,x$$

для $i=1,2,\ldots,n$, где H_n^{n-1} означает $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, D_i — частную производную по соответствующему направлению и ν_i — составляющую вектора ν эквивалентно каждому из условий Де-Джорджи (РЖМат, 1955, 5696):

1) Существуют конечные действительные борелевские меры $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ такие, что

$$\int_A D_i f dL_n = \int_{E_n} f d\,\Phi_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

2) Существуют число M и бесконечная последовательность множеств A_j с полиэдральными (или гладкими) границами B_j такие, что

$L_n[(A-A_j)\cup(A_j-A)] \to 0$ при $j\to\infty$ и $H_n^{n-1}(B_j)\leqslant M$ для всех целых $j>0$. Р. С. Гутер

7883. Об интегральном представлении измеримых функций с ядрами, порождающими унитарные преобразования пространства $L_2(0,\infty)$. Талалян А. А., Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, **26**, № 5, 257—261 (рез. арм.)

Пусть функции $K=K(x,t)$, $L=L(x,t)$ определены на множестве $\{[0,\infty)\cdot[0,\infty)\}$ и являются ядрами унитарных преобразований пространства $L_2(0,\infty)$ такими, что для любой функции $f=f(x)\in L_2(0,\infty)$ имеем

$$\lim_{a\to\infty}\|g-\int_0^a Kf\,dt\|_{L_2}=0,\quad \lim_{a\to\infty}\|f-\int_0^a Lg\,dt\|_{L_2}=0 \qquad (1)$$

и для любых $a>0$, $b>0$ существуют интегралы

$$\int_0^a\int_0^b K^2(x,t)\,dx\,dt,\quad \int_0^a\int_0^b L^2(x,t)\,dx\,dt. \qquad (2)$$

Последовательность функций $\{f_n\}$ обобщенно сходится в среднем к f на $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое множество $E\subset[a,b]$, что $|E|>b-a-\varepsilon$ и на E последовательность сходится в среднем к функции $f(x)$.

При предположениях (1) и (2) формулируются следующие теоремы:

1. Для любой измеримой функции f, определенной на $(0,\infty)$, существует измеримая функция $\tau\in L_2(0,a)$ для любого $a>0$ и такая, что на любом конечном интервале $(\alpha,\beta)\subset[0,\infty)$ выражение

$$\int_0^a L(x,t)\,\tau(t)\,dt \qquad (3)$$

сходится по мере к функции $f(x)$.

2. Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0,\infty)$, существует измеримая функция $\tau(x)\in L_2(0,a)$ для любого $a>0$ и такая, что выражение (3) обобщенно сходится в среднем к функции $f(x)$ на любом конечном интервале $(\alpha,\beta)\subset[0,\infty)$.

Далее доказывается, что для функции $f(x)\sim 0$ существует такая отличная от нуля функция $\tau(x)$, что выражение (3) обобщенно сходится в среднем к нулю на любом конечном интервале. А. Г. Джваршейшвили

7884. **О сингулярных интегралах. I. Коидзуми** (On the singular integrals. I. Koizumi Sumiyuki), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 4, 193—198 (англ.)

Пусть P и Q — точки n-мерного евклидова пространства E^n, $K(P-Q)=|P-Q|^{-n}\Omega[(P-Q)/|P-Q|]$, причем

$$\int_\Sigma \Omega(P)\,d\sigma=0,\quad \int_0^1 \omega(t)\,t^{-1}\,dt<\infty,$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $\Omega(P)$, Σ — единичная сфера и $d\sigma$ — элемент ее поверхности. Положим

$$\widetilde{f}_\lambda(P)=\int_{|P-Q|>\lambda^{-1}} K(P-Q)\,f(Q)\,dQ,\quad \widetilde{f}_*(P)=\sup_{\lambda>0}\widetilde{f}_\lambda(P).$$

Пусть функция $\varphi(u)$ непрерывна и монотонно возрастает в промежутке $0\leqslant u<\infty$, причем $\varphi(0)=0$. Пусть еще при $u\to\infty$

$$\varphi(2u)=O(\varphi(u)),\quad \int_1^u t^{-2}\varphi(t)\,dt=O(u^{-1}\varphi(u)), \qquad (1)$$

$$\int_u^\infty t^{-r-1}\varphi(t)\,dt=O(u^{-r}\varphi(u)),\quad 1<r<\infty;$$

и при $u\to 0$

$$\varphi(2u)=O(\varphi(u)),\quad \int_0^u t^{-2}\varphi(t)\,dt=O(u^{-1}\varphi(u)),$$

$$\int_u^1 t^{-r-1}\varphi(t)\,dt=O(u^{-r}\varphi(u)),\ 1<r\leqslant\infty. \qquad (2)$$

Через L^φ обозначен класс функций $f(P)$, для которых функция $\varphi(|f|)$ суммируема.

Теорема 2. Пусть $f(P)\in L^\varphi$. Тогда почти всюду в E^n существует $\widetilde{f}(P)=\lim_{\lambda\to\infty}\widetilde{f}_\lambda(P)$ и имеют место соотношения $\|\widetilde{f}_\lambda\|_\varphi\leqslant A_\varphi\|f\|_\varphi$, $\|\widetilde{f}\|_\varphi\leqslant A_\varphi\|f\|_\varphi$, $\lim_{\lambda\to\infty}\|\widetilde{f}_\lambda-\widetilde{f}\|_\varphi=0$, $\|\widetilde{f}_*\|_\varphi\leqslant A_\varphi\|f\|_\varphi$, в которых A_φ не зависит от f.

Символ $\|f\|_\varphi$ не пояснен; судя по доказательству, он означает интеграл $\int_{E^n}\varphi(|f|)dP$. Доказательство теоремы 2 основано на некотором усилении теоремы Зигмунда об интерполяции операторов (РЖМат, 1957, 2980). С. Г. Михлин

7885. **О сингулярных интегралах. II. Коидзуми** (On the singular nitegrals. II. Koizumi Simuyuki), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 5, 235—240 (англ.)

Пусть $\{x_l\}$ — последовательность точек n-мерного пространства, имеющих целочисленные координаты, причем $x_0=0$. Далее, $K(x)=|x|^{-n}\Omega(x')$, $x'=x/|x|$, и $\int_\Sigma\Omega(x')\,d\sigma=0$, где Σ — единичная сфера и $d\sigma$ — ее элемент. Предполагается, что модуль непрерывности $\omega(\delta)$ функции $\Omega(x')$ удовлетворяет условию Дини $\int_0^1\omega(\delta)\,\delta^{-1}d\delta<\infty$.

Рассматривается сингулярный интеграл

$$\widetilde{f}^*(x)=\int_R f(y)\,K^*(x-y)\,dy,$$

где R — куб $|y_i|\leqslant 1/2$, $i=1,2,\ldots,n$, и $K^*(x)=K(x)+\sum_{l=1}^\infty\{K(x+x_l)-K(x_l)\}$. Пусть $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям, упомянутым в реф. 7884, кроме условий (2). Пусть, далее, функция $\varkappa(u)$ равна нулю при $0\leqslant u\leqslant 1$, положительна и возрастает при $u>1$ и удовлетворяет соотношениям

$$\varkappa(2u)=O(\varkappa(u)),\quad \int_u^\infty t^{-r-1}\varkappa(t)\,dt=O(u^{-r}\varkappa(u)),$$
$$1<r<\infty.$$

Положим

$$\varkappa^*(u)=u\int_1^u t^{-2}\varkappa(t)\,dt.$$

Доказывается ряд теорем, обобщающих соответствующие теоремы Кальдерона и Зигмунда (РЖМат, 1956, 1238) для периодических сингулярных ядер. Приведем две из этих теорем.

Теорема 7. Если $f\in L^\varphi$, то $\widetilde{f}^*\in L^\varphi$ и

$$\int_R\varphi(|\widetilde{f}^*|)\,dx\leqslant A\int_R\varphi(|f|)\,dx+B.$$

Теорема 8. Если $f\in L^{\varkappa^*}$, то $\widetilde{f}^*\in L^\varkappa$ и

$$\int_R\varkappa(|\widetilde{f}^*|)\,dx\leqslant A\int_R\varkappa^*(|f|)\,dx+B.$$

С. Г. Михлин

7886. **К вопросу о классах насыщения сингулярных интегральных операторов. Бутцер** (Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. Butzer Paul L.), Math. Z., 1958, 70, № 1, 93—112 (нем.)

Сингулярный интегральный оператор

$$U_n(f;x)=\int_a^b f(t)\,\Phi_n(t;x)\,dt$$

называется (по терминологии Фавара) насыщенным в нормированном пространстве E, если существует убывающая к нулю функция от n такая, что норма разности $U_n(f;x)-f(x)$ в пространстве E не может стремиться к нулю быстрее, чем $\varphi(n)$, за исключением какого-либо тривиального случая (например, $f(x)=\text{const}$). Совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|U_n(f;x)-f(x)\|_E=O[\varphi(n)],$$

образует класс насыщения оператора $U_n(f;x)$.

Примером ненасыщенного оператора в пространстве непрерывных периодических функций является сингулярный интеграл Дирихле, выражающий n-ю частную

сумму ряда Фурье. В обзорной части реферируемой статьи приводится большой список насыщенных сингулярных операторов и их классов насыщения в различных пространствах.

Доказано несколько новых аппроксимационных теорем, касающихся сингулярных интегралов Вейерштрасса

$$W_\xi(f;\ x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(t-x)^2/\xi}\,dt$$

и Пикара

$$P_\xi(f;\ x) = \frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-|t-x|/\xi}\,dt.$$

Приведем теоремы, относящиеся к $W_\xi(f;\ x)$.

Если $f(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ и

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| = O(h^{1+\alpha}),\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

то при $\xi\to 0$

$$\|W_\xi(f;\ x)-f(x)\|_C = O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right).$$

Если $f(x)$ ограничена на $(-\infty,\ \infty)$ и существует $f''(x_0)$, то

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}[W_\xi(f;\ x_0)-f(x_0)] = \frac{1}{4}f''(x_0).$$

Если $f(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ и

$$\int_0^h dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dx = O(h^{2+\alpha}),$$

$$0<\alpha\leqslant 1,\quad \text{то при } \xi\to 0$$

$$\|W_\xi f;\ (x)-f(x)\|_{L_1} = O\left(\xi^{\frac{1+\alpha}{2}}\right).$$

Приближения в пространстве L_p при $1<p<\infty$ рассмотрены в другой работе автора (РЖМат, 1958, 4855).

Проблемы, связанные с определением классов насыщения сингулярных интегралов Валле-Пуссена и Бернштейна — Рогозинского, поставленные в работе, уже решены (РЖМат, 1959, 4611 Д, реф. 7908).

Ф. И. Харшиладзе

7887. Замечание. Люксембург (Remark. Luxemburg W. A. J.), Canad. Math. Bull., 1958, 1, № 1, 30 (англ.)

На пространстве $L(0,\ 2\pi)$ измеримых по Лебегу 2π-периодических функций $f(x)$ определяется функционал $\lambda(f)$, $0\leqslant\lambda(f)=\lambda(|f|)\leqslant\infty$ со свойствами:

1) каково бы ни было a, $\lambda(f_a)=\lambda(f)$, где $f_a(x)=f(x+a)$;

2) $\lambda(kf)=|k|\lambda(f)$, $\lambda(f_1+f_2)\leqslant\lambda(f_1)+\lambda(f_2)$;

3) для каждого измеримого подмножества $E\subset[0,\ 2\pi]$ существует константа Λ_E $(0\leqslant\Lambda_E<\infty)$ такая, что $\int_E|f(x)|\,dx\leqslant\Lambda_E\lambda(f)$ для всех $f\in L(0,2\pi)$.

Пусть

$$\omega_\lambda(\partial) = \sup_{0<h<\partial}\lambda(f(x+h)-f(x)).$$

Доказывается, что если $\lim\limits_{\partial\to 0}\dfrac{\omega_\lambda(\partial)}{\partial}=0$, то функция $f(x)$ почти всюду равна константе.

Опечатки: 1) в строке 14 сверху вместо $\to\infty$ должно быть $\to 0$, 2) в строке 2 снизу вместо (f) должно быть $\lambda(f)$.

И. М. Ганзбург

7888. О частичной непрерывности функций нескольких переменных. Зандере М. К., Уч. зап. Латв. ун-т, 1958, 20, 47—55 (рез. лат.)

Пусть даны функция $f(x)$ $(x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n))$ в некоторой области пространства R^n и система множеств $\mathfrak{M}^1+\mathfrak{M}^{n-1}$, где элементами $\mathfrak{M}^1$ являются гомеоморфы отрезка, а элементами $\mathfrak{M}^{n-1}$—гомеоморфы $(n-1)$-мерного куба. Предполагается, что система удовлетворяет определенной совокупности условий. Пусть, далее (A) $f(x)$ непрерывна вдоль элементов $\mathfrak{M}^1$; (B) для произвольных точки x, ее окрестности U и числа $\varepsilon>0$ найдется такая точка $x_1\in U$, что на каждом содержащем x_1 элементе $M\in\mathfrak{M}^{n-1}$ существует открытое (в M) множество $H\subset U$, $x_1\in H$, для которого колебание $f(x)$ на $\{x_0\}+H$ меньше ε.

При этих условиях доказывается, что множество точек непрерывности $f(x)$ всюду плотно на любом множестве L, являющемся гомеоморфом $(n-1)$-мерного куба и удовлетворяющем некоторому дополнительному условию. Показано, что функция, непрерывная по каждому из аргументов, удовлетворяет условиям (A) и (B) и, следовательно, имеет всюду плотное множество точек непрерывности на каждом гомеоморфе $(n-1)$-мерного куба.

Этот результат обобщает (при $n=2,\ 3$) теорему Бэра о том, что функция, непрерывная по каждому из аргументов, имеет всюду плотное множество точек непрерывности на каждой кривой $y=\varphi(x)$ $(n=2)$ или поверхности $z=\varphi(x,\ y)$ $(n=3)$, а также теорему Хана о том, что функция, непрерывная по каждому из аргументов (n—любое), имеет всюду плотное множество точек непрерывности на каждой гиперплоскости $x_i=\text{const}$, $i=1,\ 2,\ldots,n$.

Г. Х. Синдаловский

7889. Функции, удовлетворяющие условию (N)-Лузина. Шмидов Ф. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, 3, 256—258

Приводится доказательство теоремы о том, что из конечности одного из производных чисел Дини функции $f(x)$ на E следует, что $f(x)$ удовлетворяет на E условию (N).

Формулируется определение (определение 1) того, что функция $F(x,\ y)$, заданная на некотором множестве E, удовлетворяет условию (N). Далее дано определение 2: Пусть $(x_0,\ y_0)=p_0\in E$ и $\varphi(p_0)$ — угол в плоскости xOy с вершиной в p_0. Через E_φ обозначим часть множества E, попавшую в угол $\varphi(p_0)$.

Точка p_0 называется регулярной, если найдутся числа $\lambda>0$ и $\varphi>0$ такие, что на E_φ выполняется

$$\psi(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = \frac{F(x,\ y)-F(x_0,\ y_0)}{|x-x_0|+|y-y_0|} < \lambda\ (\text{или } > -\lambda).$$

Приводится теорема 2: Пусть $F(x,\ y)$ — конечная функция, определенная на E, и пусть все точки множества E регулярны. Тогда $F(x,\ y)$ удовлетворяет на множестве E условию (N).

Примечание референта. Определение 1 дано в статье нечетко, поэтому мы его не формулируем; если его понимать дословно, то теорема 2 неверна. Автор в своем письме в редакцию сообщил, что это определение надо понимать следующим образом. Пусть на множестве E точек $(x,\ y)$ задана функция $F(x,\ y)$, $H\subset E$, $B(F;\ H)$ есть график функции F на H и Q — некоторая плоскость, проходящая через ось z пространства $(x,\ y,\ z)$.

Определение 1′. Функция F удовлетворяет условию (N) на E, если для каждого множества $H\subset E$ нулевой плоской меры проекция $B(F,\ H)$ на любую плоскость Q также имеет нулевую плоскую меру. Однако следующий пример показывает, что и при этом определении теорема 2 ошибочна. Пример: Пусть $\varphi(t)$, $-\infty<t<+\infty$ — сингулярная монотонно неубываю-

щая функция, растущая от нуля до единицы на множестве H_0 нулевой длины. Тогда $F(x, y) \equiv \varphi(x)$ будет регулярной в любой точке $p_0 = (x_0, y_0)$. Действительно, за E_φ можно принять полуплоскость $x > x_0$, а за λ — любое положительное число. Тогда для $(x, y) \in E_\varphi$ будем иметь $\psi(x, y; x_0, y_0) > -\lambda$. Положим $H = \{(x, y); x \in H_0\}$. Плоская мера H равна нулю, в то время как $B(F, H)$ имеет бесконечную площадь, так как проекция $B(F, H)$ на плоскость yOz заполняет полосу $0 \leqslant z \leqslant 1$.

А. Я. Дубовицкий

7890. Образы критических множеств. Сард (Images of critical sets. Sard Arthur), Ann. Math., 1958, **68**, № 2, 247—259 (англ.)

Множество, лежащее в метрическом пространстве, называется s-нулевым, если его внешняя мера Хаусдорфа размерности s равна нулю, и s-конечным, если эта внешняя мера конечна. Пусть f - дифференцируемое отображение открытого подмножества R евклидова пространства E_m в евклидово пространство E_n и A — подмножество множества R, содержащееся в множестве критических точек отображения f и разложимое в счетную сумму s-конечных множеств. Основные результаты работы состоят в том, что: а) если во всех точках множества A отображение f имеет ранг, меньший s, то $f(A)$ есть s-нулевое множество; б) если f есть отображение класса C^q, $q \geqslant s - n + 1$, то $f(A)$ есть n-нулевое множество. Даны примеры, доказывающие существенность условий этих теорем.

В. А. Рохлин

7891. Образы критических множеств. Сард (Images of critical sets. Sard A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 88 (англ.)

Формулируются некоторые теоремы работы автора (реф. 7890).

7892. О представимости функции ее тейлоровым рядом в вещественной области. Бёгель, Брёйнинг (Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Taylorreihe im Reellen. Bögel Karl, Bräuning Günter), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, **3**, № 1, 1—3 (нем.)

Авторы отправляются от построенного Коши примера функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \end{cases}$$

которая бесконечно дифференцируема, но своим рядом Тейлора по степеням x, хотя и всюду сходящимся, представима лишь в точке $x = 0$. Они строят для любого промежутка I такую бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$, что ее ряд Тейлора, сходящийся всюду в I, представляет функцию $f(x)$ лишь вне произвольно взятого открытого множества $U \subset I$.

Г. М. Фихтенгольц

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

7893. Аксиоматическая система теории множеств по Цермело и Френкелю. Тиле (Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel. Thiele Ernst-Jochen), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 3, 173—195 (нем.)

Дается построение основных разделов теории множеств (теории кардинальных и порядковых чисел) в аксиоматической системе Цермело—Френкеля. Результат о возможности такого построения по существу содержится в ранее известных работах других авторов. Бернайс и Гёдель провели такое построение для других, сходных между собой систем, а Мостовский (Mostowski A., Fundam. math., 1950, **37**, 111—124) доказал, что всякое предложение, формулируемое в системе Цермело—Френкеля и доказуемое в системе Гёделя, доказуемо также в системе Цермело — Френкеля. Этот результат Мостовского получен им в связи с работой Новак (Novak I., Fundam. math., 1950, **37**, 87—110), из которой вытекает возможность формулировать в системе Цермело—Френкеля все понятия, формулируемые в системе Гёделя — Бернайса без помощи связанных классовых переменных (см. также РЖМат, 1955, 1072).

Все же рассуждения и отдельные формулировки автора представляют некоторый интерес. Так, если равносвойственными (eigenschaftsgleiche) называть любые два множества, которые являются элементами одних и тех же множеств, то из равносвойственности вытекает равнообъемность; для доказательства требуется только либо аксиома существования множества всех подмножеств данного множества, либо аксиома существования пары любых двух множеств.

А. С. Есенин-Вольпин

7894. Теория множеств, основанная на единственном порождающем принципе. Оно (A set theory founded on unique generating principle. Ono Katuzi), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 151—159 (англ.)

Предлагается система аксиом теории множеств без аксиомы выбора, содержащая единственную аксиому, позволяющую образовывать множества элементов, обладающих заданными свойствами. Доказывается эквивалентность построенной системы системе аксиом теории множеств Цермело—Френкеля без аксиомы выбора. Аксиомы формулируются на языке узкого исчисления предикатов, основными понятиями служат „$\in$“, „$\{\ \}$“, „P“.

Определения: 1. $x = y$ означает $x \in \{y\}$. 2. $(Ux)\,\mathfrak{A}(x)$ означает $(x, y)[\mathfrak{A}(x) \,\&\, \mathfrak{A}(y) \to x = y]$ („Если существует x, для которого $\mathfrak{A}(x)$, то единственный“). 3 $(UEx)\,\mathfrak{A}(x)$ означает $[(Ux)\,\mathfrak{A}(x) \,\&\, (Ex)\,\mathfrak{A}(x)]$ („Существует и причем единственный x, для которого $\mathfrak{A}(x)$“). 4. $m \subseteq n$ означает $(x)(x \in m \to x \in n)$.

Аксиомы:

Аксиомы равенства

E1. $x \in \{x\}$,

E2. $x \in \{y\} \to [\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(y)]$.

Аксиомы существования бесконечных множеств

P1. $x \in P \to \{x\} \in P$.

P2. $(x)(x \notin v) \to v \in P$.

Порождающий принцип

G. $(x)(Uy)\,\mathfrak{A}(x, y) \to (UEq)(y)[y \in q \equiv \equiv (Ex)(Eu)(x \subseteq u \in p \,\&\, \mathfrak{A}(x, y))]$

(„Существует множество, которое состоит из всех образов всех подмножеств всех элементов данного множества p при отображении посредством данной функции“).

Ф. А. Кабаков

7895. Об одном классе универсальных упорядоченных множеств. Мендельсон (On a class of universal ordered sets. Mendelson Elliott), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 712—713 (англ.)

Упорядоченное множество B называется $\aleph_\alpha$-универсальным, если всякое упорядоченное множество мощности $\aleph_\alpha$ подобно некоторому подмножеству множества B. Пусть H_α —лексикографически упорядоченная совокупность трансфинитных последовательностей символов „0“, „1“, упорядоченных по типу ω_α, каждая из которых, начиная с некоторого места, состоит из одних нулей. Работа содержит простое доказательство для любого α свойства $\aleph_\alpha$-универсальности множества H_α, доказанного ранее Серпинским (Sierpiński W Fundam. math., 1949, **36**, 56—67) для α первого рода и Гилманом (РЖМат, 1957, 5445) для α второго рода.

Ф. А. Кабаков

7896. Об одной полунепрерывной функции. Новиков П. С., Адян С. И., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1958, 138, 3—10

Функция $f(x)$ называется существенно разрывной если невозможно разбить отрезок, на котором она определена, на счетное множество таких множеств, что на каждом из них данная функция непрерывна. Н. Н. Лузиным была поставлена задача о том, существует ли среди измеримых B функций существенно разрывная функция. В реферируемой работе строится полунепрерывная функция $f(x)$, определенная на сегменте $[0,1]$ и существенно разрывная на нем, что является положительным решением задачи Н. Н. Лузина.

Л. В. Келдыш (Докл. АН СССР, 1934, **4**, № 4, 192—197) получила некоторый общий результат, из которого, в частности, следует существование такой полунепрерывной функции, что невозможно разбить отрезок, на котором она определена, на счетное множество множеств так, чтобы на любом из этих множеств можно было дополнить ее до непрерывной на множестве всех иррациональных чисел. Реферируемая работа усиливает этот частный случай результата Л. В. Келдыш.

Ф. А. Кабаков

7897. Некоторые применения упорядоченных множеств. Седмак (Quelques applications des ensembles ordonnés. Sedmak Victor), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 1-2, 12—39; № 3-4, 131—153 (франц.)

Частичное упорядочение множества S обозначается через $(S, \leqslant_S)$. Если отношение порядка $\leqslant_S$ установлено для всех пар элементов множества S, то $(S, \leqslant_S)$ называется упорядочением множества S. Каждое упорядочение множества S, в котором сохраняются все отношения порядка, существующие в $(S, \leqslant_S)$, называется полным расширением частичного упорядочения $(S, \leqslant_S)$.

Автор доказывает, что для всякого частичного упорядочения $(S, \leqslant_S)$ существует его полное упорядочение. Для всякого частичного упорядочения $(S, \leqslant_S)$ можно построить такую систему

$$P_\gamma = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots\} \quad (n < \gamma),$$

что каждое S_n есть полное упорядочение S, причем $a \leqslant_S b$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant_{s_n} b$ для всех $n < \gamma$ (теорема 1. 1).

Размерностью $d_S(S, \leqslant_S)$ множества $(S, \leqslant_S)$ в смысле Душника и Миллера (Dushnik B., Miller E. W., Amer. J. Math., 1941, 63, 600—610) называется наименьшее из кардинальных чисел множеств системы P_γ, удовлетворяющей теореме 1. 1. Если P есть какой-либо полиэдр, то через $[P]$ обозначается частично упорядоченное множество (с отношением порядка $\subseteq$), состоящее из пустого множества и всех граней (собственных и несобственных) полиэдра P. Размерность полиэдра P автор обозначает через $d_T P$.

Для всякой незамкнутой ломаной S $d_S[S] = d_T S + 1 = 2$. Для всякой простой замкнутой ломаной P $d_S[P] = d_T P + 1 = 3$. Для призмы, пирамиды и для всякого правильного полиэдра P в R^3 $d_S[P] = 4$. Если P пробегает множество всех полиэдров в R^m, то $\inf d_S[P] = m + 1$. Для m-мерного симплекса S $d_S[S] = m + 1$. Если ν есть число вершин любого полиэдра P, то $d_T P + 1 \leqslant d_S[P] \leqslant \nu$. Главным результатом всей работы является решение одной проблемы Курепы (Kurepa Gj., Teorija skupova, Zagreb, 1951, стр. 205), высказанное следующей теоремой: если P пробегает все полиэдры, лежащие в R^3, то $\sup d_S[P] = \aleph_0$. Наконец, доказывается, что d_S не является инвариантом гомеоморфных преобразований ни для какого полиэдрального комплекса C размерности $\geqslant 3$. Наоборот, d_S есть инвариант гомеоморфных преобразований, если $d_T C = 1$. Для случая $d_T C = 2$ вопрос остается открытым.

П. Папич

7898. О некоторой характеристике компактных связных множеств в евклидовом пространстве. Секанина (O jisté charakterisaci kompaktních souvislých množin v eukleidovském prostoru. Sekanina Milan), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 2, 129—136 (чешск.)

Если $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел такая, что $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, то можно доказать, что производная (т. е. множество предельных точек) множества всех элементов последовательности $\{a_n\}$ есть связное множество. Автор доказываеь следующую обратную теорему: Пусть M — счетное отграниченное множество действительных чисел и пусть производная M' множества M есть связное множество. Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}$, множество элементов которой совпадает с множеством M, что $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.

В более чем одномерном евклидовом пространстве E_m $(m > 1)$ справедливы аналогичные теоремы, однако необходимо прибавить предположение об ограниченности рассматриваемого множества. Доказывается следующее: Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность точек евклидова пространства E_m, а M — множество всех элементов последовательности $\{a_n\}$ и пусть $\lim \rho(a_{n+1}, a_n) = 0$. Тогда M' будет связным множеством. Обратно, пусть M — счетное ограниченное множество в E_m такое, что M' связно. Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}$, что множество ее точек тождественно множеству M и $\lim \rho(a_{n+1}, a_n) = 0$. Отсюда вытекает теорема: Множество $M \subset E_m$ является компактным и связным тогда и только тогда, когда оно является производной некоторого счетного ограниченного множества N, для которого существует последовательность $\{a_n\}$, обладающая следующими свойствами: а) множество всех элементов последовательности $\{a_n\}$ тождественно множеству N; б) $\lim \rho(a_{n+1}, a_n) = 0$.

Автор доказывает также некоторые аналогичные результаты для случая неограниченных множеств.

V. Pták

7899. Бесконечные множества. Имаз (Conjuntos infinitos. Imaz Carlos), Rev. mat., 1958, № 4, 14—20 (исп.)

Популярная статья, в которой рассматривается понятие кардинального числа. Приводятся известные доказательства счетности множества рациональных чисел, несчетности континуума и теоремы о том, что мощность множества всех функций, определенных на отрезке $0, 1]$, больше континуума.

С. И. Адян

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

7900. Интегрируемость тригонометрического ряда. Гонсалес-Фернандес (Integrability of trigonometric series. González-Fernández J. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 315—319 (англ.)

Пусть $\lambda_n \geqslant 0$, начиная с некоторого номера. Положим

$$f(x) = \lambda_0/2 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx, \quad g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx.$$

Относительно условий

$$x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi), \tag{1}$$

$$x^{-\gamma} g(x) \in L(0, \pi), \tag{2}$$

$$\sum n^{\gamma-1} \lambda_n < \infty, \tag{3}$$

$$\sum n^{\gamma-1} \lambda_n \log n < \infty \tag{4}$$

доказываются следующие теоремы:

1. Если

$$\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_n=\sum_1^\infty n^2\lambda_n=\ldots=\sum_1^\infty n^{2j}\lambda_n=0,$$

то при $2j+1<\gamma<2(j+1)+1$ условия (1) и (3) равносильны, а при $\gamma=2j+1$ равносильны условия (1) и (4).

2. Если

$$\sum_1^\infty n\lambda_n=\sum_1^\infty n^3\lambda_n=\ldots=\sum_1^\infty n^{2j-1}\lambda_n=0,$$

то при $2j<\gamma<2(j+1)$ равносильны условия (2) и (3), а при $\gamma=2j$ равносильны условия (2) и (4).

Аналогичная теорема была доказана ранее автором совместно с Боасом для суммы степенного ряда, имеющего радиус сходимости единица и коэффициенты λ_n (РЖМат, 1958, 464). Для ряда из косинусов случай $j=0$, $\gamma=1$ был рассмотрен Боасом (Boas R. P., Quart. J. Math., 1952, **3**, 217—221), а случай $j=0$, $1<\gamma<3$ — Хейвудом (РЖМат, 1955, 5720). А. А. Шнейдер

7901. О тригонометрических рядах с монотонно убывающими коэффициентами. Пейеримхофф (Über trigonometrische Reihen mit monoton fallenden Koeffizienten. Peyerimhoff Alexander), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 75—81 (нем.)

Через $\eta(x)$ обозначается неотрицательная на $(0, \pi)$ функция, для которой $x\eta(x)\in L(0, \pi)$. Через $\{\lambda_n\}$ обозначается последовательность положительных чисел, монотонно стремящайся к нулю. Через $f(x)$ обозначается сумма ряда $\sum_1^\infty \lambda_n \sin nx$.

Доказывается, что из условия

$$\sum_1^\infty n\lambda_n\int_0^{1/n} x\eta(x)\,dx<\infty \qquad (1)$$

следует

$$\eta(x)f(x)\in L(0, \pi). \qquad (2)$$

Приводится пример, показывающий, что обратное предложение неверно. Однако из (2) следует (1) при дополнительном условии

$$\int_{1/n}^{\pi}\eta(x)\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}\,\frac{dx}{x}\geqslant\varepsilon\int_{1/n}^{\pi}\eta(x)\,\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

для некоторого $\varepsilon>0$ и всех $n\geqslant n_0$.

Дается несколько достаточных условий, при которых $\eta(x)$ удовлетворяет соотношению (3). Указывается довольно общий случай, в котором (1) можно заменить на

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{n}\eta\left(\frac{1}{n}\right)<\infty.$$

Случай $\eta(x)=x^{-\gamma}$ $(0\leqslant\gamma<2)$ рассматривали ранее Юнг (Young W. H., Proc. London Math. Soc., 1913, **12**, 41—70), Боас (см. ссылку в реф. 7900), Суноути (РЖМат, 1957, 6268), Хейвуд (см. ссылку в реф. 7900), Эдмондс (Edmonds S. M., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1942, **38**, 1—19; 1947, **43**, 289—306; 1950, **46**, 231—267). Функции $\eta(x)$, близкие к $x^{-\gamma}$, рассматривали Алянчич, Боянич и Томич (РЖМат, 1957, 4697), а также Чжэнь Юн-мин (РЖМат, 1959, 251). А. А. Шнейдер

7902. Нахождение суммы тригонометрических рядов с коэффициентами, имеющими периодический множитель. Флетчер (Summing of trigonometric series with coefficients which have a periodic factor. Fletcher Harvey J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 349—351 (англ.)

Функция $f(x)\in S$, если $f(x)$ в открытом интервале представляет собою конечную сумму членов вида ax^me^{bx}, где a и b — комплексные постоянные, а $m\geqslant 0$ — целое число. Устанавливается, что если ряд $\sum_{n=1}^\infty r(n)\sin nx$ принадлежит S, а функция $f(n)$ — четная функция периода p (p — натуральное число), то и

$$\sum_{n=1}^\infty r(n)f(n)\sin nx\in S.$$

То же имеет место в отношении ряда $\sum_{n=1}^\infty r(n)\cos nx$, если $f(n)$ — нечетная функция периода p.

Указан в качестве примера ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$, не принадлежащий S, который после умножения на подходящий множитель $f(n)$ уже принадлежит S.

Опечатка: В формулировке теоремы (стр. 349, последняя строка) вместо $\sum_{n=1}^\infty r(n)\cos nx$ должно быть

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)\,r(n)\cos nx.$$

И. М. Ганзбург

7903. Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях. Гапошкин В. Ф., Матем. сб., 1958, **46**, № 3, 359—372

Рисс доказал, что если $p>1$ и $f(x)\in L^p(-\pi, \pi)$, то сопряженная функция

$$\overline{f}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

определена почти всюду и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}(x)|^p\,dx\leqslant A_p\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx,$$

где A_p зависит лишь от p.

Пусть

$$\varphi(x)>0 \text{ и } \varphi(x)\in L(-\pi, \pi). \qquad (1)$$

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\varphi(x)\,dx<\infty,\ p>1, \qquad (2)$$

то интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}(x)|^p\varphi(x)\,dx \qquad (3)$$

может и не иметь смысла. Автор ищет условия, которые надо наложить на $\varphi(x)$ (в добавление к (1)) для того, чтобы из (2) вытекало существование интеграла (3).

Обозначим $\varphi(r, x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-x)}\,dt$ и пусть $\psi(r, x)$ — функция, сопряженная с $\varphi(r, x)$.

Теорема 1. Если, кроме (1), функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(r, x)>c\,|\psi(r, x)|, \qquad (4)$$

где c — постоянная, причем $c>0$ при $p\geqslant 2$ и $c>\left|\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}\right|$ при $1<p\leqslant 2$, то из (2) вытекает, что сопряженная к $f(x)$ функция $\overline{f}(x)$ определена почти всюду и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}(x)|^p\varphi(x)\,dx\leqslant A_{p,c}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\varphi(x)\,dx,$$

где $A_{p,c}$ зависит только от p и c, но не от $f(x)$.

Автор изучает далее, при каких условиях на $t(x)$ системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, t(x)\, e^{inx}\right\} \text{ и } \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{t(x)}\, e^{inx}\right\} \quad (n=0, \pm1, \pm2,\ldots) \tag{5}$$

являются базисами в гильбертовом пространстве.

(Случай $t(x) = |x|^{\alpha}$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, рассмотрен К. И. Бабенко (Докл. АН СССР, 1948, 62, № 2, 157—160)). Чтобы указанные системы образовывали биортогональную систему, необходимо и достаточно, чтобы $t(x) \in L^2$ и $\frac{1}{t(x)} \in L^2$.

Теорема 2. Если $\varphi(x) = t^2(x)$ удовлетворяет условию (4) при $c > 0$, то системы (5) являются базисами в $L^2(-\pi, \pi)$.

Наконец, рассматриваются условия, при которых эти базисы являются базисами Рисса; или один из них базис Бесселя, а другой — базис Гильберта, или каждый из них ни базис Гильберта, ни базис Бесселя (в смысле терминологии, введенной в работе референта (Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 148, 4, 69—106)). Н. К. Бари

7904. О безусловной сходимости и суммируемости. Ульянов П. Л., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 6, 811—840

Доказывается ряд теорем, касающихся взаимоотношений между безусловной суммируемостью и безусловной сходимостью для тригонометрической системы и для общих ортогональных систем. Отметим некоторые из них.

Теорема 4. Если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

расходится на E, то для любого метода суммирования Тёплица T^* члены ряда можно переставить так, чтобы он почти всюду на E не суммировался методом T^*. Если $\sum (a_n^2 + b_n^2) = \infty$, то переставленный ряд имеет почти всюду на $[0, 2\pi]$ неограниченные T^*-средние; если, кроме того, $|a_n| + |b_n| \not\to 0$, то ни одна подпоследовательность частных сумм переставленного ряда не является сходящейся ни на одном множестве положительной меры, и ряд, сопряженный к переставленному, обладает теми же свойствами.

Следствие 4. Если тригонометрический ряд (1) после любой перестановки членов суммируется T^* почти всюду на E, $mE > 0$, то он безусловно сходится почти всюду на E и $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$.

Теорема 6′. Для любого метода суммирования T^* (в частности, для сходимости) существует такая переставленная тригонометрическая система $\{\cos m_l x, \sin m_l x\}$, что для любого $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ (с $b - a < 2\pi$) существует функция $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ для всех $0 < p < 2$, обращающаяся в нуль на $[a, b]$ и имеющая бесконечно много производных на полуинтервале $[0, 2\pi)$, ряд Фурье которой по системе $\{\cos m_l x, \sin m_l x\}$ имеет неограниченные T^*-средние почти всюду на $[0, 2\pi]$, и это же верно для $\bar{f}(x)$ (сопряженной к $f(x)$).

Если вместо тригонометрической системы рассмотреть произвольную ортогональную, то имеет место теорема (следствие 6 теоремы 7): Если ортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ безусловно суммируем T^* почти всюду на E, $mE > 0$, и если $\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n| = 0$, то этот ряд безусловно сходится почти всюду на E.

Если не вводить ограничений на коэффициенты, это утверждение уже не будет иметь места. Действительно:

Теорема 10. Существует ортогональный ряд, который всюду на $[0, 1]$ безусловно суммируем некоторым методом Тёплица T и тем не менее расходится всюду на $[0, 1]$ при любом порядке членов (и притом расходится к $+\infty$ всюду).

Отметим также теорему:

Теорема 11. Существуют ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, состоящая из ограниченных функций на $[0, 1]$, и функция $F(x)$ такая, что ряд $\sum d_n \varphi_n(x)$, являющийся ее рядом Фурье по этой системе, обладает свойствами: а) $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p < \infty$ для всех $p > 2$, б) члены ряда можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился к $+\infty$ (или расходился к $-\infty$) всюду на $[0, 1]$, в) ряд сходится к $F(x)$ всюду на $[0, 1]$, а после некоторой перестановки к функции $F_1(x)$, причем $F_1(x) \neq F(x)$ всюду на $[0, 1]$. Н. К. Бари

7905. Одно локальное свойство ряда Фурье. Флетт (A local property of Fourier series. Flett T. M.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 4, 450—454 (англ.)

Через $\sigma_n^{\alpha}(t)$ обозначим (C, α)-средние ряда Фурье от функции $f(t)$ с периодом 2π. Условие

$$\sum_{n=0}^{m} \left| \sigma_n^{\alpha}(x) - s \right|^k = o(m)$$

обозначается автором как $\{C, \alpha\}_k$-суммируемость ряда Фурье в точке $t = x$ к сумме s.

Доказывается, что при $k \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $\alpha > -1$ $\{C, \alpha\}_k$-суммируемость ряда Фурье от $f(t) \in L^p(-\pi, \pi)$ является локальным свойством функции $f(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha \geqslant \sup(1/p - 1, -1/k, -1/2).$$

А. А. Шнейдер

7906. Определение скачка функции по ее ряду Фурье. Кумари (Determination of the jump of a function by its Fourier series. Kumari Sulaxana), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 3, 204—216 (англ.)

Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ и имеет период 2π. Через

$$\sum_1^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_1^{\infty} B_n(t)$$

обозначим ряд, сопряженный к ряду Фурье для $f(t)$. Положим

$$\theta_{\alpha}(t) = \alpha t^{-\alpha} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \left\{\frac{1}{2}[f(x+u) - f(x-u)] - l\right\} du.$$

Через $\tau_{\alpha}(w)$ обозначим (R, w, α)-средние последовательности $\{n B_n(x)\}$, а через $C_{\alpha}(w)$ — (R, w, α)-средние ряда $\sum B_n(x)$ для фиксированной точки x.

Устанавливается асимптотическое поведение разности

$$\tau_{\beta}(w) - \frac{2l}{\pi} \tag{1}$$

при $w \to \infty$, в зависимости от поведения интеграла

$$\int_0^t |\theta_{\alpha}(u)|\, du \tag{2}$$

или интеграла

$$\int_t^{\pi} |\theta_{\alpha}(u)|\, \frac{du}{u} \tag{3}$$

при $t \to 0$ для некоторых α, β. Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть $\alpha > 0$, $-1 < \rho < 1$, $\alpha + \rho > 0$. Если интеграл (2) равен $o\left(t^{\rho+1}/\log\frac{1}{t}\right)$, то разность (1) равна $o(w^{-\rho})$ для $\beta = \alpha + \rho + 1$.

2. Пусть $\alpha > 0$, $-1 < \rho < 1$, $\alpha + \rho > 0$, $p > -1$. Если интеграл (3) равен $o\left\{t^{\rho}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{p+1}\right\}$, то разность (1) равна $o\{w^{-\rho}(\log w)^{p+1}\}$ для $\beta = \alpha + \rho + 1$.

3. Пусть $0 < \rho < 1$. Если интеграл (2) равен $o(t^{\rho+1})$, то разность (1) равна $o(1)$ в двух случаях:

(A) $0 < \alpha \leqslant 2(\rho+1)$, $\beta \geqslant 1 + \alpha/(\rho+1)$; (B) $\alpha > 2(\rho+1)$,

$$\beta \geqslant 1 + \alpha - (1 + \{\alpha\})\rho/(\rho+1),$$

где через $\{\alpha\}$ обозначена дробная часть α.

Несколько иной вид имеет следующая теорема:

4. Если для $\alpha > 0$ интеграл (2) равен $o\left(t/\log\frac{1}{t}\right)$, то для $\lambda > 1$

$$\lim_{w\to\infty}\{C_\alpha(\lambda w) - C_\alpha(w)\} = \frac{2l}{\pi}\log\lambda.$$

В конце статьи даются при следствия из теорем 1, 2, 3 о поведении $C_\beta(w)$. Ре ф. ренту осталось неясным фигурирующее в этих следствиях условие

$$\text{(i i)}\ \lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}\int_t^\infty \frac{\psi(u)}{u}\,du \to s(c,k),$$

где $\psi(u) = \frac{1}{2}\{f(x+u) - f(x-u)\}$.

Имеются опечатки. Так, на стр. 214 в формулировке следствия 2 (A) соотношение для $C_{\alpha+\rho}(w)$ должно выполняться при $w \to \infty$ (напечатано: $t \to 0$).

А. А. Шнейдер

7907. Дополнительное замечание о сильной суммируемости ряда Фурье. Чжоу Хун-цзин (An additional note on the strong summability of Fourier series. Chow Hung Ching), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 425—435 (англ.)

Через

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_0^\infty c_n(x) \qquad (1)$$

обозначим ряд Фурье для функции $f(x) \in L(0, 2\pi)$ с периодом 2π. Через $s_n^\alpha(x)$ обозначим (C, α)-средние ряда (1). Для фиксированного x исследуется условие

$$\sum_{n=0}^m |\, s_n^\alpha(x) - s\,|^k = o(m) \qquad (2)$$

(обозначаемое автором как $[C, \alpha+1; k]$-суммируемость ряда (1) к сумме s) или условие

$$\sum_{n=0}^m |\, s_n^\alpha(x)\,|^k = O(m) \qquad (3)$$

(обозначаемое как $[C, \alpha+1; k]$-ограниченность ряда (1)) в зависимости от выполнения условия

$$\sum_{n=1}^m |\, n^{-\gamma} c_n(x)\,|^k = o(m) \text{ или } O(m) \qquad (4)$$

и свойств функции $\varphi(u) = \frac{1}{2}\{f(x+u) + f(x-u)\}$.

Доказываются следующие теоремы (где $1 < p \leqslant 2$, $p' = p/(p-1)$).

1. Пусть $k \geqslant 1$, $-1 < \alpha < 0$. Для $[C, \alpha+1; k]$-суммируемости ряда (1) необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий: условие (4) с „o“ для $\gamma = \alpha$,

$$\int_0^t \{\varphi(u) - s\}\,du = o(t),$$

$$\sum_{n=1}^m |\, n^{-\alpha}\int_0^\delta \{\varphi(u) - s\}\left(1 - \frac{u}{\delta}\right)\frac{\sin(n;u)}{u^{1+\alpha}}\,du\,|^k = o(m),$$

где $0 < \delta < \pi$, $(n; u) = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right)u - \frac{1}{2}\alpha\pi$.

2. Пусть $-1/p' < \alpha < 0$. Если выполняется (4) с „O“ для $\gamma = \alpha$, $k = p'$, и

$$\int_0^t |\,\varphi(u)\,|^p\,du = O(t), \qquad (5)$$

то ряд (1) будет $[C, \alpha+1; p']$-ограничен.

3. Пусть $\alpha = -1/p'$. Если выполняется (4) с „o“ для $\gamma = \alpha$, $k = p$, и

$$\int_0^t |\,\varphi(u) - s\,|^p\,du = o(t),$$

то

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}\,|\, s_n^\alpha(x) - s\,|^p = o(\log m).$$

4. Если выполняются (5) и (4) с „O“ для $\gamma = -1$, $k = p'$, то $[C, \alpha+1; p']$-суммируемость ряда (1) для $\alpha > -1/p'$ будет равносильна условию

$$\beta t^{-\beta}\int_0^t (t-u)^{\beta-1}\varphi(u)\,du \to s \quad (t \to +0)$$

для $\beta > 1/p$.

Последний результат является обобщением одной ранее доказанной автором теоремы. А. А. Шнейдер

7908. Классы насыщения для некоторых процессов суммирования. Харшиладзе Ф. И., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 3, 352—355

Следуя Фавару (РЖМат, 1958, 9720), автор формулирует проблему насыщения и дает определение класса насыщения процесса суммирования биортогональных разложений элементов пространства Банаха E. Для пространств периодических функций $C(-\pi, \pi)$ и $L_p(-\pi, \pi)$ $(p \geqslant 1)$ и разложения $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

доказывается следующая теорема.

1. Если числа $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{\varphi(n)} = \gamma_k < \infty,$$

где $\varphi(n)$ — положительная функция, монотонно стремящаяся к нулю, то для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|\, f(x) - u_n^\lambda(f,x)\,\| = O[\varphi(n)],$$

где

$$u_n^\lambda(f,x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

фейеровские средние ряда

$$\frac{a_0}{2}\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

ограничены по норме в пространстве E.

Отсюда вытекают следующие теоремы о классах насыщения для процесса ($БР$, ν) Бернштейна — Рогозинского

$$Б_n^{(\nu)}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{\nu}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

2. Для того чтобы непрерывная периодическая функция $f(x)$ удовлетворяла соотношению

$$\max_x |f(x) - Б_n^{(\nu)}(f, x)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

необходимо и достаточно существование $f'(x) \in \mathrm{Lip}1$.

3. Класс насыщения процесса ($БР$, ν) в пространстве L_p при любом ν совпадает с классом функций, эквивалентных абсолютно непрерывным функциям, обладающим вторыми производными, принадлежащими пространству L_p.

4. Класс насыщения процесса ($БР$, ν) в пространстве L_1 при любом ν совпадает с классом функций, эквивалентных абсолютно непрерывным функциям, обладающим производными первого порядка с ограниченным изменением.

Класс насыщения процесса суммирования ряда Фурье так называемыми типическими средними

$$X_n^{(\nu)}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^{\nu}}{n^{\nu}}\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

определяется на основании теоремы 1 следующей теоремой, ранее доказанной Заманским (Zamansky M., Ann. scient. École norm. supér., 1950, 67, 161—198, теорема 2):

5. Для того чтобы непрерывная периодическая функция $f(x)$ удовлетворяла соотношению

$$\max_x |f(x) - X_n^{(\nu)}(x)| = O\left(\frac{1}{n^{\nu}}\right),$$

необходимо и достаточно существование ограниченной производной $f^{(\nu)}(x)$ при четном ν и ограниченной производной $\tilde{f}^{(\nu)}(x)$ при нечетном ν.

Следующая теорема определяет класс насыщения процесса Лебега (или процесса приближения средними Стеклова)

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kh}{kh}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

6. Класс насыщения процесса Лебега (или процесса приближения средними Стеклова) в пространстве C или L_p ($p \geqslant 1$) совпадает с классом насыщения процесса ($БР$, ν) в соответствующем пространстве.

А. Х. Турецкий

7909. О теоремах Джексона. Тиман А. Ф., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 3, 334—336

Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π,

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

$$\omega_k(f, t)_{L_p} = \sup_{|h|\leqslant t}\left\|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu h)\right\|_{L_p}$$

— k-й модуль непрерывности,

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{T_n}\|f - T_n\|_{L_p}$$

— наилучшее приближение тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$ функции $f(x)$.

Показывается, что из результатов Надя (Nagy B. Ber. Verchandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-phys. Kl., 1938) вытекает неравенство

$$E_n(F)_{L_p} \leqslant \frac{C_{k,r}}{n^r}\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_p}, \qquad (1)$$

где $r > 0$, $\|f\|_{L_p} < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left[m(x-t) - \frac{\beta\pi}{2}\right]}{m^r}dt$$

и $C_{k,r}$ — постоянная, зависящая только от k и r. Неравенство (1) выражает теорему Джексона для функций f, имеющих ограниченную в метрике L_p производную в смысле Вейля порядка $r > 0$. А. В. Ефимов

7910. О приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами. Гаркави А. Л., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 230—231

Рассматривается класс $W^{(r)}$ всех периодических периода 2π функций, имеющих ограниченную производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, и исследуется вопрос об одновременной аппроксимации функций этого класса и их производных до r-го порядка включительно тригонометрическими полиномами и их производными того же порядка. Изучается экстремальная задача о величине

$$C_{n,r}(f) = \inf_{T_n(x)}\max_{0\leqslant k\leqslant r}\frac{\sup_x|f^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(x)|}{E_n(f^{(k)})},$$

где $E_n(f^{(k)})$ — наилучшее приближение производной $f^{(k)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n$. Для константы $C_{n,r} = \sup_{f\in W^{(r)}} C_{n,r}(f)$ устанавливаются асимптотические оценки

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + O(\ln\ln\ln p) \leqslant C_{n,r} \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(p+1) + O(1),$$

в которых $p = \min(n, r)$.

Автор получает для функций $f(x)$ из класса $W^{(r)}$ неравенство

$$\sup_x|f^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)| \leqslant n^r\sup_x|f(x) - T_n(x)| + K_1C_{n,r}(f)E_n(f^{(r)}),$$

несколько уточняющее один результат Фрёйда (Internat. math. Nachr., 1957, № 47/48, 36—37). При этом для любых натуральных n и r существуют функция $f_{r,n}(x) \in W^{(r)}$ и полином $T_{n,r}(x)$ порядка n такие, что

$$\sup_x|f_{r,n}^{(r)}(x) - T_{n,r}^{(r)}(x)| > n^r\sup_x|f_{r,n}(x) - T_{n,r}(x)| + K_2C_{n,r}E_n(f_{r,n}^{(r)}).$$

В дополнении автора (Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 254) отмечается следствие: если $\sup_x|f(x) - T_n(x)| \leqslant AE_n(f)$ ($A \geqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$), то

$$\sup_x|f^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)| \leqslant K_3\left\{C_{n,r}(f) + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A\right\} \times E_n(f^{(r)}).$$

Кроме того, каковы бы ни были натуральные числа n и r и число $A > 1$, существуют функция $f(x)$ и полином $T_n(x)$ такие, что $\sup_x |f(x) - T_n(x)| \leqslant AE_n(f)$, а

$$\sup_x |f^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)| > K_4 \left\{ C_{n,r} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^r A \right\} \times \times E_n(f^{(r)}).$$

Во всех этих неравенствах K_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) обозначает абсолютную положительную константу. А. Ф. Тиман

7911. О приближении периодической функции и ее последовательных производных тригонометрическим полиномом и его последовательными производными. Ципсер, Фрёйд (Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives. Czipszer J., Freud G.), Acta math., 1958, **99**, № 1-2, 33—51 (франц.)

Рассматривается вопрос, в какой мере близость тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка n к 2π-периодической k раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ обеспечивает близость его производной $T_n^{(k)}(x)$ к производной функции $f^{(k)}(x)$.

Приводятся доказательства следующих теорем:

1. Если $\max |f(x) - T_n(x)| = \|f - T_n\| < \varepsilon$, то

$$\|f^{(k)} - T_n^{(k)}\| \leqslant C_1 \ln [\min(k, n) + 1] [n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)})],$$

где $E_n(f^{(k)})$ — наилучшее приближение $f^{(k)}(x)$ тригонометрическими полиномами n-го порядка, а C_1 — абсолютная постоянная.

2. Если $\|f - T_n\| \leqslant AE_n(f)$ $(A \geqslant 1)$, то

$$\|f^{(k)} - T_n^{(k)}\| \leqslant C_2 \ln [\min(n, k) + 1] AE_n(f^{(k)}).$$

3. Если $|f(x) - T_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$, то

$$|f^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(x)| \leqslant B [n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)}; \alpha_1, \alpha_2) + 2^{-n} M]$$

для $\alpha_1 + \delta \leqslant x \leqslant \alpha_2 - \delta$, где $\delta > 0$, $E_n(f^{(k)}; \alpha_1, \alpha_2)$ — наилучшее приближение $f^{(k)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, $M = \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant k, \\ \alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2}} |f^{(s)}(x)|$ и B — постоянная, зависящая лишь от $\alpha_2 - \alpha_1$, δ и k.

Теоремы 1 и 2 распространяются на случай производных от сопряженной функции, а также на случай приближения в метрике пространства L_p $(p \geqslant 1)$.

Примечание референта. 1) Оценка норм сумм Валле-Пуссена, которой посвящен § 3 статьи, была получена в более точной форме С. М. Никольским (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, **4**, № 6, 509—520). 2) Об упоминаемом авторами в связи с первыми двумя теоремами сообщении референта на заседании Московского матем. о-ва от 13.II.1957 г. см. реф. 7910. А. Л. Гаркави

7912. Об оценке снизу наилучшего приближения в среднем полиномами интегрируемых функций с r-й положительной производной. Пилика (Mbi të çmuarit nga poshtë të përafërimit më të mirë me metodën e të mesmes me polinome të funksioneve të integrueshëm që kane derivat të rendit të r-të pozitiv. Pilika Petraq), Bul. Univ. shtetër. Tiranës. Ser. shkenc. natyr., 1958, **12**, № 1, 75—88 (алб.)

Оценивается снизу наилучшее приближение в среднем функции $f(x)$, имеющей $f^{(r)}(x) > \mu > 0$, где r — порядок производной.

Получен следующий результат:

$$E_{r-1}(f; -1, 1)_L \geqslant C_r \cdot \mu,$$

где

$$0 < C_r \leqslant \frac{1}{(r+1)!}.$$

Этот результат получен для $r = 1, 2, \ldots, 11$.

Вопрос сводится к доказательству положительности функции

$$\Psi_r(t) = \begin{cases} \int_{-1}^{t} (x-t)^{r-1} q(x)\, dx & \text{для } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \int_{t}^{1} (x-t)^{r-1} q(x)\, dx & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$q(x) = \operatorname{sgn}\left[\frac{\sin[(r+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}\right].$$

Находится формула для $\Psi_r(t)$ в виде

$$\Psi_r(t) = \frac{1}{r}(1-t)^r + \frac{2}{r}\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left(\cos\frac{k\pi}{r+1} - t\right)^r$$

При этом

$$C_r = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{1} \Psi_r(t)\, dt.$$

В. Н. Масленникова

7913. Заметка о приближении непрерывных функций. Птак (A remark on approximation of continuous functions. Pták Vlastimil), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 251—256 (англ.; рез. русск.)

Через T обозначим компактное хаусдорфово пространство, $C(T)$ — пространство всех функций, непрерывных на T, с обычной (чебышевской) метрикой.

Лемма. Пусть E — n-мерное подпространство пространства $C(T)$, а f — линейный функционал на E, $\|f\|_E = 1$. Тогда существует n различных точек $t_i \in T$ и чисел λ_i таких, что $\sum_1^n |\lambda_i| = 1$ и $f(x) = \sum_1^n \lambda_i x(t_i)$ для любого $x \in C(T)$ (кратко $f = \sum_1^n \lambda_i t_i$).

По определению, E удовлетворяет условию Хара, если не существует $e \in E$, $e \not\equiv 0$, такого, что $e(t) = 0$ не менее чем в n различных точках $t \in T$.

Этому условию можно придать следующий вид: Не существует ненулевой линейной комбинации $f = \sum_1^n \lambda_i t_i$, обращающейся в нуль на E.

С помощью леммы и опираясь на вышеуказанное замечание, автор дает чрезвычайно простое и короткое доказательство теоремы Хара о единственности наименее уклоняющегося элемента. Так же просто доказываются теоремы Чебышева и Валле-Пуссена (в этом случае $T = [a, b]$). В. Н. Никольский

7914. Теоремы единственности наилучшего приближения для дифференцируемых функций. Гаркави А. Л., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 225—226

Обозначим через C_s класс функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ s-ю непрерывную производную. Пусть $S_n = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ — система линейно независимых функций, принадлежащих классу C_s, и $L_n = L(S_n)$ — пространство полиномов по этой системе.

Рассмотрим элементы из L_n, наименее уклоняющиеся от $f \in C_s$. Известно, что множество этих элементов есть выпуклый многогранник пространства L_n. Обозначим его размерность через $R(L_n, f)$. Тогда чебышевским рангом L_n относительно C_s называется величина

$$R(L_n, C_s) = \max_{f \in C_s} R(L_n, f).$$

Формулируется следующая теорема:

Теорема I. Для выполнения неравенства

$$R(L_n, C_s) \leqslant r \qquad (s \geqslant 1)$$

необходимо и достаточно, чтобы среди общих нулей каждых k линейно независимых полиномов из $L_n (k = r+1, \ldots, n)$ содержалось не более $n-k$ точек, являющихся общими двойными или краевыми нулями $(r+1)$-го из указанных полиномов.

Из теоремы I получены следующие следствия:

1) $R(L_n, C_s) = R(L_n, C_1)$ при $s \geqslant 1$.

2) $R(L_n, C_1) \geqslant 2R(L_n, C) - n - 1$.

3) Пусть m — наибольшее число нулей (с учетом их кратности), которое может иметь нетривиальный полином из L_n; тогда

$$R(L_n, C_1) = 0 \text{ при } R(L_n, C) \leqslant \left[\frac{2n-m-1}{2}\right]$$

и

$$R(L_n, C_1) \leqslant m + 1 - 2\{n - R(L_n, C)\} \text{ при}$$

$$R(L_n, C) > \left[\frac{2n-m-1}{2}\right].$$

Здесь C — класс непрерывных на $[a, b]$ функций. Критерий теоремы I упрощается в следующем случае.

Пусть L^*_n есть n-мерная гиперплоскость пространства $L_{n+1} = L(T_{n+1})$, где T_{n+1} есть дифференцируемая система Чебышева на отрезке $[a, b]$ такая, что для любой внутренней точки $[a, b]$ существует полином, имеющий в ней простой нуль. В этих предположениях формулируется

Теорема II. Для выполнения неравенства $R(L^*_n, C_1) \leqslant r$ необходимо и достаточно, чтобы для любых j краевых точек $(j = 0, 1, 2)$ и $p_j = \left[\frac{n-r-j}{2}\right]$ внутренних точек отрезка $[a, b]$ существовал полином из L^*_n, принимающий в этих точках значения любых наперед заданных знаков.

Доказательств не приводится. Ю. А. Брудный

7915. Об аппроксимации непрерывных функций при норме $\int_a^b |x(t)|\,dt$. Птак (On approximation of continuous functions in the metric $\int_a^b |x(t)|dt$. Pták Vlastimil), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 267—273 (англ.; рез. русск.)

Пусть T есть множество действительных чисел таких, что если $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ и $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то $t \in T$. Обозначим через B линейное нормированное пространство, состоящее из функций $x(t)$, непрерывных на T, для которых существует интеграл $\int_T |x(t)|\,dt = \|x\|$. Исследуются такие конечномерные пространства $E \subset B$, что для каждой функции $x \in B$ существует в E единственная функция, наименее уклоняющаяся от x. Доказывается следующая основная теорема 2: В пространстве B тогда и только тогда существует функция с неединственной, наименее уклоняющейся от нее функцией из E, если существуют два непересекающихся, открытых в T множества G_1 и G_2 и измеримая функция $m(t)$, определенная на $T - (G_1 \cup G_2)$, со следующими свойствами:

1) $|m(t)| \leqslant 1$ для каждого $t \in T - (G_1 \cup G_2)$,

2) $\int_{G_1} e(t)\,dt - \int_{G_2} e(t)\,dt + \int_{T-(G_1 \cup G_2)} e(t)\,m(t)\,dt = 0$

для любой функции $e(t) \in E$,

3) существует ненулевая функция $e_0(t) \in T$, обращающаяся в нуль на $T - (G_1 \cup G_2)$. И. В. Ценов

7916. О невозможности построения линейного полиномиального оператора, дающего приближение порядка наилучшего. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 6, 1175—1177

Вопрос о существовании линейного полиномиального оператора $U_n(f, x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$ или из $\widetilde{L}$ в $\widetilde{L}$), доставляющего для каждого элемента пространства приближение порядка $E_n(f)$, — наилучшего в метрике данного пространства (теоремы 1 и 3 реферируемой статьи), был решен С. М. Лозинским и Ф. И. Харшиладзе (Докл. АН СССР, 1948, 61, № 2, 193—196), которые получили, как обобщение одного результата референта (Докл. АН СССР, 1948, 61, № 2, 201—204), оценку для нормы любого линейного оператора (в указанных пространствах), переводящего f в полином порядка n и сохраняющего полиномы порядка n (именно таков и оператор $U_n(f, x)$ статьи): $\|U_n\| > K \ln n$ (K — постоянная). Из неограниченности множества норм следовал отрицательный ответ на рассматриваемый вопрос.

Более общий вопрос, ответ на который дается (без доказательства) в теореме 4 статьи, — о существовании линейного оператора $U_n(f, x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$, дающего приближение порядка $E_{[np_n]}(f)$, где $0 < p_n \leqslant 1$ и $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$, решен по существу в работе референта (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 1, 9—11), в которой получена оценка $\|U_n^{(m)}\| > K \ln \frac{n+m}{1+m}$ для нормы любого линейного оператора из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$, переводящего элементы $\widetilde{C}$ в полиномы порядка $n+m$ и сохраняющего полиномы порядка n. Оператор $U_n(f, x)$ реферируемой статьи, сохраняющий, очевидно, полиномы порядка $[np_n]$, сводится к такому оператору, если заменить n на $n-m$ и взять $m = n - [np_n]$. Из этой оценки следует неограниченность множества норм $\{\|U_n\|\}$ и тем самым отрицательный ответ на поставленный вопрос.

В теореме 2 указывается достаточный признак несуществования линейного оператора, дающего приближение порядка наилучшего, для пространств „типа E“, рассмотренных автором ранее (РЖМат, 1953, 166), именно:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f - S_n(f)\| = \infty, \qquad (1)$$

хотя бы для одного элемента пространства E (здесь $S_n(f)$ есть n-й отрезок ряда Фурье функции f). Заметим, что требование (1) можно значительно ослабить, заменив его таким $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f - S_n(f)\| \neq 0$ (это ясно из неравенства (6) статьи). В. Ф. Николаев

7917. Ряды Фурье как аппарат приближения почти-периодических функций. Бредихина Е. А., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 2, 219—222

Рассматривается класс почти периодических функций, для которых ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda_k x} \qquad (1)$$

обладает следующими свойствами: $\Lambda_0 = 0$, $\Lambda_k < \Lambda_{k+1}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \Lambda_k = \infty$; $\Lambda_k = -\Lambda_{-k}$; $|A_k| + |A_{-k}| \neq 0$ для $k \neq 0$ (тип ω). Вводятся следующие обозначения и определения: $L(f)$ означает последовательность $\{\Lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

$$R_\lambda(f) = \sup_x \Big| f(x) - \sum_{|\Lambda_k| < \lambda} A_k e^{i\Lambda_k x} \Big|,$$

$$\alpha_\lambda(f) = \sum_{|\Lambda_k| > \lambda} |A_k|, \quad E_\lambda(f) = \inf_{F(z) \in B_\lambda} \{\sup_x |f(x) - F(x)|\},$$

где B_λ — класс целых функций степени $\leqslant \lambda$, ограниченных на действительной оси. Пусть $l = \{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — возрастающая последовательность чисел. Полагаем

$N_l(\lambda) = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} 1$. Вводятся в рассмотрение классы A и A_σ, Λ и Λ_σ последовательностей l:

1) $l \in A$, если существует такое $a > 0$, что $\lambda_{k+1} - \lambda_k > a$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

2) $l \in A_\sigma$, если l может быть разбита на конечное число последовательностей $l^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ $[l = \bigcup_1^r l^{(j)}]$ таких, что $l^{(j)} \in A$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$;

3) $l \in \Lambda$, если существует такое $\theta > 1$, что $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geqslant \theta$;

4) $l \in \Lambda_\sigma$, если l может быть разбита на конечное число последовательностей $l^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ $[l = \bigcup_1^r l^{(j)}]$ таких, что $l^{(j)} \in \Lambda$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Приводятся теоремы, являющиеся частично обобщением результатов автора (РЖМат, 1956, 4430; 1957, 6966; 1958, 564); делаются ссылки на результаты С. Н. Бернштейна, С. Б. Стечкина и Лебега.

1 (основная теорема). Для любой почти периодической функции $f(x)$, спектр которой не имеет предельных точек на конечном расстоянии, выполняется неравенство

$$R_\lambda(f) \leqslant E_\lambda(f)\left\{1 + \frac{4}{\pi} + 2[N_L(\mu) - N_L(\lambda)] + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}\right\}$$

где $0 < \lambda < \mu$ (в остальном λ и μ произвольны).

2. Если $L(f)$ обладает тем свойством, что существует λ_0 такое, что для $\lambda \geqslant \lambda_0$ существует неотрицательная функция $\varphi(\lambda)$, для которой

$$N_L\left(\lambda + \frac{\lambda}{e^{\varphi(\lambda)}}\right) - N_L(\lambda) = O[1 + \varphi(\lambda)],$$

то $R_\lambda(f) \leqslant \Phi(\lambda) E_\lambda(f)$, где $\Phi(\lambda) = O[1 + \varphi(\lambda)]$.

3. Если $L(f) \in A_\sigma$, то $R_\lambda(f) \leqslant \Phi(\lambda) E_\lambda(f)$, где $\Phi(\lambda) = O(\ln \lambda)$.

4. Если $L(f) \in \Lambda_\sigma$, то $R_\lambda(f) = O[E_\lambda(f)]$.

Далее приводятся теоремы о равномерной сходимости рядов Фурье.

5. Ряд Фурье (1) типа (ω) функции $f(x)$ сходится равномерно (к $f(x)$), если существует последовательность $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что:
1) $\mu_n > \Lambda_n$ при $n > n_0$, 2) $\lim_{n\to\infty} E_{\Lambda_n}(f)\,[N_L(\mu_n) - N_L(\Lambda_n)] = 0$,

3) $\lim_{n\to\infty} E_{\Lambda_n}(f) \cdot \ln\frac{\mu_n + \Lambda_n}{\mu_n - \Lambda_n} = 0$.

6. Ряд (1) типа (ω) сходится равномерно, если

$$\lim_{n\to\infty} E_{\Lambda_n}(f) \cdot \ln\frac{\Lambda_{n+1} + \Lambda_n}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} = 0.$$

7. Ряд Фурье (1) типа (ω) сходится равномерно, если существует функция $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda > \lambda_0$, удовлетворяющая условиям:

1) $N_L\left(\Lambda_n + \frac{\Lambda_n}{e^{\varphi(\Lambda_n)}}\right) - N_L(\Lambda_n) = O[1 + \varphi(\Lambda_n)]$;

2) $\lim_{n\to\infty} \varphi(\Lambda_n) E_{\Lambda_n}(f) = 0$.

8. Если $L(f)$ обладает тем свойством, что существуют числа $a > 0$ и $m \geqslant 0$, для которых

$$N_L\left(\Lambda_n + \frac{a}{\Lambda_n^m}\right) - N_L(\Lambda_n) = O(\ln \Lambda_n),$$

то ряд Фурье типа (ω) сходится (к $f(x)$) равномерно, если

$$\lim_{\delta\to 0}\{\sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|\} \ln\delta = 0.$$

Следствие из 8: Если $L(f) \in A_\sigma$ и $\lim_{\delta\to 0}\{\sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|\} = 0$, то ряд типа (ω) сходится равномерно.

9. Если $L(f) \in \Lambda_\sigma$, то ряд типа (ω) сходится абсолютно; при этом если $A_0 = 0$, то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |A_k| \leqslant C_L \sup_x |f(x)|,$$

где C_L есть постоянная, зависящая только от L.

10. Если $L(f) \in \Lambda_\sigma$, то имеют место порядковые равенства

$$E_\lambda(f) \sim R_\lambda(f) \sim \alpha_\lambda(f).$$

А. С. Кованько

7918. Об ограниченных среднепериодических функциях. Кахан (Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées. Kahane Jean-Pierre), Ann. Inst. Fourier, 1957, 7, 293—314 (франц.)

Пусть C — пространство непрерывных функций, определенных на всей прямой с равномерной сходимостью на каждом компакте.

Функция $f \in C$ называется среднепериодической (с.-п.), если подпространство $\tau(f)$, порожденное сдвигами функции f, не совпадает с C.

Известно (Schwartz L., Ann. Math., 1947, 48, 857—929), что $\tau(f)$ имеет базис, состоящий из функций вида $\{x^p e^{i\lambda x}\}$, и ряд Фурье $\Sigma a(\lambda, p)\, x^p e^{i\lambda x}$. Множество $\{\lambda\}$ называется спектром f. Если функция f ограничена, то спектр $\{\lambda\}$ простой (т. е. $p = 0$) и действительный.

Работа состоит из трех частей. В первой вводной части изучаются некоторые простые свойства ограниченных с.-п. функций и распределений и их связь с почти периодическими (п. п.) функциями и распределениями. В частности, доказывается (известный ранее результат), что если f — ограниченная, равномерно непрерывная с.-п. функция, то она п. п. функция. Далее строится пример ограниченной, не равномерно непрерывной с.-п. функции.

Во второй части работы изучаются свойства псевдопериодических функций и распределений: это такие функции (или распределения) f, что пространство $\tau(f)$, порожденное сдвигами f, содержит только ограниченные функции или распределения. Изучается связь этих функций с п. п. функциями и псевдопериодическими функциями Пейли — Винера. Дается также спектральная характеристика таких функций. В третьей части работы изучаются с.-п. функции с абсолютно сходящимися рядами Фурье, в частности, с.-п. функции с лакунарными рядами Фурье.

Б. М. Левитан

7919. О некоторых оценках для ортогональных многочленов. Геронимус Я. Л., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 1, 28—31

Пусть $\{P_n(z)\}_0^\infty$ есть система многочленов (степени n), ортонормальных относительно обложения $d\sigma(\theta)$ на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Реферируемая статья представляет собой обширную сводку оценок (при различных предположениях относительно веса $\sigma(\theta)$) для $\max |P_n(z)|$ на всей окружности $z = e^{i\theta}$ или на ее дуге (приведены результаты С. Н. Бернштейна, В. А. Стеклова, Сегё и Шохата, Короуса, Фрёйда и автора). Указана также одна локальная оценка для функции Лебега ортогонального ряда по системе $\{P_n(z)\}_0^\infty$.

В. Ф. Николаев

7920. О чебышевском приближении аналитических функций алгебраическими полиномами. Вороновская Е. В., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 2, 206—209

Приводятся четыре теоремы, облегчающие отыскание полинома $Y_h(x)$ степени не выше h, наименее уклоняющего-

ся на [0,1] от функции $f(x)=\sum_0^\infty \alpha_l x^l$, в предположении, что известны так называемые экстремальные полиномы $\{Q(x)\}$ функционалов II класса (РЖМат, 1958, 3652). Приведем, например, формулировку теоремы 2: Если $f(x)=\sum_{n+1}^\infty \alpha_l x^l$ задана, $Y_h(x)$—полином ее наилучшего приближения на [0,1] с отклонением L и $(\overset{\pm}{\sigma_l})_1^{\overline{s}}$ есть f_h-распределение, то среди экстремальных полиномов f_h-распределения всегда можно при достаточно большом N найти такой $Q_{N+2\overline{s}}(x)=\sum_0^{N+2\overline{s}} q_l x^l$, у которого $\overline{Lq_l}=\alpha_l$ $(i=h+1,\ldots,N)$. Под f_h-распределением следует понимать распределение точек уклонения полинома $Y_h(x)$ от функции $f(x)$. С. И. Зуховицкий

7921. О сходимости и суммировании интерполяционных процессов для функций от двух переменных. Киприянов И. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 111—126

Развернутое изложение результатов, опубликованных ранее без доказательств (РЖМат, 1955, 675, 2627).

А. Ф. Тиман

См. также: 7923, 8069 Д, 8209

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

7922. Обоснование теории функций и некоторые связанные с этим вопросы. Фабер (Begründung der Potential- und Funktionentheorie mit Einschluß gewisser Erweiterungen. Faber Karl), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1958, 61, № 1, 32—56 (нем.)

Один из результатов Хеффтера гласит, что если для любого прямоугольника $\overline{R}[a, b; \alpha, \beta]\subset G$, ограниченного прямыми $x=a$, b и $y=\alpha$, β, выполнено равенство

$$\oint_R q(x, y)\,dx + \rho p(x, y)\,dy = 0, \qquad (1)$$

то это равносильно существованию точки (ξ, η) строго внутри каждого R, для которой имеет место равенство

$$\frac{q(\xi, \alpha)-q(\xi, \beta)}{\alpha-\beta} - \rho\frac{p(a, \eta)-p(b, \eta)}{a-b} = 0; \qquad (2)$$

здесь ρ — одно из чисел -1, $+1$, 0. Автор одновременно с этим рассматривает уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

и показывает аналогию и различие между эллиптическим ($\rho=-1$), гиперболическим ($\rho=+1$) и параболическим ($\rho=0$) случаями.

Например, для того чтобы непрерывная вместе со своими первыми частными производными p и q функция $F(x, y)$ была гармонической в области G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (1) или равносильное ему равенство (2) при $\rho=-1$.

Некоторое утверждение справедливо и для случая $\rho=1$, но без предположения существования и непрерывности вторых частных производных функции $F(x, y)$ из равенства (2) уже не следует выполнение (3).

Каждый из трех случаев $\rho=-1, +1, 0$ связан с теорией соответствующих комплексных функций: $w=u+iv$, $u+jv$, $u+\varepsilon v$ ($i^2=-1$, $j^2=1$, $\varepsilon^2=0$).

Но в то время как в эллиптическом случае $\rho=-1$ существования и непрерывности p, q вполне достаточно для существования производной комплексной функции $u+iv$, не зависящей от направления приближения, в двух других случаях это следует лишь при дополнительном предположении существования и непрерывности всех частных производных 1-го порядка функций p, q.

Тем самым автор снова показывает (вслед за Хеффтером), что условие Гурса — существование производной $\frac{dw}{dz}$ — является существенно более сильным, чем условие Хеффтера (2).

Примечание референта. Все основные результаты автора известны, они лишь представлены им в собранном виде. Ю. Ю. Трохимчук

7923. Свойства функций от коэффициентов Фурье—Стилтьеса. Кахан, Рудин (Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier—Stieltjes. Kahane Jean-Pierre, Rudin Walter), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 10, 773—775 (франц.)

Рассматриваются комплекснозначные меры на окружности и их коэффициенты Фурье — Стилтьеса:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,d\mu(x),$$

а также последовательности вида $F(c_n)$, где $F(x)$ — некоторая функция, определенная для всех вещественных значений аргумента. Доказывается, что если для всякой вещественной последовательности коэффициентов Фурье—Стилтьеса $\{c_n\}$ последовательность $\{F(c_n)\}$ также является последовательностью коэффициентов Фурье—Стилтьеса, то функция $F(x)$ продолжается до целой аналитической функции во всей комплексной плоскости. Отсюда, в частности, вытекает известный ранее результат о несимметричности кольца функций с ограниченным изменением на окружности со сверткой в качестве кольцевого умножения. Ю. А. Шрейдер

7924. Метод аппроксимации комплексных корней уравнений. Кулик (A method of approximating the complex roots of equations. Kulik Stephen), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 2, 277—281 (англ.)

Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутом круге C и имеет там конечное число нулей a_l; u — некоторый параметр. При определенных условиях, накладываемых на значения u и z, можно утверждать, что

$$(u-a_1)^{c-b}/(z-a_1)^a = \lim_{n\to\infty} Q_{n,\,n-b}/[f(z)]^a Q_{n-a,\,n-c},$$

где a, b, c — целые числа, $Q_{n,k}(u, z)$ — функции, для вычисления которых приводятся рекуррентные соотношения.

Исследуются условия, которым должен быть подчинен выбор u и z для аппроксимации вещественных и комплексных корней a_1 функции $f(z)$ (в последнем случае даются формулы для вещественной и мнимой частей этих корней). См. также РЖМат, 1958, 2872.

Г. Н. Чеботарев

7925. О двух вырожденных рядах Гейне и одной цепной дроби Рамануджана. Перрон (Über zwei ausgeartete Heinesche Reihen und einen Kettenbruch von Ramanujan. Perron Oskar), Math. Z., 1958, **70**, № 3, 245—249 (нем.)

Пусть $G(b, q; x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\lambda} \frac{q^{2k-1}}{(1-q^k)(1+bq^{k-1})} \right) (bx)^{\lambda}$

$(|q| \neq 1)$ и $H(b, q; x) \equiv G(b^{-1}, q^{-1}; qx)$.

Доказывается, что

$$1 + b + \frac{xq}{|1} + \frac{xq^2}{|1+bq} + \frac{xq^3}{|1+bq^2} + \frac{}{|1+bq^3} + \ldots = (1+b)\frac{G(b, q; x \cdot b^{-1})}{G(bq, q; xb^{-1})}, \quad (1)$$

$$1 + b + \frac{bqx}{|1} + \frac{bq^2x}{|1+bq} + \frac{bq^3x}{|1+bq^2} + \frac{}{|1+bq^3} + \ldots = (1+b)\frac{H(b, q; x)}{H(bq, q; x)}. \quad (2)$$

Цепная дробь в левой части равенства (1) была ранее рассмотрена Рамануджаном в связи с изучением цепной дроби

$$1 + \frac{q}{|1} + \frac{q^2}{|1} + \frac{q^3}{|1} + \ldots$$

Из (1) и (2) вытекает тождество

$$\frac{H(b, q; x)}{G(b, q; x)} = \frac{H(bq^n, q; x)}{G(bq^n, q; x)} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (3)$$

Используя (3) при $n \to \pm\infty$, автор представляет каждую из функций $G(b, q; x)$ и $H(b, q; x)$ в виде отношения двух целых функций, а также находит полюсы функции $G(b, q; x)$ (ими оказываются при $|q| > 1$ числа вида $-q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) и функции $H(b, q; x)$.

Отмечается, что показательная функция — предельный случай функций $G(b, q; x)$ и $H(b, q; x)$. М. Б. Балк

7926. О единственности асимптотического разложения в произвольной области. Дейвис (Uniqueness theory for asymptotic expansions in general régions. Davis Philip), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 1, 849—859 (англ.)

Пусть область D обладает свойствами: 1) ограничена аналитической кривой C, 2) $z = 0 \in D$, $z = 1 \in C$, 3) касательная к кривой C в точке $z = 1$ не параллельна оси ox.

С аналитической в D функцией $f(z)$ сопоставляется асимптотический ряд в смысле Пуанкаре

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n. \quad (1)$$

Ставится задача найти необходимое и достаточное условие однозначного определения $f(z)$ из условия

$$\int_C |f_n(z)|^2 \, ds = \int_C \left| \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z-1)^{k-1}}{(z-1)^n} \right|^2 ds < MK^n m_n^n, \quad (2)$$

где

$$\int_C |f(z)|^2 dS = \lim_{r \to 1} \int_{C_r} |f(z)|^2 \, dS,$$

а C_r — прообраз окружности $|\zeta| = r < 1$ при отображении D на единичный круг функцией $\zeta = m(z)$, $m(0) = 0$, $m(1) = 1$.

Пусть $A\{m_n\}$ — класс функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (2). Доказывается теорема: Для того чтобы класс $A\{m_n\}$ был классом единственности определения $f(z) \in A\{m_n\}$, заданной асимптотическим разложением (1), необходимо и достаточно, чтобы для всех $t > 0$ имело место

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_C \ln \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{m_k^2} |(z-1)^{n-k}|^2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \ln |m(t)| \right\} ds = \infty,$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали C. Г. В. Бадалян

7927. Интерполяция ортонормированной системы. Мешковский (Interpolation durch Funktionen eines Orthonormalsystems. Meschkowski Herbert), Arch. Math., 1957, **8**, № 3, 175—179 (нем.)

Пусть B — область, ограниченная конечным числом непрерывных кривых, K — множество всех аналитических и однозначных в $\bar{B}$ функций, $\{u_\nu$ — последовательность точек области B, сходящаяся внутри B. Скалярное произведение функций множества K определяется обычным образом при помощи интеграла вдоль границы области B. Автор указывает для заданных u_ν полную ортонормированную систему функций $\{\mu_\nu(z)\}$, обладающую тем свойством, что для $f(z) \in K$ коэффициенты разложения

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \mu_\nu(z) \quad (1)$$

выражаются с помощью простых алгебраических действий (без интегрирования) через $f(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Вследствие этого равенство (1) можно рассматривать как интерполяционную формулу для построения функции множества K по заданным значениям в точках u_ν. В статье доказывается, что в случае, когда за область B берется $|z| \geqslant 1$, введенные функции $\mu_\nu(z)$ являются ортогональными в области $|z| \geqslant 1$ ко всем аналитическим однозначным функциям в этой области, имеющим нули в точках $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$. В. П. Кабайла

7928. Некоторые свойства особых интегралов. Иванов В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 89—95

Пусть L — замкнутая кривая Ляпунова на комплексной плоскости с началом координат внутри L. Пусть

$$\rho_n(f, L) = \inf_{P_n \in H_n} \sup_{t \in L} |f(t) - P_n(t)|,$$

где H_n — совокупность всевозможных многочленов вида $\sum_{-n}^{n} a_k t^k$. Через $Z(p)$ обозначим класс функций, определенных на L и удовлетворяющих условию $\Delta_2 f^{(p)} = f^{(p)}[t(s+h)] + f^{(p)}[t(s-h)] - 2f^{(p)}[t(s)] = O(h)$.

В работе доказаны следующие основные теоремы: 1) $f \in Z(p)$ на L вместе с $sf = (\pi i)^{-1} \int_L (t-t_0)^{-1} f(t) dt$, $t_0 \in L$; 2) Если $f \in Z(p)$ на L, то $\rho_n(f, L) = O(n^{-p-1})$; 3) Если для любого $n > 0$ $\rho_n(f, L) = O(n^{-p-1})$, то $f \in Z(p)$ на L. Б. В. Хведелидзе

7929. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций. Бабенко К. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 5, 631—640

Пусть $B^{(r)}$ — класс функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, аналитических в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих там условию $|f^{(r)}(z)| \leqslant 1$

Устанавливается, что при любом натуральном r и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ для $n \geqslant r$

$$\sup_{f \in B^{(r)}} \inf_{a_k} \max_{|z| \leqslant \rho} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| =$$

$$= \inf_{a_k} \max_{|z|<\rho} \left| \frac{z^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = \frac{\rho^n}{n(n-1)\dots(n-r+1)}.$$

Автор предлагает также новое упрощенное доказательство основного результата работы С. Б. Стечкина (РЖМат, 1954, 3292), посвященной асимптотической оценке верхней грани $\sup_{f \in B^{(r)}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k \right|$. А. Ф. Тиман

7930. О некоторых последовательностях, связанных с плоскими множествами, и их применении к конформному отображению. Лея (Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme. Leja F.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 8—13 (франц.)

Пусть E — плоский компакт, $a_1 \in E$. Последовательность точек $\{a_n\}$, $a_n \in E$ определяется индуктивно требованием $\prod_{k=1}^{n} |a_{n+1} - a_k| = \max_{z \in E} \prod_{k=1}^{n} |z - a_k|$. Все a_k $(k > 1)$ лежат на границе F бесконечной компоненты D_∞ дополнения к E. Доказывается, что при $n \to \infty$ величина $\left(\prod_{k=1}^{n} |a_{n+1} - a_k| \right)^{\frac{1}{n}}$ имеет пределом трансфинитный диаметр $v(E)$ множества E. Доказательство опирается на следующую лемму тауберова типа: Пусть $c_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \left(c_1 c_2^2 \dots c_n^n \right)^{2/n(n+1)} = \gamma$; тогда, если $c_{n+1} \leqslant \leqslant d^{\frac{1}{n+1}} c_n^{\frac{n}{n+1}}$ $(d > 0)$, и $\lim_{n\to\infty} c_n \geqslant \gamma$, то $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$.

Кроме того, последовательность аналитических в D_∞ функций $\left(\prod_{k=1}^{n} (z - a_k) \right)^{\frac{1}{n}}$, нормированных на ∞ условием быть асимптотически равными z, сходится в D_∞ при $n \to \infty$ к аналитической функции $P(z)$ с однозначным модулем, причем $\log |P(z)| = G(z) + \log v(E)$, где $G(z)$ — функция Грина D_∞ с полюсом в ∞. Если D_∞ односвязна, то $P(z) = w$ однозначна и отображает D_∞ на $|w| > v(E)$. В каждой связной компоненте дополнения к D_∞ последовательность $\left(\prod_{k=1}^{n} (z - a_k) \right)^{\frac{1}{n}} e^{i\theta_n}$ при надлежащей нормировке сходится равномерно к $v(E)$.

Примечание референта. Приведенная в реферате лемма легко вытекает из тауберовой теоремы Харди для метода Чезаро (Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит. 1951, теорема 63), так как из условий леммы следует, что $\log c_n = O(\log n)$. Н. С. Ландкоф

7931. Экстремальные точки множеств и их применения в теории функций. Лея (Points extrémaux des ensembles et leur application dans la théorie des fonctions. Leja F. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar AI, № 250/20, 6 p.) (франц.)

Приводятся без доказательства результаты, полученные автором ранее (Ann. Soc. polon. math., 1934, **12**, 57—71; 1935, **14**, 116—134; 1949, **22**, 245—268; РЖМат, 1958, 5656). Н. С. Ландкоф

7932. Некоторые теоремы о расположении экстремальных точек плоских множеств. Гурский, Сицяк (Certains théorèmes concernant la répartition des points extrémaux dans les ensembles plans. Górski J., Siciak J.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 21—29 (франц.)

Пусть $E = \bigcup_1^p E_j$; $E_j \cap E_k = 0$ $(j \neq k)$, где E_j — ограниченный невырожденный континуум. Если $f(z)$ — непрерывная функция на E, то с помощью „расстояния" $\omega(z, \zeta) = |z - \zeta| \exp(-f(z) - f(\zeta))$ определяется при каждом n набор экстремальных точек (РЖМат, 1958, 5656). Пусть $\alpha_n(E_k)$ — число экстремальных точек, принадлежащих E_k; $\alpha_k(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \alpha_n(E_k)$. Доказывается непрерывность функционалов $\alpha_k(f)$ в равномерной метрике. Если $\alpha_k \geqslant 0$; $\sum_1^p \alpha_k = 1$ — любые константы, для которых разность $\max_{k=1,2,\dots,p} [\alpha_k - \alpha_k(0)] - \min_{k=1,2,\dots,p} [\alpha_k - \alpha_k(0)]$ достаточно мала, то существует функция $f(z) = \lambda_k$ при $z \in E_k$, для которой $\alpha_k(f) = \alpha_k$ $(k = 1, 2, \dots, p)$. Н. С. Ландкоф

7933. О расположении экстремальных точек плоских множеств. Сицяк (Sur la distribution des points extrémaux dans les ensembles plans. Siciak J.), Ann. polon. math., 1958, **4**, № 2, 214—219 (франц.)

Пусть E — плоский компакт, E^* — производное множества экстремальных точек E (РЖМат, 1958, 5656). Определяется следующее свойство (P): каждой точке $z_0 \in E$ и любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta(\varepsilon)$, что для всякой последовательности полиномов $\{P_n(z)\}$, где $P_n(z)$ имеет степень n, равномерно ограниченной на E, последовательность $\{P_n(z)(1+\varepsilon)^{-n}\}$ будет равномерно ограниченной в окрестности $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Доказывается, что если „раствор" (l'écart) $v(E, f)$ положителен и выполняется свойство (P), то множество E является приведенным (т. е. в любой окрестности каждой из своих точек оно имеет положительную емкость), и E^* не зависит от выбора систем экстремальных точек. Н. С. Ландкоф

7934. О критерии однолистности, предложенном Умедзава. II. Рид (On Umezawa's criteria for univalence. II. Reade Maxwell O.), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 3, 255—259 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1958, 1994). Доказывается следующее достаточное условие однолистности аналитической функции, являющееся обобщением критерия однолистности Умедзава (РЖМат, 1957, 3948):

Если Γ — простая замкнутая кусочно-аналитическая кривая с конечным числом угловых точек (ограничивающая область D), в которых определены левая и правая касательная, и $f(z)$ — аналитическая внутри Γ, $f'(z) \neq 0$, причем $\int_C d[\arg df(z)] \geqslant -\pi + \varepsilon$ для каждой дуги C, принадлежащей Γ, и некоторого $\varepsilon > 0$, то $f(z)$ однолистна внутри Γ и образ области D при отображении $w = f(z)$ есть область, близкая к выпуклой (Умедзава считал Γ аналитической кривой). Как следствие этого признака получена теорема:

Пусть φ фиксировано, $0 \leqslant \varphi < \pi$. Пусть D — область, в которой любую пару точек z_1, z_2 можно соединить ломаной, состоящей из двух звеньев $z_1 z_3$, $z_3 z_2$ и лежащей в D, так что $\left| \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \right| \leqslant \varphi$. Если $f(z)$ аналитична в D и для каждой дуги C, принадлежащей D: $\left| \int_C d(\arg f'(z)) \right| < \pi - \varphi$, то $f(z)$ однолистна в D. Доказательство основано на том, что любую пару точек D можно включить в область, ограниченную кусочно-аналитической кривой Γ, вдоль которой выполнено условие $\int_C d[\arg df(z)] \geqslant -\pi + \varepsilon$, $C \in \Gamma$.

Далее автор, ссылаясь на работу референта (РЖМат, 1956, 2920), в которой выведены два достаточных условия однолистности аналитической функции, дает новое доказательство достаточности этих условий, аналогичное по идее доказательству приведенной выше теоремы.

В. С. Рогожин

7935. Одна теорема искажения однолистных функций. Одзава (A distortion theorem on schlicht functions.

Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, 9, № 4, 145—157 (англ.)

При помощи вариационного метода Голузина — Шиффера доказывается для достаточно малых $r < 1$ справедливость оценки

$$\left| \frac{f'(r) + f'(-r)}{f(r) - f(-r)} \right| \leqslant \frac{1 + 6r^2 + r^4}{r(1 - r^4)}$$

в классе функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, регулярных и однолистных в круге $|z| = r < 1$.

Автор отмечает, что ему была неизвестна работа Г. М. Голузина (Матем. сб., 1946, 18, 379—389), в которой другим методом та же оценка установлена для любых $r < 1$. Имеются опечатки. Г. В. Корицкий

7936. Об одном классе однолистных звездных отображений. Шильд (On a class of univalent, star shaped mappings. Schild Albert), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 5, 751—757 (англ.)

Рассматривается подкласс St^* класса St звездных однолистных регулярных в $|z| < 1$ функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geqslant \frac{1}{2}, \quad |z| < 1$$

$\left(\text{звездные функции порядка } \frac{1}{2}\right)$.

Устанавливается связь с выпуклыми и звездными функциями и строятся аппроксимирующие функции. Находятся оценки $|f(z)|$, область значений $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ и граница коэффициентов $|a_n|$ тейлорова разложения. Доказывается, что если $\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)|a_n| \leqslant 1$, то $f(z) \in St^*$.

Приводятся оценки для радиуса „специальной" звездности $\left(\text{порядка } \frac{1}{2}\right)$ r^*, заключенном, как это сразу следует из его определения, между радиусами звездности и однолистности: $2-\sqrt{3} < r^* < \operatorname{th}\frac{\pi}{4}$. Доказано, что $r^* > 0.301\ldots$

Примечание референта. Некоторые из этих результатов были получены ранее Робертсоном (Robertson M. S., Ann. Math., 1936, 37, 374—408) и У Чжо-женем (РЖМат, 1958, 6630). С. А. Касьянюк

7937. О конформном отображении многосвязной области. Гурский (Sur la représentation conforme d'un domaine multiplement connexe. Górski J.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 218—224 (франц.)

Пусть D — область, содержащая ∞ и ограниченная двумя континуумами E_1, E_2. Обобщается конструкция трансфинитного диаметра компакта $E_1 \cup E_2$. А именно, при отыскании максимума $\prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} |\zeta_j - \zeta_k|$ требуется, чтобы n точек ζ_l лежали на E_1 и n точек — на E_2. Предел $v(E_1, E_2)$ при $n \to \infty$ полученных максимумов называется раствором (l'écart) множества E (РЖМат, 1957, 4084). Величина $-\log v(E_1, E_2)$ есть минимум интеграла энергии $\iint_{EE} \log|z-\zeta|^{-1} d\sigma(z)\, d\sigma(\zeta)$ по всем единичным массам σ на E, распределенным в отношении 1 : 1 между E_1 и E_2. Методом Фростмана исследуется логарифмический потенциал $u(z)$ минимизирующей массы μ. Если E_μ — носитель массы μ, то доказано, что $u(z) = k_1$ почти всюду на $E_1 E_\mu$ и $u(z) = k_2$ почти всюду на $E_2 E_\mu$. Величина $-\log v(E_1, E_2)$ находится между константами k_1 и k_2. Если k_l — большая из этих двух констант, то $E_l E_\mu = E_l$. Аналитическая функция $\psi^2(z)$, где $\log|\psi(z)| = -u(z)$, оказывается однозначной в D. Она дает конформное отображение области, ограниченной E_μ, на двулистную римanову поверхность, ограниченную двумя окружностями. В случае $k_1 = k_2 = -\log v(E_1, E_2)$ эта функция отображает D на двулистную внешность круга $|w| = e^{-2k_1}$.

Н. С. Ландко.

7938. Вариационные формулы для многолистных функций. Гудман (Variation formulas for multivalent functions. Goodman A. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 1, 129—148 (англ.)

Автор распространяет некоторые известные для однолистных функций вариационные формулы на многолистные функции. Пусть $R(p, q)$ обозначает класс функций $f(z)$ вида $f(z) = z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} A_n z^n$ $(1 \leqslant q \leqslant p)$, регулярных и p-листных в круге $|z| < 1$. В следующей теореме, являющейся основной в работе, обобщается вариационная формула Г. М. Голузина.

Теорема. Пусть $f(z) \in R(p, q)$ и допустим, что для каждого значения λ из промежутка $I: 0 \leqslant \lambda < \lambda_0$ функция $F(z, \lambda) = f(z) + \lambda q(z)$ регулярна в кольце R: $r < |z| < 1$ и приращение аргумента $\{F(\rho e^{i\theta}, \lambda) - c\}$ при θ, пробегающем интервал $[0, 2\pi]$, для всякого ρ из промежутка $r < \rho < 1$ и любого комплексного c $(F(\rho e^{i\theta}, \lambda) \neq c)$, не превосходит $2\pi p$. Допустим, далее, что $f'(z) \neq 0$ в R. Тогда существует функция $f^*(z)$, регулярная и p-листная в $|z| < 1$ для λ из промежутка $I_1: 0 \leqslant \lambda < \lambda_1$, причем

$$f^*(z) = f(z) + \lambda\left(q(z) - zf'(z)L(z) + \overline{zf'(z)L\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)}\right) + O(\lambda^2),$$

где $L(z)$ — сумма членов с отрицательными степенями z в разложении $q(z)/zf'(z)$ в кольце R в ряд Лорана. Если, далее, $F(z, \lambda)$ при всяком λ из I_1 не имеет нулей в R, то $f(z)$ и $f^*(z)$ имеют в $|z| < 1$ одинаковое число нулей. Если $f'(z) + \lambda q'(z)$ при всяком λ из I_1 не имеет нулей в R, то $f(z)$ и $f^*(z)$ имеют в $|z| < 1$ одинаковое число критических точек.

Показывается, что в качестве функции $q(z)$ можно взять $\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k f^2(z)}{f(z) - b_k}$, где B_k и b_k — произвольные комплексные постоянные, причем все точки b_k должны находиться на положительном расстоянии от границы образа единичного круга, образуемого функцией $f(z)$.

В работе дается также обобщение на класс $R(p, q)$ вариационной формулы Шеффера — Спенсера (A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, Coefficient regions for schlicht functions. New York, 1950). С. А. Гельфер

7939. Обтекание тонкого слабоизогнутого профиля ограниченным потоком жидкости. Алексеев О. И., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1956, 33—34, 19—30

Решается задача обтекания тонкого слабоизогнутого профиля в канале, ограниченном двумя прямолинейными параллельными стенками, потоком невязкой несжимаемой жидкости.

Принимая приближенно обтекаемый профиль за отрезок прямой и используя принцип отражения в прямолинейных стенках, автор сводит вопрос к решению задачи об обтекании бесконечным потоком бесконечной решетки, составленной из прямолинейных отрезков. Последняя приводится к решению краевой задачи Римана для того же контура. Из решения последней автор получает решение первоначальной задачи в замкнутой форме через интегралы от гиперболических функций.

Примечание референта. При решении краевой задачи Римана автор использует метод, предложенный референтом (Краевые задачи, Физматгиз, 1958, §§ 41, 42), решения задачи для разомкнутого контура сведением к замкнутому. Этот метод имеет обоснование лишь для случая контура, составленного из конечного числа кривых. Поэтому решение автора не является строгим. Ему можно придать полную строгость, если воспользоваться результатами Л. И. Чибриковой (РЖМат, 1957, 7828) по решению краевой задачи Римана в классе автоморфных функций. В данном случае автоморфные функции обратятся в периодические функции с чисто мнимым периодом. Ф. Д. Гахов

7940. Двумерное вихревое движение в односвязной области. Андерссон (On two-dimensional vortex motion in a simply connected region. Andersson Bengt Joel. Kungl. tekn. högskolans handl., 1958, № 126, 6 pp.) (англ.)

Рассматривается плоское движение несжимаемой жидкости, вызванное вихрем интенсивности 2π находящимся в точке $z = x + iy$. Предполагается, что граница области является линией тока. Доказывается, что вихревая нить описывает кривую $|H(z, z)| = \text{const}$, если $w(Z, z) = (Z-z)H(Z, z)$, где $w(Z, z)$ — функция, отображающая круг $|w| < 1$ на изучаемую область. Приводятся примеры. М. Т. Нужин

7941. Периодическая задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. Беленький М. Я., Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. трансп., 1958, вып. 25, 268—273

Рассматривается первая краевая задача теории упругости для бесконечно длинной полосы в случае периодически распределенных по ее границе нагрузок. В этом случае напряжения выражаются через две периодические аналитические функции

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}.$$

Функция $\Phi(z)$, аналитическая в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$, представляется в виде суммы двух функций $\Phi(z) = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)$, $z_1 = x + i(y+1)$, $z_2 = x + i(y-1)$, из которых первая аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant -1$, вторая — в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 1$. Отыскивая эти функции в виде

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \frac{p_1(t) - iq_1(t)}{1 - e^{\frac{\pi i}{a}(z_1 - t)}}\,dt,\quad \Phi_2(z_2) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \frac{p_2(t) + iq_2(t)}{1 - e^{-\frac{\pi i}{a}(z_2 - t)}}\,dt,$$

автор получает для определения $p_1(t)$, $p_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ систему четырех интегральных уравнений. Решение системы ищется в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами, для определения которых получается бесконечная система алгебраических уравнений.

Подробно проводится счет для частного случая, когда граничные данные симметричны относительно продольной оси симметрии полосы. В этом случае бесконечная система распадается на системы из четырех уравнений. Указывается, что при отсутствии симметрии система распадается на системы из 8 уравнений.

Примечание референта. Рассматриваемая задача просто решается в явном виде путем приведения к краевой задаче Римана для периодических функций. Л. И. Чибрикова

7942. Применение конформного отображения к решению некоторых задач кручения. Яковлева В. И., Научн. зап. Укр. полигр. ин-та, 1958, 12, № 1, 231—249

Рассмотрены случаи кручения сплошных и полых упругих призматических стержней, поперечные сечения которых представляют собою образы кругового кольца при отображениях вида $\omega(\zeta) = R\sum_{\nu=0}^{n} g_{p\nu+1}\zeta^{p\nu+1}$, где p — число осей симметрии сечения.

Приведены общие выражения для комплексной функции кручения, напряжений и жесткости. Рассмотрены конкретные примеры для сечений сводчатой формы ($p = 1$), треугольной ($p = 3$) и квадратной ($p = 4$). И. Г. Араманович

7943. Концентрация напряжений в пластинке с отверстием. Бурмистров Е. Ф., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1958, № 8, 41—47

Рассматривается изотропная бесконечная пластинка с отверстием, на которую отображается внешность единичного круга функцией вида

$$z = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{n} s_k\,\zeta^{-k}\right),$$

где R и s_k — действительные постоянные. Предполагается, что отверстие или заполнено жестким ядром, или по его краю действуют равномерно распределенные внешние усилия. Используется известный метод Н. И. Мусхелишвили решения задач плоской теории упругости для областей, которые конформно отображаются на круг при помощи рациональной функции. Коэффициенты, входящие в выражение комплексных потенциалов, определяются из системы линейных уравнений. Конкретных примеров не приводится. И. Г. Араманович

7944. О форме тел с минимальным волновым сопротивлением. Костычев Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 2, 9—15

Рассматривается метод построения осесимметричных и плоских тел, обладающих минимальным волновым сопротивлением при сверхзвуковых скоростях. Сопротивление тела выражается через контурные интегралы по ударной волне и характеристике второго семейства, которые ограничивают область влияния потока газа. Вариационная задача формулируется для неизвестных функций на введенном контуре. Обычно этот метод позволяет найти точное решение задачи и построить искомый контур тела как линию тока в течении, полностью определяемом ударной волной и характеристикой второго семейства.

Работа принципиально ошибочна. Вариационные задачи для осесимметрических и плоских тел являются вырожденными и не могут быть решены, вообще говоря, классическими методами вариационного исчисления. Автор забывает о необходимости удовлетворения условий на ударной волне, что создает впечатление разрешимости задачи, и предлагает неправильные решения, не удовлетворяющие этим условиям.

По этим причинам заключение автора о том, что в плоском случае минимальным сопротивлением обладает прямолинейный профиль, является неверным. Одно из уравнений Эйлера в этом случае также содержит ошибки. Утверждение о возможности получения соотношений на ударной волне из трех уравнений Эйлера, содержащих два произвольных множителя Лагранжа, является неправильным. Более того, соотношения на ударной волне, вообще говоря, не удовлетворяют здесь уравнениям Эйлера. Работа содержит и другие ошибки, например, ошибочно одно из исходных уравнений (1, 2), равенство (1, 6) и др. Примеров расчетов нет. Решение для плоского профиля с учетом особенностей вырожденной задачи, иллюстрированное примерами, дано референтом (РЖМат, 1959, 7036). Ю. Д. Шмыглевский

7945. Изгиб пластинки в виде эллиптического конфокального кольца с подкрепленным краем. Мартынович (Згин пластинки у вигляді еліптичного кон-

фокального кільця з підкріпленим краєм. Мартинович Т. Л.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 1, 70—79 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается задача об изгибе упругой изотропной пластинки, ограниченной конфокальными эллипсами, граница которой подкреплена тонким упругим кольцом постоянного сечения. Пластинка находится под действием изгибающих моментов, перерезывающих сил, приложенных вдоль подкрепленных краев, и распределенной нагрузки, действующей нормально к срединной плоскости пластинки. Функции, определяющие напряженное состояние пластинки, находятся методом последовательных приближений. Как частный случай получается решение для пластинки без подкрепления с жестко защемленным внешним контуром. Рассмотрен пример изгиба пластинки в виде эллиптического софокусного кольца, внешняя граница которого жестко защемлена, а внутренняя подкреплена тонким упругим стержнем с равными жесткостями на изгиб и кручение. Пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки. Построены графики изгибающих моментов по контуру спая и вдоль защемленной границы пластинки. Г. Н. Савин

7946. Кручение кругового цилиндра, имеющего соосную многогранную полость. Найман М. И. В сб.: Расчеты на прочность. Вып. 3. М., Машгиз, 1958, 170—193

Рассматривается задача о свободном кручении однородных изотропных стержней, поперечное сечение которых двусвязная область. Внешний контур этой области близок к окружности, а внутренний—многоугольник с закругленными вершинами.

Следуя методу Н. И. Мусхелишвили, автор отображает рассматриваемую область на круговое кольцо с помощью полинома

$$\omega(\zeta) = R\zeta\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{k} m_{-\alpha}\,\zeta^{-\alpha n}\right),$$

где n—число сторон многоугольника, $m_{-\alpha}$ и R— действительные положительные числа, ζ—комплексная переменная. Даются выражения для функции кручения и напряжений. Производится подробное изучение сечений с тремя различными внутренними контурами—равносторонним треугольником, квадратом и правильным шестиугольником. В каждом из этих случаев рекомендуются формулы для подсчета максимальных напряжений в вершинах внутреннего контура, дающие достаточную для практического применения точность.

К. В. Соляник-Красса

7947. Кручение круглого бруса с двумя врезами. Ширяев Е. А., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 4, 549—553

Указывается комплексная функция кручения для однородного изотропного круглого цилиндра с двумя продольными трещинами различной глубины, расположенными на концах одного диаметра. Даются значения напряжений на круговой части контура и на краях трещин. В случае трещин с равной глубиной приводится выражение для жесткости при кручении.

К. В. Соляник-Красса

7948. Приближенное конформное отображение эллипсоида Бесселя. Шмагель (Přibližné konformní zobrazení Besselova elipsoidu. Šmahel Josef), Aplikace mat., 1957, 2, № 4, 297—313 (чешск.; рез. русск., нем.)

Можно построить приближенно конформное отображение эллипсоида на плоскость посредством центрального проектирования из удобно выбранной точки Q на нормали эллипсоида, построенной в точке P эллипсоида, на касательную плоскость в точке P. Расстояние точек P, Q равно удвоенному радиусу средней кривизны. Используя аффинное преобразование, автор дает локальное—в окрестности точки P_0—удобное параметрическое описание эллипсоида, причем декартовы координаты точек центрального проектирования являются простыми функциями этих параметров. Переход к географическим параметрам на эллипсоиде, т. е. введение географической широты ψ и географической долготы λ в качестве параметров при параметрическом представлении эллипсоида, доставляет полезное для картографирования соответствие между точками эллипсоида и их проекциями на соответствующую касательную плоскость. На основании вычисления метрического тензора эллипсоида вращения и метрического тензора соответствующего центрального отображения в параметрах λ и ψ можно легко изучать искажение длины при рассматриваемом проектировании. Из обширной таблицы, в которой приводится локальное искажение длины, угла и площади поверхности, ясно, что на Земле (при условии, что она представляет собой эллипсоид вращения) рассматриваемое отображение на касательную плоскость в точке P до расстояния 370 *км* от точки P является практически конформным. Максимальное искажение угла не превышает $0{,}7''$.

F. Nožička

7949. Представления непрерывных функций. Карлесон (Representations of continuous functions. Carleson Lennart), Math. Z., 1957, **66**, № 5, 447—451 (англ.)

Проблема, изучаемая в этой статье, в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Пусть C—линейный класс непрерывных функций, определенных на множестве S, и пусть E—замкнутое подмножество S. Каковы должны быть условия на E, чтобы каждая непрерывная на E функция могла рассматриваться как сужение на E некоторой функции из класса C. Беря за S единичную окружность $|\zeta| = 1$, а за C—класс функций $f(\zeta)$, являющихся граничными значениями аналитических в $|z| < 1$ и непрерывных в $|z| \leqslant 1$ функций $f(z)$, автор доказывает следующую теорему:

Теорема 1. Пусть E—замкнутое множество на $|\zeta| = 1$ меры нуль и пусть $\varphi(\zeta)$ непрерывна на E. Тогда существует аналитическая в $|z| < 1$ и непрерывная в $|z| \leqslant 1$ функция $f(z)$ такая, что

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta),\ \zeta \in E.$$

Если же $mE > 0$, то для произвольной $\varphi(\zeta)$ это, вообще говоря, не так (что сразу следует из теоремы единственности аналитических функций). Показывается, что известный результат братьев Рисс о том, что если $\int_{|z|=1} z^n\,d\mu(z) = 0$, $n \geqslant 0$, то μ абсолютно непрерывна, может быть очень легко выведен из теоремы 1. Доказательство опирается на следующую лемму о банаховых пространствах.

Лемма 1. Пусть B—сепарабельное банахово пространство с нормой $\|x\|$ и пусть $B_1 \subset B$—банахово пространство с нормой $\|x\|_1 \geqslant \|x\|$. Если существует последовательность элементов $\{x_\nu\}$ такая, что для каждого линейного функционала $\alpha(x)$ на B имеем

$\|\alpha\| \leqslant M \sup |\alpha(x_\nu)|$, $x_\nu \in B_1$, $\|x_\nu\|_1 \leqslant 1$, то $B = B_1$ и $\|x\|_1 \leqslant M\|x\|$, $x \in B_1$.

В заключение указывается на возможность применения леммы 1 к изучению проблемы представления функций $\varphi(x)$, непрерывных на компактном множестве E точек действительной оси, в виде интегралов Фурье—Стилтьеса

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,d\sigma(x),\ x \in E. \qquad (1)$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие, чтобы всякая непрерывная на E функция $\varphi(x)$ допускала представление (1), заключается в том, что

$$\sup_t \left| \int_E e^{ixt}\, d\mu(t) \right| \geqslant m \int_E |d\mu|,$$

где $m > 0$ не зависит от μ.

Теорема 3. Если каждая непрерывная на E функция допускает представление (1), причем E—подмножество интервала $(-\pi, \pi)$, то $\varphi(x)$ может быть также представлена в виде $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\, dt$, где f суммируема или

$$\varphi(x) = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}, \text{ где } \Sigma_{-\infty}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Примечание референта. Одновременно с автором теорема 1 была установлена Рудиным (РЖМат, 1957, 6301). Г. Ц. Тумаркин

7950. Построение функций с заданным граничным поведением. Пиранян (Construction of functions with prescribed boundary behavior. Piranian George. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/26, 8 pp.) (англ.)

Пусть $f(z)$ аналитична в $|z| < 1$. Точку $e^{i\theta}$ автор называет точкой Лузина функции $f(z)$ относительно выпуклой касательной области B (реф. 7952), если бесконечна площадь образа области $B(\theta)$ на римановой поверхности $f(z)$. Доказывается

Теорема 1. Пусть B_1 и B_2—выпуклые касательные подобласти круга $|z| < 1$ и пусть E—множество типа G_δ на $|z| = 1$. Тогда существует функция $f(z)$, аналитическая в $|z| < 1$ и непрерывная в $|z| \leqslant 1$, для которой каждая точка $e^{i\theta}$ множества E является точкой Лузина относительно B_1 и ни одна точка $e^{i\theta} \notin E$ не есть точка Лузина относительно B_2.

Эта теорема усиливает ранее доказанную автором совместно с Рудиным теорему о существовании аналитической в $|z|<1$ и непрерывной в $|z| \leqslant 1$ функции, для которой все точки $|z| = 1$ являются точками Лузина относительно наперед заданной касательной области B (РЖМат, 1957, 4744).

В совместной работе автора с Шилдсом (реф. 7951) установлено существование аналитической в $|z| < 1$ функции с аналогичными свойствами, которая, хотя и не является непрерывной в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, но ограничена в $|z| < 1$ и имеет $|f(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

Развитые при доказательстве теоремы методы позволяют установить

Теорему 2: Если E—множество типа G_δ на $|z|=1$, то существует функция $f(z)$, которая аналитична в $|z| < 1$ и отображает каждый радиус, оканчивающийся в $e^{i\theta}$ в кривую бесконечной длины тогда и только тогда, когда $e^{i\theta} \in E$.

В работе Рудина (РЖМат, 1956, 2939) конструируются аналитические функции, отображающие почти все радиусы круга $|z| < 1$ на кривые бесконечной длины и удовлетворяющие, кроме того, различным добавочным требованиям: непрерывности в $|z| \leqslant 1$, быть произведением Бляшке и т. д. Остается открытым вопрос, можно ли подчинить подобным добавочным ограничениям функцию, существование которой утверждается в теореме 2.

Теорема 3 формулируется аналогично теореме 2 с заменой евклидовой длины образа радиуса на сферическую длину. Конструкция функций, аналитических в $|z| < 1$ и отображающих каждый радиус круга $|z| < 1$ на кривую с бесконечной сферической длиной, была указана Багемилом, Эрдешем и Сейделем (РЖМат, 1954, 5115).

В заключение в связи с результатами Багемила (реф. 7952) приводится теорема того же характера, что и теорема 2 цитированной работы Багемила, но в которой вместо обычной длины образа радиуса идет речь о сферической длине. Г. Ц. Тумаркин

7951. Множества точек Лузина аналитических функций. Пиранян, Шилдс (The sets of Lusin points of analytic functions. Piranian George, Shields Allen). Michigan Math. J., 1957, **4**, № 1, 15—22 (англ.)

Точка $e^{i\theta}$ называется точкой Лузина, аналитической в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$, если $f(z)$ отображает всякий круг, касающийся в $e^{i\theta}$ изнутри $|z| = 1$, на риманову область бесконечной площади. Ловатер и Пиранян, используя степенные ряды с пропусками Фабри, доказали существование аналитической в $|z| < 1$ и непрерывной в $|z| \leqslant 1$ функции $f(z)$, у которой все точки $|z| = 1$ являются точками Лузина (РЖМат, 1957, 2223), Дженкинс (РЖМат 1957, 8572) путем непосредственной конструкции соответствующей римановой поверхности установил существование ограниченной аналитической в $|z| < 1$ функции $f(z)$ с граничными значениями равными по модулю единице почти всюду на $|z| = 1$ ($|f(e^{i\theta})| = 1$), у которой точками Лузина являются все точки окружности $|z| = 1$, за исключением, быть может, множества меры нуль. Авторы считают правдоподобным, что точками Лузина в примере Дженкинса будут в действительности все точки окружности $|z| = 1$, но доказательство этого им кажется весьма трудным. В связи с этим в теореме 1 строится новая функция $f(z)$ с теми же свойствами, что и в примере Дженкинса, но у которой точками Лузина являются уже все точки $|z| = 1$. Функцию $f(z)$ с нужными свойствами удается построить в виде

$$f(z) = \exp \Sigma_{m,k} a_{m,k}(z + z_{m,k})/z - z_{m,k}$$

при надлежащем размещении точек $z_{m,k}$ на единичной окружности и подборе постоянных $a_{m,k}$. Чтобы все точки $|z| = 1$ являлись точками Лузина, потребовалось проведение целой цепи рассуждений и оценок, связанных с процессом выбора этих постоянных.

Слегка модифицируя конструкцию примера, изложенную в теореме 1, авторы получают в теореме 2 исчерпывающую характеристику множеств точек Лузина произвольной аналитической функции: Для того чтобы множество E было множеством точек Лузина некоторой функции, аналитической в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы E было типа G_δ.

Далее указывается, что методы, развитые при доказательствах теорем 1 и 2, позволяют доказать следующее:

Теорема 3. Пусть множество E типа G_δ на $|z|=1$; пусть R^* и R — две подобласти $|z| < 1$, границы которых имеют с $|z| = 1$ лишь одну общую точку $z=1$, в которой эти границы касаются $|z| = 1$. Обозначим через $R^*(\theta)$ и $R(\theta)$ области, получающиеся вращением R^* и R на угол θ вокруг $z=0$. Тогда существует функция $f(z)$ со следующими свойствами: а) $f(z)$ голоморфна и ограничена в $|z| < 1$, причем $|f(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, б) если $e^{i\theta} \notin E$, то $f(z)$ отображает область $R^*(\theta)$ в риманову область конечной площади, в) для всех $e^{i\theta} \in E$, за возможным исключением лишь счетного множества точек, $f(z)$ отображает область $R(\theta)$ в риманову область бесконечной площади, если же $e^{i\theta}$ принадлежит исключительному множеству, то $e^{i\theta}$ есть точка Лузина $f(z)$.

Авторы замечают, что заключение теоремы о возможном наличии счетного множества исключительных точек является, по-видимому, излишним. Чтобы устранить его, можно было бы искать функцию $f(z)$ не в ранее указанном виде, соответствующем случаю, когда в выражении

$$f(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta) \qquad (1)$$

функция $\mu(\theta)$—невозрастающая функция скачков, а попытаться найти искомую функцию среди функций (1) с непрерывной невозрастающей $\mu(\theta)$. Но это, по мнению авторов, усложнит вычисления. Г. Ц. Тумаркин

7952. О степенных рядах, площади и длине. Багемил (On power series, area, and length. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 3, 281—283 (англ.)

Пусть L^p, $p\geqslant 1$ – банахово пространство, состоящее из всех комплексных последовательностей $\{a_k\}$, для которых $\Sigma\,|a_k|^p<\infty$, причем $\|\{a_k\}\|=(\Sigma\,|a_k|^p)^{1/p}$. С элементом $\{a_k\}\in L_p$ ассоциируется функция $\Sigma a_k z^k$, заведомо аналитическая в круге $|z|<1$. Пиранян и Рудин доказали (РЖМат 1957, 4744), что, какова бы ни была выпуклая область D, граница которой Γ, за исключением одной точки $z=1$, лежит в $|z|<1$, причем в $z=1$ кривые Γ и $|z|=1$ имеют общую касательную (подобные области D автор называет касательными), найдется аналитическая в $|z|<1$ функция $\Sigma a_k z^k$ с $\{a_k\}\in L_1$, отображающая всякую область D_θ, полученную из D вращением на угол θ вокруг $z=0$ ($D_\theta=\{ze^{i\theta}: z\in D\}$), $0\leqslant\theta<2\pi$, на риманову поверхность с бесконечной площадью. В теореме 1 показывается, что в известном смысле большинство функций $\Sigma a_k z^k$ с $\{a_k\}\in L_1$ будет обладать подобным свойством.

Теорема 1. Для любой касательной области D множество тех элементов из L_1, ассоциированные функции для которых переводят всякую область D_θ в область бесконечной площади, будет резидуальным (дополнение к нему можно представить в виде суммы не более чем счетного числа множеств, нигде не плотных в L_1). Если взятая область D таксва, что ее граница Γ имеет в $z=1$ бесконечную кривизну, то приведенная теорема, в частности, дает, что в описанном только что смысле для большинства аналитических в $|z|<1$ функций вида $\Sigma a_k z^k$ с $\{a_k\}\in L_1$ будет бесконечной площадь образа на римановой поверхности всякого круга, касающегося внутренним образом окружности $|z|=1$. Функции с подобными свойствами были впервые построены Ловатором и Пираняном (РЖМат, 1957, 2223). В теореме 2 устанавливается, что в указанном ранее смысле большинство аналитических функций, ассоциированных элементам пространства L_p, $p>1$, переводят всякий прямолинейный отрезок, оканчивающийся в точках окружности $|z|=1$ в кривую бесконечной длины (Для L_1 подобный результат не имеет места, так как функция $\Sigma a_k z^k$ с $\Sigma\,|a_k|<\infty$ отображает всякий радиус круга $|z|<1$ на кривую длины $\leqslant\Sigma\,|a_k|$).

Предыдущие результаты автора, сходные с изложенными см. РЖМат, 1957, 6304, 8573. Г. Ц. Тумаркин

7953. О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках. Леонтьев А. Ф., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 3, 387—394

Изучается вопрос о построении целой функции конечного порядка $\omega(z)$, принимающей в данных точках λ_n заданные значения a_n: $\omega(\lambda_n)=a_n$. Числа $\{a_n\}$ удовлетворяют естественному условию:

$$|a_n|<e^{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}},\quad n>N(\varepsilon)$$

Обозначим через

$$\mu_1^{(n)}\ (\mu_1^{(n)}=\lambda_n),\quad \mu_2^{(n)},\ldots,\mu_{q_n}^{(n)}$$

те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге

$$|z-\lambda_n|<|\lambda_n|^{-h}$$

($h\geqslant 0$ —фиксированное число), а через

$$\alpha_1^{(n)}\ (\alpha_1^{(n)}=a_n),\quad \alpha_2^{(n)},\ldots,\alpha_{q_n}^{(n)}$$

—те числа из $\{a_m\}$, которые соответствуют указанным точкам в силу соответствия $\lambda_m\to a_m$. Введем величины

$$A_1^{(n)}=\mu_1^{(n)}\ \alpha_1^{(n)},\ \ldots,\ A_k^{(n)}=$$

$$=\mu_1^{(n)},\ldots,\mu_k^{(n)}\sum_{p=1}^{k}\frac{\alpha_p^{(n)}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{k}(\mu_j^{(n)}-\mu_p^{(n)})}\qquad (k=2,\ldots,q_n)$$

(сумма справа—разделенная разность) и обозначим через β_n максимум из их модулей. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы при условии

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}\leqslant\rho$$

в классе $[\rho,\infty]$ имелась хотя бы одна функция со свойством $\omega(\lambda_n)=a_n (n=1,2,\ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln\beta_n}{\ln|\lambda_n|}\leqslant\rho$$

Теорема 2. Для того чтобы при условии

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}}<\infty$$

в классе $[\rho,\infty)$ имелась интерполирующая функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\beta_n}{|\lambda_n|^{\rho}}<\infty.$$

Приведены также некоторые следствия из этих теорем. М. В. Федорюк

7954. Стратификация «устойчивых» трансцендентных функций Коши и целых функций Миттаг-Леффлера. Винтнер (Stratifications of Cauchy's «stable» transcendents and of Mittag-Leffler's entire functions. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 1, 111—124 (англ.)

Для трех семейств функций e^{-t^α}

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},\qquad e_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha+k)}$$

доказывается справедливость интегрального представления вида

$$R_\alpha(z)=\int_0^\infty R_\beta(zu)d\Phi_{\alpha,\beta}(u),\qquad (1)$$

где $d\Phi_{\alpha,\beta}(u)\geqslant 0$, при этом $0<\alpha<\beta<\infty$ для первых двух семейств и $0<\beta<\alpha<\infty$ для третьего семейства Доказательство опирается на теорему Хаусдорфа—Бернштейна и на возможность решения проблемы моментов Стилтьеса.

Далее доказывается, что если для семейства функций $f_\alpha(x)$ имеет место представление вида (1), то тем же свойством обладает и семейство функций

$$F_\alpha(x)=\int_0^\infty K(xt)f_\alpha(t)dt,$$

где ядро $K(t)$—„произвольная" функция от t, позволяющая применение теоремы Фубини.

В частности, семейство функций

$$F_\alpha(x)=\int_0^\infty\cos x\,t\,e^{-t^\alpha}dt\qquad (\alpha<2)$$

удовлетворяет уравнению вида (1), при этом $F_\alpha(x)>0$. Этим устанавливается существование симметричных

устойчивых законов распределения. Доказывается также результат Феллера и Полларда о полной монотонности функции Миттаг - Леффлера, т. е. что

$$(-1)^k E_\alpha^{(k)}(-x)>0, \quad 0\leqslant x<+\infty \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

М. М. Джрбашян

7955. Применение теории целых функций к построению и исследованию N'-функций, дополнительных к заданным N'-функциям. Виденский В. С., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 2, 202—205

Пусть $p(t)$ — непрерывная в каждой точке справа неубывающая функция такая, что $p(0)=0$, $p(t)>0$ при $t>0$, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)=\infty$, и $q(s)=\sup\limits_{p(t)<s} t$,

$$M(u)=\int_0^{|u|} p(t)\,dt, \quad N(v)=\int_0^{|v|} q(s)\,ds.$$

Устанавливается, что если $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-M(n)}z^n$, то $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}}\dfrac{\ln F(e^v)}{N(v)}$ конечен и отличен от нуля. В том случае, когда $F(z)$ есть целая функция конечного порядка, этот предел равен единице. Для того чтобы $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}}\dfrac{\ln N(v)}{v}=\rho$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M(n)}{n\ln n}=\dfrac{1}{\rho}$.

Условие $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}} e^{-\rho v}N(v)=\sigma$ при $0<\rho<\infty$, $0<\sigma<\infty$, равносильно условию

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} u^{1/\rho} e^{-\frac{M(u)}{u}}=(\sigma e\rho)^{1/\rho}.$$

Отмечается также, что при $0<\rho<\infty$ интегралы $\int_1^\infty e^{-\rho v}N(v)\,dv$ и $\int_1^\infty e^{-\rho\frac{M(u)}{u}}\,du$ сходятся и расходятся одновременно.

А. Ф. Тиман

7956. Об исключительных значениях целой функции. Сингх (On exceptional values of entire function. Singh S. K.), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 2, 217—220 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(0<\rho<\infty)$.

Теорема 1. Если для некоторой возрастающей функции $\psi(x)$ такой, что $\ln x=o(\psi(x))$, выполняется $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ln M(r,f)/(n(r,a)\psi(r))>0$, то $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r,a)/T(r,f)=0$.

Теорема 2. Если для $f(z)$ 0 является исключительным значением E, то $\min_{|z|=r}|f(z)|\to 0$ при $r\to\infty$.

Определение исключительного значения E см. Shah S. M., Compositio math., 1951, **9**, 227—238, а также Shah S. M., Singh S. K., РЖМат, 1955, 2173.

Теорема 3. Если $f(z)$ имеет конечное неванлинновское дефектное значение, то $\min_{|z|=r}|f(z)|=O(1)$.

Примечание референта. Теорема 2 содержится в более сильной теореме Шаха (статья цит. выше, ссылка на эту статью по другому поводу имеется у автора): Если a является исключительным значением E, то a — асимптотическое значение целой функции $f(z)$. Теорема 3, разумеется, справедлива для всякой мероморфной функции.

А. А. Гольдберг

7957. Об асимптотическом поведении решений разностных уравнений. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 1, 26—29

Рассматриваются конечноразностные уравнения вида

$$y(n+k)+\sum_{m=1}^{k} a_m(n)\,y(n+k-m)=0 \qquad (1)$$

и системы конечноразностных уравнений

$$y(n+1)=A(n)\,y(n), \qquad (2)$$

где

$$y(n)=\{y_1(n),\ldots,y_k(n)\},\ A(n)=(a_{ij}(n))_1^k.$$

Введя дополнительные предположения в условия теоремы Перрона, характеризующие правильность стремления коэффициентов $a_m(n)$ к их предельным значениям, автор уточняет асимптотику поведения решений уравнения (1) и показывает, что

$$y_m(n)\sim\lambda_m^{-1}(1)\ldots\lambda_m^{-1}(n),\ n\to\infty,$$

где $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$, …, $\lambda_m(n)$ — корни характеристического „полинома“

$$P_n(\lambda)=\lambda^k+a_1(n)\lambda^{k-1}+\ldots+a_k(n).$$

Аналогичный результат получен для систем (2), а также для разностных уравнений и систем бесконечного порядка.

Применение полученных результатов к дифференциальному уравнению

$$y^{(k)}+\sum_{m=1}^{k} a_m(x)\,y^{(k-m)}=0,\ 0\leqslant x<\infty,$$

с дважды дифференцируемыми коэффициентами $a_m(x)$ дает при некоторых условиях следующую оценку для его частного решения $y_m(x)$

$$y_m(x)\sim\exp\left\{\int_0^x \mu_m(t)\,dt\right\},$$

где $\mu_m(x)=\lambda_m(x)-\lambda_m'(x)\dfrac{P_m'(x,\lambda_m(x))}{P_m(x,\lambda_m(x))}$,

а $P_m(x,\lambda)=\dfrac{P(x,\lambda)}{\lambda-\lambda_m(x)}$, $P_m'(x,\lambda)=\dfrac{\partial}{\partial\lambda}P_m(x,\lambda)$.

Такие же оценки получены для решений интегрального уравнения

$$y(x)+\int_0^x a(x,x-t)\,y(t)\,dt=\delta(x),\ 0\leqslant x<\infty.$$

Э. З. Шувалова

7958. О системе двух линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Наф талевич А. Г., Матем. сб., 1958, **46**, № 4, 421—432

Пусть k_j $(j=1,2,\ldots,s)$ и h_i $(i=1,2,\ldots,r)$ — какие-либо натуральные числа, λ_j, μ_i, α и β — комплексные числа, причем $\operatorname{Im}(\alpha/\beta)\neq 0$, $g(z)$ и $h(z)$ — мероморфные функции; A, B, E — такие операторы, что

$$Af(z)=f(z+\alpha),\ Bf(z)=f(z+\beta),\ Ef(z)=f(z).$$

Изучаются мероморфные решения системы разностных уравнений вида

$$\prod_{j=1}^{s}(A-\lambda_j E)^{k_j} f(z)=g(z),\ \prod_{i=1}^{r}(B-\mu_i E)^{h_i} f(z)=h(z) \qquad (1)$$

$$(j=1,\ldots,s;\ i=1,\ldots,r).$$

Основные результаты таковы:

1. Каждое мероморфное решение $f(z)$ однородной системы (1) (т. е. когда $g(z)\equiv h(z)\equiv 0$) единственным образом представимо в виде

$$f(z)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\varepsilon_{i,j}(z), \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{i,j}(z)$ — решение системы

$$(A-\lambda_j E)^{k_j} f(z)=0,\quad (B-\mu_i E)^{h_i} f(z)=0.$$

Каждую функцию $\varepsilon_{i,j}(z)$ можно выразить в конечном виде через эллиптические функции и функции Вейерштрасса $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$.

2. Для наличия мероморфного решения y неоднородной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{j=1}^{s}(A-\lambda_j E)^{k_j} h(z)\equiv\prod_{i=1}^{r}(B-\mu_i E)^{h_j} g(z).$$

3) Приводятся в качестве следствий некоторые теоремы об асимптотических периодах целых и мероморфных функций. М. Б. Балк

7959. О непрерывной группе интегрирования ультрафункций. Хадвигер (Über die kontinuierliche Integrationsgruppe bei Ultrafunktionen. Hadwiger H.), Arch. Math., 1958, **9**, № 3, 211—218 (нем.)

Рассматривается пространство $\mathfrak{R}$ целых ультрафункций F, т. е. всевозможных упорядоченных пар $F=(f,\tilde f)$ целых функций

$$f=f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu z^\nu}{\nu!}\ \text{и}\ \tilde f=\tilde f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_{-\nu}z^\nu}{\nu!}\qquad(\tilde f(0)=0)$$

таких, что $\|f\|^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|^2<\infty$ и $\|\tilde f\|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_{-\nu}|^2<\infty$

с $\|F\|=\sqrt{\|f\|^2+\|\tilde f\|^2}=\sqrt{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}|a_\nu|^2}$

Если $F=(f,\tilde f)$, $G=(g,\tilde g)$ и a, b — произвольные комплексные числа, то по определению

$$aF+bG=(af+bg,\ a\tilde f+b\tilde g).$$

При любом вещественном значении α определяется интеграл F_α порядка α от рассматриваемых целых ультрафункций F следующим образом. Если $F=(f,\tilde f)$ и

$$Lf=\varphi(\zeta)=\int_0^\infty e^{-\zeta t}f(t)\,dt,$$

$$H\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta,\quad\text{то при}$$

$$T_\alpha f=H\{e^{z\zeta}\zeta^{1-\alpha}Lf\},\qquad S_\alpha f=H\{e^{z/\zeta}\zeta^{1-\alpha}Lf\},$$

$$\tilde T_\alpha f=H\{(e^{z\zeta}-1)\zeta^{1-\alpha}Lf\},\ \tilde S_\alpha f=H\{(e^{z/\zeta}-1)\zeta^{1-\alpha}Lf\}$$

интеграл F_α есть пара $(f_\alpha,\tilde f_\alpha)$ целых функций

$$f_\alpha=T_\alpha f+S_{-\alpha}\tilde f\ \text{и}\ \tilde f_\alpha=\tilde S_\alpha f+T_{-\alpha}\tilde f.$$

Устанавливается зависимость между коэффициентами Тейлора функций, определяющих F_α и F, показывающая, что $\|F_\alpha\|=\|F\|$. Кроме того, указанный интеграл $I_\alpha F=F_\alpha$ обладает свойствами

$$I_\alpha I_\beta F=I_{\alpha+\beta}F,\ I_0F=F.$$

Для каждой целой ультрафункции $F=(f,\tilde f)$ вводится также понятие производной $F'=(f',f(0)z+\int_0^z\tilde f(t)\,dt)$. При этом оказывается, что $I_{-1}F=F'$, а совокупность интегралов I_α таким образом составляет группу линейных преобразований пространства $\mathfrak{R}$. А. Ф. Тиман

7960. Об одном неравенстве, связанном с функциями, выпуклыми относительно логарифма. Гольдберг (Про одну нерівність, зв'язану з функціями, опуклими відносно логарифма. Гольдберг А. А.), Доповіді АН УРСР, 1957, № 3, 227—230 (укр.; рез. русск., англ.)

Доказывается одно элементарное неравенство, которое формулируется с помощью функций, выпуклых относительно логарифма. С его помощью получается ряд новых неравенств для мероморфных во всей плоскости функций, а также функций, аналитических в круге, два из которых здесь приводим. В дальнейшем $\Phi(y)(0<y<\infty)$ обозначает какую-либо функцию, выпуклую относительно логарифма.

1. Пусть $f(z)$ и $\hat f(z)$ — мероморфные в $z\neq\infty$ функции вида

$$f(z)=Ce^{\alpha z}\cdot z^q\frac{\prod_\nu\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod_\mu\left(1-\frac{z}{b_\mu}\right)};$$

$$\hat f(z)=Ce^{-|\alpha|z}z^q\frac{\prod_\nu\left(1-\frac{z}{|a_\nu|}\right)}{\prod_\mu\left(1+\frac{z}{|b_\mu|}\right)}$$

Тогда $\int_0^{2\pi}\Phi[\,|f(re^{i\theta})|\,]\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi[\,|\hat f(re^{i\theta})|\,]\,d\theta$, $0\leqslant r<\infty$,

в частности, $\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}|\hat f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta$

при любом действительном $\alpha>0$.

II. Пусть $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<1$ функция ограниченного вида, допускающая в силу этого следующее представление:

$$f(z)=e^{i\gamma}z^m\prod_\nu\left(\frac{a_\nu-z}{1-\bar a_\nu z}\frac{|a_\nu|}{a_\nu}\right)\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\lambda(\theta),$$

где $\lambda(\theta)$ — функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$. Образуем теперь новую функцию $\hat f(z)$, сместив нули $f(z)$ по концентрическим окружностям на радиус, проведенный в точку 1, и сосредоточив в точке $z=1$ всю отрицательную массу, порожденную $\lambda(\theta)$, а в точке $z=-1$ — всю положительную. Т. е. мы полагаем $\hat f(z)$ равной

$$\hat f(z)=e^{i\gamma}z^m\prod_\nu\frac{|a_\nu|-z}{1-|a_\nu|z}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1-z}{1+z}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\lambda^+(\theta)\right\}\exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\lambda^-(\theta)\right\},$$

где $\lambda^+(\theta)$ и $\lambda^-(\theta)$ — соответственно положительная и отрицательная вариация $\lambda(\theta)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\Phi[\,|f(re^{i\theta})|\,]d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi[\,|\hat f(re^{i\theta})|\,]d\theta,\quad 0\leqslant r<1.$$

Г. Ц. Тумаркин

7961. Равномерно нормальные семейства. Хейман (Uniformly normal families. Hayman W. K.), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 199—212 (англ.)

Пусть семейство F аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$ а) нормально в $|z|<1$ (в обычном смысле) и б) обладает свойством инвариантности: из того, что $f(z)\in F$, вытекает принадлежность к F всех функций вида $f\left[\frac{e^{i\lambda}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}}{}\right]$, $|z_0|<1$, λ действительно.

Из а) и б) немедленно выводится, что для всякого такого семейства найдется константа B такая, что условия

$$\left.\begin{array}{l} f(z)\in F,\ |z_1|<1,\ |z_2|<1,\ |f(z_1)|\leqslant 1,\ |f(z_2)|\geqslant e^B, \\ \text{влекут за собой неравенство} \\ \left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1z_2}\right|\geqslant\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (1)$$

(достаточно рассмотреть множество F_1 тех функций из F, для которых $|f(0)|\leqslant 1$). Тогда можно принять за e^B любое число $>\sup_{f\in F_1,\ |z|<\frac{1}{2}}|f(z)|$, причем $\sup_{f\in F_1,\ |z|<\frac{1}{2}}|f(z)|<\infty$ в силу нормальности F.

Примером семейства с подобными свойствами может, очевидно, служить семейство аналитических в круге $|z|<1$ функций, не принимающих двух фиксированных значений. Автор называет равномерно нормальным семейством $\pi(B)$ семейство аналитических в круге $|z|<1$ функций, которые удовлетворяют условию (1). Слово „равномерность“ в названии семейства указывает, что условие (1) носит равномерный характер по отношению к гиперболической метрике. Нормальность рассматриваемого семейства устанавливается в дальнейшем. Она вытекает из того, что рост функций семейства $\pi(B)$, выражаемый в терминах максимума модуля, характеристики и т. д., подчиняется тем же ограничениям, что и для известного случая, когда $f(z)\neq 0,1$. Отсюда получаются, в частности, новые результаты для нормальных семейств, рассматривавшихся Альфорсом.

Для формулировки доказанных теорем понадобятся обозначения:

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

$$I_\lambda(r,f)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}|f(re^{i\Theta})|^\lambda d\Theta,$$

$$T_\lambda(r,f)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\left\{\ln\sqrt{1+|f(re^{i\Theta})|^2}\right\}^\lambda d\Theta$$

($T_1(r,f)$ совпадает с характеристической функцией $T(r)$, взятой в форме Альфорса — Шимицу), $g(z)=u+iv=\sum_{n=0}^\infty g_nz^n$, $|z|<1$, если $e^{g(z)}\in\pi(B)$; $B_1, B_2, \ldots$ — константы, зависящие только от B; $B(a_0)$, $B(a_0,\lambda)$ — константы, зависящие соответственно от B, a_0 и B, a_0, λ и т. д.

Теорема 1. Пусть $f(z)=a_0+a_1z+\ldots\in\pi(B)$, тогда $|a_1|\leqslant 2\mu(\ln\mu+B_1)$, где $\mu=\max(1,|a_0|)$.

Теорема 2. Если $|z_0|=r<1$ и $f(z)\in\pi(B)$, то $|f'(z_0)|<\frac{2}{1-r^2}\mu_0(\ln\mu_0+B_1)$, $M(r,f)\leqslant\mu^{\frac{1+r}{1-r}}e^{\frac{2B_1r}{1-r}}$.

Здесь $\mu_0=\max[1,|f(z_0)|]$.

Таким образом, для $f(z)\in\pi(B)$ имеем $\ln M(r)=O(1)/(1-r)$, в то время как для классов Альфорса было известно только, что $\ln M(r)=\frac{O(1)}{1-r}\ln\frac{1}{1-r}$ (Ahlfors, Acta Soc. Sci. Fennicae, 1933, 2, № 2, 1—17).

Теорема 3. Если $f(z)\in\pi(B)$, то

$$T_\lambda(r)\leqslant\begin{cases}T_1(0)+B_2\ln[1/1-r], & 0\leqslant r<1, \text{ если } \lambda=1,\\ B(a_0,\lambda)\,(1-r)^{1-\lambda}, & 0\leqslant r<1, \text{ если } \lambda>1.\end{cases}$$

О степени точности оценок, даваемых теоремами 2 и 3, можно судить, сравнивая их с оценками для функции $f(z)=e^{(1+z)/(1-z)}$ ($|f(z)|>1$ в $|z|<1$, так что $f(z)\in\pi(0)$), для которой имеем $\ln M(r)=\frac{1+r}{1-r}$; $T_\lambda(r)\underset{r\to 1}{\sim}C(\lambda)\,(1-r)^{1-\lambda}$, а также для модулярной функции, отображающей $|z|<1$ на риманову поверхность, простирающуюся над плоскостью с двумя выколотыми точками $z=0$ и $z=1$. В последнем случае $T_1(r,f)\sim C_1\ln\frac{1}{1-r}$, как это было показано Литлвудом (Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions. Oxford, 1944).

Далее автор останавливается на отыскании условий, которым должен удовлетворять класс римановых поверхностей, чтобы отображения единичного круга на поверхности этого класса образовали бы равномерно нормальное семейство; подобное условие удается получить в теореме 4 при добавочном предположении, что поверхности не содержат точек, лежащих над $w=0$.

Теорема 4. Пусть $\{R\}$ — класс римановых поверхностей, над плоскостью w и F семейство функций вида $e^{g(z)}$, где $w=g(z)$, конформно отображает $|z|<1$ на одну из поверхностей семейства $\{R\}$. Тогда F равномерно нормально в том и только том случае, когда равномерно ограничены радиусы однолистных кругов, принадлежащих поверхностям $\{R\}$ с центрами в точках, лежащих над $\operatorname{Re} w=0$.

После этого доказывается теорема 5, в которой для функции $g(z)$, $g(z)=u+iv$, такой, что $e^{g(z)}\in\pi(B)$, даются оценки коэффициентов, $M(r,g)$, $I_1(r,u)$, $I_1(r,g)$, $I_\lambda(r,g)$ при $\lambda>1$.

Результаты теоремы 5 в частном случае, когда $g(z)\neq\neq 2k\pi i$, были установлены Литлвудом (см. его цитированную книгу), но его метод не распространяется на общий случай. Полученные оценки являются точными, как это следует из упомянутого примера модулярной функции, за исключением оценок для g_n — коэффициентов $g(z)$, где вопрос о наилучшей оценке остается открытым. (Доказано, что $g_n=O(\ln n)$, в то же время примеры показывают, что g_n не могут быть равномерно ограниченными).

В связи с результатами для $g(z)$ ставится вопрос о том, каковы должны быть нетривиальные условия на риманову поверхность этой функции, которые обеспечивали бы ограниченность коэффициентов. Отмечается, что для этого достаточно, чтобы поверхность не содержала ни одного однолистного круга радиуса большего R. В этом случае, используя найденную Альфорсом оценку снизу для константы Блоха $B>\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (см., например, Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. — Л., 1952, стр. 400), автор устанавливает неравенства $|b_n|<\frac{2e}{\sqrt{3}}R$, $n\geqslant 2$. Здесь $2e/\sqrt{3}=3{,}14$ не может быть заменено на 2 для $n\geqslant 2$, как показывает пример $b(z)=2Rz^n$. Г. Ц. Тумаркин

7962. Теорема о неванлинновских дефектах мероморфных функций конечного порядка. Фукс (A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order. Fuchs W. H. J.), Ann. Math., 1958, 68, № 2, 203—209 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная в $z\neq\infty$ функция конечного нижнего порядка λ, $q=\max(2,\lambda)$, $\delta(a_k)$ — неванлинновские дефекты $f(z)$. Главный результат статьи: существует абсолютная постоянная A такая, что

$$\sum[\delta(a_k)]^{1/2}<A(q\ln q)^{1/2}. \quad (1)$$

Указано, что в построенном референтом примере (РЖМат, 1955, 3723) мероморфной функции первого

порядка $\sum[\delta(a_k)]^{1/2-\varepsilon}=\infty$ при любом $\varepsilon>0$. Доказательство опирается на следующую оценку логарифмической производной, представляющую самостоятельный интерес:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left\{r\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})/f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\}/T(r,f)<A_1 q\ln q.$$

Имеются устранимые неточности.

Примечание референта. Предположение о сходимости ряда в (1) для мероморфных функций конечного порядка было впервые высказано Тейхмюллером (Teichmüller O., Dtsche Math., 1939, **4**, 163—190), но было доказано лишь при очень сильных дополнительных ограничениях. А. А. Гольдберг

7963. Замечание о мероморфных функциях в единичном круге. Сингх, Шанкар (A note on meromorphic functions in the unit circle. Singh S. K., Shankar Hari), Tôhoku Math. J., 1957, **9**, № 3, 264—266 (англ.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z|<1$ и $\overline{\lim_{r\to1}}\,T(r)/\ln(1-r)^{-1}=\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant\infty$. Тогда

$$\overline{\lim_{r\to1}}\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{\overline{N}(r,a_\nu)}{T(r,f)}\right)\leqslant 2+\frac{1}{\alpha}.$$

Приведены простейшие следствия.

Примечание референта. Доказательство не представляется референту убедительным, так как авторы без дополнительных рассуждений считают, что $\ln T(\rho)=o(T(r))$, $r<\rho$. Однако справедливость утверждения может быть показана дословным повторением доказательства Р. Неванлинна аналогичного неравенства, где в левой стороне стоит $\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu)$ (Nevanlinna R., Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, 1929, стр. 152 и след.). Это неравенство (в форме утверждения: если $\Sigma\delta(a_\nu)\geqslant p>2$, то $\alpha\leqslant 1/(p-2)$) находится на странице, цитируемой авторами. А. А. Гольдберг

7964. Перенесение комплекса теорем Вейерштрасса и Дингхаса на произвольные граничные множества емкости нуль. Хеллстрём (Übertragung eines Satzkomplexes von Weierstrass und Dinghas auf beliebige Randmengen der Kapazität Null. Hällström Gunnar af. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/12, 9 S.) (нем.)

Результаты статьи Дингхаса (РЖМат, 1957, 8580) о поведении однозначных аналитических функций в окрестности изолированной существенной особенности переносятся на случай функций, однозначных, аналитических в окрестности произвольного множества существенных особенностей емкости нуль. Использование построенной автором теории распределения значений функций, мероморфных вне множества емкости нуль (Hällström G., Acta Acad. Aboensis, math. et phys., 1939, **12**, № 8,1—100; Wittich H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Berlin, 1955, гл. III, п. 6; РЖМат, 1959, 6858 К,; 1958, 292 К), позволяет произвести этот перенос без каких-либо существенных изменений в доказательстве и формулировках (доказательство Дингхаса несколько усовершенствовано автором).

В конце доказывается ряд новых и для случая изолированной особенности результатов, которые мы для простоты сформулируем для случая функции $f(z)$, мероморфной в конечной плоскости. Будем обозначать $[a,b]$ — расстояние по хорде между точками a и b на комплексной сфере, $\mu(r,a)=\min_{|z|=r}[f(z),a]$. Если a является неванлинновским дефектным значением, то $\int_0^\infty\mu(r,a)^\beta d\ln r<\infty$ при любом $\beta>0$. Если a является только валироновским дефектным значением (даже с $\Delta(a)=1$), то интеграл может расходиться. Интеграл может сходиться при любом $\beta>0$, но $\Delta(a)=0$. А. А. Гольдберг

7965. Симметричные фуксовы функции второго семейства. Лежандр (Fonctions Fuchsiennes symétriques de deuxième famille. Legendre Robert), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 10, 770—772 (франц.)

Пусть многоугольник M, стороны которого суть полуокружности и полупрямые, ортогональные к действительной оси, лежит в верхней полуплоскости и имеет вершины в точках $\tau_0=\infty$, $\tau_1=0$, $\pm\tau_2,\ldots,\pm\tau_{n-1}=\pm1$.

Рассматривается фуксова группа G линейных преобразований $(a\tau+b):(c\tau+d)$, для которой действительная ось — главная окружность и M — фундаментальная область (такую группу Пуанкаре относит ко второму семейству, см. Acta math., 1882. 1), пары эквивалентных сторон которой симметричны относительно мнимой оси. Суммы

$$P_0=\sum(c\tau+d)^{-4},\ P_i=\sum[(a-c\tau_i)\tau+(b-d\tau_i)]^{-4},\ i=1,2,\ldots,n-1,$$

(суммирование проводится по различным двучленам) являются тета-фуксовыми функциями группы G. Фуксова функция группы G, через которую все другие фуксовые функции этой группы выражаются рационально, сама может быть выражена рационально через тета-функции $P_0,P_1,\ldots,P_{n-1}$. А. Г. Нафталевич

7966. Аксиома счетности в теории римановых поверхностей. Сарио (Countability axiom in the theory of Riemann surfaces. Sario Leo. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/32, 7 pp.) (англ.)

Пусть W — связное хаусдорфово пространство с заданным семейством V открытых подмножеств O и некоторым семейством H отображений h, обладающих следующими свойствами: 1) каждое $h\in H$ есть топологическое отображение множества $O\in V$ на открытое множество комплексной плоскости; 2) для отображений h_1, h_2 множества O отображение $h_2[h_1^{-1}(z)]$ конформно в $h_1(O_1\cap O_2)$. Дается новое краткое доказательство того, что конформная структура римановой поверхности W влечет за собой существование счетного базиса и, следовательно, триангулируемость поверхности (теорема Радо). Доказательство сводится к построению непостоянной гармонической функции на дополнении относительно W параметрического круга, получающейся как предел гармонических функций, определенных нормальным линейным оператором (Sario L., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 281—295).

Дается доказательство теоремы приведения (РЖМат, 1957, 1359) без использования триангуляции поверхности, откуда следует возможность построения экстремальных функций с наперед заданными особенностями без использования триангуляции поверхности. Е. Н. Аравийская

7967. О римановых поверхностях с конечной сферической площадью. Мидзумото (On Riemann surfaces with finite spherical area. Mizumoto Hisao), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 2, 87—96 (англ.)

Обозначим O_{MD} класс римановых поверхностей, на которых не существуют мероморфные функции $z=f(p)\not\equiv\text{const}$, которые отображали бы данную поверхность на поверхность наложения z-сферы, имеющую конечную площадь в сферической метрике. Пусть R — некоторая открытая риманова поверхность, R_0 — ее односвязная компактная подобласть, $\{\Gamma\}$ — множество кривых на $R-R_0$, каждая из которых состоит из конечного числа непересекающихся аналитических кривых, делящих R на две части, причем $\Gamma\sim\partial R_0$ (обоз-

значения как в монографии Р. Неванлинна, РЖМат, 1956, 7313 К). Пусть $E=\{R_n\}$, $n=1, 2,\ldots$ — исчерпание R такое, что $L_n \equiv \partial R_n \in \{\Gamma\}$. Обозначим $\{L\}_n$ множество кривых из $\{\Gamma\}$, лежащих в окрестности L_n на R, состоящей из объединения двусвязных областей, заключающих компоненты L_n, $\{L\}_E = \bigcup_n \{L\}_n$, $\lambda\{L\}_E$ — экстремальная длина семейства кривых $\{L\}_E$.

Обозначим O'' класс римановых поверхностей, для которых существует исчерпание E такое, что $\lambda\{L\}_E = 0$.

Пусть $R \in O''$ и $\lambda\{L\}_E = 0$, $E=\{R_n\}$. $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, \ldots$ — система циклов такая, что для всякого n и для всякого цикла $C \subset R_n$ существуют целые числа x_i и y_i такие, что $C \sim \sum_{i=1}^{k_n} (x_i\alpha_i + y_i\beta_i) \pmod{\partial R_n}$ при некотором k_n (существование такой системы — известный факт (Ahlfors L., Suomalais. tiedeakat. toimituks. Sar. AI, 1947, № 35, 1—24)). Разрежем R по конечному числу α_k, которые обозначим $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, края разрезов обозначим α_k^+ и α_k^-. Соединим бесконечное число экземпляров R с разрезами: F_m, склеивая α_k^- у F_m с α_k^+ у F_{m+1} $(k=1,\ldots,q;\ m=0\pm1,\ \pm2,\ldots)$, полученную риманову поверхность будем обозначать W.

Обозначим O_G — класс поверхностей с нулевой границей. Основной результат статьи состоит в установлении необходимых и достаточных условий для того, чтобы одновременно выполнялось $R \in O''$, $W \in O_G \cap O_{MD}$. Условия эти используют матрицу периодов R. Этот результат обобщает теорему Одзава (РЖМат, 1958, 6650).

Из других результатов статьи отметим теорему, дающую (в терминах гармонических модулей по Сарио) достаточное условие для того, чтобы одновременно выполнялось $R \in O''$ и $W \in O_G$.

Выясняются различные соотношения, существующие между O_{MD} и другими известными классами римановых поверхностей. В частности, O_{MD} и O_G, а также $O_{MD} \setminus O_G$ и $O_{AB} \setminus O_G$ пересекаются, но включения нет ни в одну сторону; $O_{HB} \setminus O_G \subset (O_{MD} \cap O_{AB}) \setminus O_G \subset O_{MD} \setminus O_G \subset (O_{MD} \cup O_{AB}) \setminus O_G \subset O_{AD} \setminus O_G$, $(O_{MD} \cap O_{AB}) \setminus O_G \subset O_{AB} \setminus O_G \subset (O_{MD} \cup O_{AB}) \setminus O_G$, включения всюду строгие. Поверхности конечного рода не входят в O_{MD}.

А. А. Гольдберг

7968. Об одной задаче Хейнца Хопфа. Хейнс (On a problem of Heinz Hopf. Heins Maurice), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 2, 153—160 (англ.)

Основной результат. Если F — параболическая риманова поверхность (т. е. она открыта и на ней не существует функции Грина) с неабелевой фундаментальной группой, то всякое конформное отображение F в себя является взаимно однозначным. Если F конечного положительного рода, то всякое конформное отображение F в F необходимо является отображением на F и таких конформных отображений конечное число.

В конце статьи рассматриваются отдельные вопросы существования деформируемых конформных отображений F в F, которые более полно и систематически изложены в другой статье автора (РЖМат, 1959, 5777).

А. А. Гольдберг

7969. Теорема Фату и проблема Дирихле для линий Грина некоторых поверхностей Римана. Парро (Théorème de Fatou et problème de Dirichlet pour les lignes de Green de certaines surfaces de Riemann. Parreau M. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/25, 8 p.) (франц.)

Рассматривается гринова поверхность Римана R (РЖМат, 1956, 7306), a — фиксированная точка на R, $g(p)$ — функция Грина с полюсом a на R, $h(p)$ — сопряженная с $g(p)$ гармоническая функция. D_λ — область $\{g(p) > \lambda\}$ на R, C_λ — ее граница, т. е. множество точек уровня $\{g(p) = \lambda\}$. Поверхность R предполагается регулярной, т. е. D_λ — компакт для всякого $\lambda > 0$. Дугой Грина называются ортогональные траектории к семейству $\{C_\lambda\}$, не содержащие точек ветвления p_n функции $z(p) = -g(p) + ih(p)$. Линиями Грина называются максимальные дуги Грина; m_n — кратность корня уравнения $z(p) = z(p_n)$. Доказывается теорема (обобщение теоремы Фату): Если регулярная поверхность Римана R такова, что

$$\sum m_n g(p_n) < +\infty, \qquad (1)$$

то всякая гармоническая положительная на R функция u имеет предел почти на всякой линии Грина, выходящей из a.

Теорема остается справедливой, если функцию u заменить мероморфной функцией ограниченной характеристики.

Пусть L — множество линий Грина на R, выходящих из точки a. Доказывается теорема: Если регулярная поверхность Римана R удовлетворяет условию (1), то для каждой ограниченной на L и суммируемой по мере Грина функции $f(l)$ существует одна и только одна гармоническая ограниченная функция, которая стремится к $f(l)$, когда p удаляется в бесконечность по l, почти для всякой линии Грина $l \in L$.

Указанные теоремы справедливы для поверхностей более общих, чем поверхности, рассмотренные Брело (РЖМат, 1959, 1488).

Из существования почти всюду радиальных пределов для мероморфных функций получается необходимое и достаточное условие того, чтобы функция f была типа Bl (РЖМат, 1957, 6316).

Е. Н. Аравийская

7970. Лемма Шварца и аналитические инварианты. Лу Ци-цзянь (Schwarz lemma and analytic invariants. Look K. H.), Scientia sinica, 1958, **7**, № 5, 453—504 (англ.)

Перевод работы, напечатанной на китайском языке в Шусюэ сюэбао (РЖМат, 1958, 7663). Работа содержит доказательства теорем, анонсированных в прежде опубликованных заметках автора (РЖМат, 1958, 3684).

Б. А. Фукс

7971. Об интерполяции целых функций двух комплексных переменных. Штейнберг Н. С., Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 37—43

Доказывается, что теоремы И. И. Ибрагимова и М. В. Келдыша (Матем. сб. 1947, 20 (62), 283) могут быть перенесены на целые функции многих переменных, а именно:

Пусть $f(z_1,z_2)$—целая функция, $n_1(r)$ и $n_2(r)$—соответственно функции плотности последовательностей комплексных чисел a_n и b_n, имеющих каждая единственную предельную точку в ∞, $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ и $|b_n| \leqslant |b_{n+1}|$. $M(r_1, r_2)$ — максимум модуля $f(z_1,z_2)$ при $|z_k| \leqslant r_k$ $(k=1, 2)$.

Тогда ряд Ньютона для $f(z_1,z_2)$ с узлами (a_k,b_l) сходится равномерно к $f(z_1,z_2)$ при любом конечном r_1 и r_2, если выполняется неравенство

$$\ln M(r_1,r_2) < \lambda_1 n_1(\theta_1 r_1) + \lambda_2 n_2(\theta_2 r_2),$$

$$\lambda_k < \ln\frac{1-\theta_k}{\theta_k}, \qquad 0<\theta_k<\frac{1}{2}\ (k=1,2).$$

Кроме того, доказывается, что если

$$\ln M(r_1,r_2) - N_1(\theta_1 r_1) - N_2(\theta_2 r_2) < C,$$

где

$$N_k(r) = \int_0^r \frac{n_k(t)}{t}\,dt, \quad n_k(0)=0, \quad 0<\theta_k<1, \quad C>0\ (k=1,2),$$

то существуют многочлены $P_{n,m}(z_1,z_2)$ такие, что

$$P_{n,m}(a_k,b_l)=f(a_k,b_l) \qquad (k=1,2,\ldots,n,\quad l=1,2,\ldots,m),$$

которые равномерно сходятся к $f(z_1,z_2)$ при любом конечном r_1 и r_2 и при $m,n\to\infty$. И. И. Ибрагимов

7972. Функции от матриц. Амато (Funzioni di matrice. Amato Vincenzo), Scritti mat. onore Filippo Sibirani, Bologna, 1957, 5—11 (итал.)

Работа представляет собой изложение определения Чиполла функций от матриц (Cipolla M., Rend. Circolo mat. Palermo, 1932, **61**, 144—154) с указанием границ его применения. Новых результатов не имеется.

П. А. Шварцман

7973. Заметка о теореме Симода о трех сферах. Мацумура (Note on Shimoda's three sphere theorem. Matsumura Y.), Kōdai Math. Semin. Repts, 1955, **7**, № 2, 45—47 (англ.)

Изучаются аналитические функции с областью определения и областью значений в некоторых банаховых пространствах (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, Изд-во ин. лит., 1951, гл. 4). На такие функции, нормированные по формуле $M(x)=\sup_{\|x\|=r}\|f(x)\|$, Симода перенес известную теорему Адамара о трех кругах (Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л. 1950, 469). Автор устанавливает аналог теоремы Адамара с несколько иной нормировкой функции $f(x)$, именно

$$M_p(x)=\sup_{\|x\|=r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(e^{i\theta}x)\|^p d\theta,$$

где p—натуральное число. Соответствующая теорема для обычных аналитических функций также известна (Пойа и Сегё, Задачи и теоремы из анализа, Гостехиздат, М., 1956, Т. I, задача 310; РЖМат, 1957, 2429)

Г. Е. Шилов

7974. Теория функций в банаховых алгебрах. Брейн (Function theory in Banach algebras. Bruijn N. G. de. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/5, 13 pp.), (англ.)

Дается определение аналитической функции на банаховой алгебре, эквивалентное известному определению аналитической функции с помощью интеграла Коши. Функция $F(z)$, определенная на открытом множестве O банаховой алгебры A, со значениями в A, называется сильно аналитической на O, если для всех $z\in O$ $F(z)=\lim_{n\to\infty}r_n(z)$, где $\{r_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ —последовательность рациональных функций от z. Сходимость должна быть локально равномерной. Функция $F(z)$ называется аналитической в точке $a\in A$, если она определена и строго аналитична в некоторой окрестности a. $F(z)$ называется аналитической в открытом множестве $O\subset A$, если она аналитична в каждой точке O (приводится пример, из которого следует, что при этом она может и не быть сильно аналитической на O).

Указан ряд теорем классической теории функций, допускающих обобщение в банаховых алгебрах. Например, принцип максимума модуля (в слабой форме), теорема Лиувилля, единственность аналитического продолжения. Приводятся простые примеры, показывающие невозможность обобщения некоторых теорем. Например, не каждая константа аналитична; для аналитической функции $F(z)\neq$ $\neq$ const образ открытого множества при преобразовании F может не быть открытым; функция, обратная к аналитической функции $F(z)$, может не быть аналитической даже в том случае, когда F осуществляет топологическое отображение открытого множества на открытое множество; не каждая функция, аналитичная в окрестности $a\in A$, может быть представлена в виде степенного ряда по степеням $z-a$; аналитическая функция может обращаться в нуль в каждой точке сходящейся последовательности, не будучи в то же время тождественным нулем.

Для изучения многозначных аналитических функций автор вводит понятие A-многообразия (естественное обобщение понятия римановой поверхности). Приводится ряд примеров A-многообразий. П. А. Шварцман

7975. Приближение полиномами в C^n. Уэрмер (Polynomial approximation in C^n. Wermer J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 70 (англ.)

Пусть C^n — пространство n комплексных переменных и множество K, компактное в C^n. Через $h(K)$ мы обозначаем множество точек x в C^n, в которых $|P(x)|\leqslant$ $\leqslant\max|P(y)|$ на K для любого полинома по координатам P. Множество $h(K)$ появляется в задачах о равномерном приближении полиномами.

Теорема. Пусть K — простая замкнутая кривая, заданная параметрически уравнениями $z_i=f_i(t)$, $1\leqslant i\leqslant n$, $|t|=1$, причем каждая f_i аналитична на $|t|=1$ и $f_i'(t)\neq 0$. Тогда либо $h(K)=K$, либо $h(K)$ состоит из K и аналитического многообразия одного комплексного измерения.

7976. Спектральный анализ в Z_n. Лефран (Analyse spectrale sur Z_n. Lefranc Marcel), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 13, 1951—1953 (франц.)

Пусть E — векторное пространство функций с комплексными значениями от n переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, принимающих целые вещественные значения, снабженное топологией обычной сходимости. Функция $f\in E$ называется экспоненциальным многочленом, если она имеет вид $f=Q(x_1,\ldots,x_n)\,\xi_1^{x_1}\ldots\xi_n^{x_n}$, где Q —полином и $\xi_1,\ldots,\xi_n$— комплексные числа, отличные от нуля. Намечено доказательство следующей теоремы: Всякое собственное замкнутое подпространство пространства E порождено входящими в него экспоненциальными многочленами.

А. Л. Онищик

7977. О свойствах некоторых классов непрерывных функций при трансформации Гильберта в E^n. Гегелиа Т. Г., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 3, 257—261 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 3, 257—261 (русск.)

Изучается преобразование функции $\varphi(Q)$, определенной в n-мерном пространстве E^n при помощи интеграла

$$\psi(P)=\int_{E^n}\frac{M(P,Q)}{r^n(P,Q)}\varphi(Q)\,dQ, \qquad (1)$$

где $M(P,Q)$ — ограниченное ядро, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $M(P,Q)=M(P,Q')$ для всех P, где Q' – точка пересечения луча PQ со сферой $\sigma(P,1)$ радиуса 1 с центром в точке P; 2) $\int_{\sigma(P,1)}M(P,Q)d\sigma(Q)=0$ для любого $P\in E^n$.

Преобразование (1) является n-мерным обобщением преобразования Гильберта. Формулируется ряд теорем о свойствах $\psi(P)$ при условиях принадлежности $M(P,Q)$ и $\varphi(Q)$ к определенным классам функций.

Приведем одну из них. Пусть

$$\mu(\delta)=\sup|M(P,Q_1)-M(P,Q_2)|,\quad Q_1,Q_2\in\sigma(P,1),$$
$$P\in E^n,\quad r(Q_1,Q_2)\leqslant\delta,$$
$$\nu(\delta)=\sup|M(P_1,Q)-M(P_2,Q_0)|,\quad P_1,P_2\in E^n,$$
$$Q\in\sigma(P,1),\ r(P_1,P_2)\leqslant\delta;$$

Q_0 — точка на $\sigma(P_2,1)$ такая, что векторы P_1Q и P_2Q_0 параллельны. Скажем, что $M\in H_\alpha^\beta\Lambda_q$, если $\mu(t)=O(t^\beta)$, $\nu(t)=O\left(t^\alpha\lg^{-q}\frac{1}{t}\right)$; $\varphi\in H_\alpha\Lambda_q$, если $\omega(t,\varphi)=O\left(t^\alpha\lg^{-q}\frac{1}{t}\right)$. Утверждается, что если при $0<\beta\leqslant 1$ $M\in H_\alpha^\beta\Lambda_q$, $\varphi\in H_\alpha\Lambda_q\cap L_p(E^n)$ $(p\geqslant 1)$, то $\psi(P)\in H_\alpha\Lambda_q$.

Аналогичные теоремы справедливы и для случая, когда интегрирование производится по замкнутой поверхности типа B, что обобщает результаты, полученные автором ранее для двумерных поверхностей (РЖМат, 1957, 5627; там же о поверхностях типа B, обобщающих поверхности Ляпунова). Доказательства не приводятся.

В. К. Иванов

7978. Об одной неотрицательной субгармонической функции в полуплоскости. Цудзи (On a non-negative subharmonic function in a half-plane. Tsuji Masatsugu), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 3, 134—141 (англ.)

Доказываются следующие утверждения.

Пусть $u(z)=u(x+iy)\not\equiv 0$ — неотрицательная субгармоническая функция в полуплоскости $D: x>0$, непрерывная и обращающаяся в нуль на мнимой оси. Пусть

$$m(r)=m(r,u)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(re^{i\theta})\cos\theta\,d\theta,\quad 0<r<\infty.$$

Тогда 1) $m(r)/r$ — непрерывная неубывающая функция от r и выпуклая функция от $1/r^2$ и, следовательно, существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} m(r)/r=c$, $0<c\leqslant\infty$. Если $0<c<\infty$, то 2)

$$u(z)=kx-\int_D \ln\left|\frac{z+\bar a}{z-a}\right| d\mu_a(e),\quad k=\frac{2c}{\pi},$$

где $\mu(e)$ — такое распределение неотрицательных масс для $e\subset D$, что

$$\int_D \frac{\operatorname{Re} a}{|a|^2}\,d\mu_a(e)<\infty,$$

и 3) всюду, кроме множества значений θ логарифмической емкости нуль, выполняется соотношение $\lim\limits_{r\to\infty} u(re^{i\theta})/r=k\cos\theta$.

Как указано в работе, то, что $m(r)/r$ не убывает по r, было доказано ранее Альфорсом (Ahlfors L., Trans. Amer. Math. Soc., 1933, **41**, 1—8), а утверждение 3) было доказано ранее Альфорсом и Хейнсом (Ahlfors L., Heins M., Ann. Math., 1949, **50**, 341—346). Е. Д. Соломенцев

7979. Изучение понятия разрежения и его применения к границе по Мартену. Наим (Étude et applications de la notion d'effilement à la frontière de Martin. Naïm Linda), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 9, 1107—1110 (франц.)

Пусть Ω — пространство Грина и Δ — его граница по Мартену. Понятие разрежения было введено автором в ее работе (РЖМат, 1956, 8828). Множество $E\subset Q$ называется разреженным в точке $Q\notin E$, если Q — изолированная точка в множестве $EU\{Q\}$ или же если существует в Ω мера $m>0$ и потенциал $U(Q)=\int K(Q,P)dm(P)$ такой, что $U(Q)<\lim\limits_{M\to Q,\ M\in E}\int K(M,P)\,dm(P)$.

Множества, содержащие Q с разреженными дополнительными множествами в Q, называются тонкими окрестностями Q. Это понятие используется автором в проблеме экстремизации некоторой положительной гармонической функции (Brelot M., J. math. pures et appl., 1945, **26**, 1—33).

Получен весьма улучшенный вид принципа максимума. Пусть h — зафиксированная положительная гармоническая функция в Ω. Условие $u\leqslant 0$ в Ω вытекает из следующих: 1) u — субгармоническая функция в Ω, 2) u/h ограничена сверху, 3) в каждой минимальной точке Q, не принадлежащей к некоторому множеству внутренней h-гармонической меры нуль, существует множество, не разреженное в Q, для которого $\overline{\lim}\,u/h\leqslant 0$ в точке Q (минимальные точки — те точки Δ, в которых Ω не разрежено).

Пусть $D_{f,h}$ — решение задачи Дирихле в Ω с границей по Мартену Δ (РЖМат, 1957, 6375; 1958, 343). Для конечной и непрерывной в Δ функции f $D_{f,h}$ есть единственная функция u, гармоническая в Ω, для которой u/h ограничена и имеет в любой точке $Q\in\Delta$ конечный предел, равный f, кроме, может быть, в множестве с внутренней h-гармонической мерой, равной нулю. M. Jurchescu

7980. Последовательности экстремальных точек, связанные с множествами в трехмерном пространстве. Гурский (Les suites de points extrémaux liés aux ensembles dans l'espace à 3 dimensions. Górski J.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 14—20 (франц.)

Как и в предшествующей работе Лея (реф. 7930), последовательность экстремальных точек $\{Q_j\}$ компакта E положительной емкости определяется, отправляясь от произвольной его точки Q_1, требованием $\sum_{j=1}^{n-1}|Q_nQ_j|^{-1}=\min\limits_{Q\in E}\sum_{j=1}^{n-1}|QQ_j|^{-1}$. Доказывается, что при $P\notin E$ потенциал точечных масс $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|PQ_j|^{-1}$ стремится к потенциалу равновесного распределения μ компакта E.

Если $f(Q)$ — непрерывная функция на E, то, заменяя функцию $\sum_{j=1}^{n-1}|QQ_j|^{-1}$ на $\sum_{j=1}^{n-1}|QQ_j|^{-1}-\sum_{j=1}^{n-1}[f(Q)+f(Q_j)]$, можно построить другую последовательность экстремальных точек $\{Q_j^*\}$. Пусть σ_n^* — система n точечных масс величины $\frac{1}{n}$, сосредоточенных в точках $Q_1^*,\dots,Q_n^*$, μ^* — предельная (после выборки подпоследовательности) масса, $E_f\subset E$ — носитель μ^*. Если $E_f=E$, то функция $u_n^*(P)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[|PQ_j^*|^{-1}+f(Q_j)]-\frac{1}{d(E)}$, где $d(E)$ — емкость E при $P\notin E$ и $n\to\infty$ стремится к $\int_E|PQ|^{-1}d\mu^*(Q)+\int_E f(Q)d\mu(Q)-\frac{1}{d(E)}$, и этот предел дает решение обобщенной задачи Дирихле для смежных к E областей с граничными значениями $f(Q)$. Н. С. Ландкоф

7981. Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала. Иванов В. К., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 96—99

Пусть M — класс плоских областей D, в котором введена некоторая метрика. Каждая область заполнена массами с постоянной плотностью, равной единице. Ставя в соответствие области D из M ее потенциал V, получаем отображение $V=\Phi(D)$. В множестве N потенциалов вводится метрика

$$\rho(V_1,V_2)=\max\left|\frac{\partial V_1}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial y}\right|\quad\text{при } y=0.$$

Устойчивость обратной задачи потенциала означает, что отображение $V=\Phi(D)$ множества M на N взаимно однозначно и обратное отображение $D=\Phi^{-1}(N)$ непрерывно. Такой класс M областей называется классом устойчивости.

Если $f(\theta)$ — неотрицательная ограниченная измеримая функция, заданная на $[0,2\pi]$, то множество точек плоскости, полярные координаты которых (r,θ) удовлетворяют при каждом θ условию $r<f(\theta)$, называется звездным множеством, а $f(\theta)$ — определяющей его функцией.

Общие условия устойчивости обратных задач даны А. Н. Тихоновым (Докл. АН СССР, 1943, 39, № 5, 195—198) и основаны на следующей теореме: Взаимно однозначное и непрерывное в одну сторону отображение компакта является гомеоморфизмом. Там же указан

класс устойчивости для непрерывных определяющих функций.

Используя критерии компактности в различных функциональных пространствах и результаты своей предыдущей работы (РЖМат, 1959, 5759) об однозначности определения звездного множества по его потенциалу при измеримости определяющей функции, автор дает новые классы устойчивости обратной задачи потенциала. Ю. А. Шашкин

7982 К. Введение в теорию аналитических функций. Чакалов (Увод в теорията на аналитичните функции. 3 изд. Чакалов Любомир. София, Наука и изкуство, 1957, 424 с., 12.90 лв.), Бълг. книгопис, 1957, **61**, № 8, 8 (болг.)

7983 Д. Приближения рациональными функциями с заданным множеством полюсов. Кочарян Г. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ереванск. ун-т, Ереван, 1958

7984 Д. Обратные краевые задачи аэрогидромеханики для многосвязных областей. Казбан А. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1958

7985 Д. Связь между ростом мероморфной функции и распределением ее значений по аргументам. Островский И. В. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1958

7986 Д. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций. Фирсакова О. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1958

7987 Д. Голоморфное расширение комплексных многообразий и аппроксимация голоморфных функций. Докье (Holomorphe Ausdehnung komplexer Mannigfaltigkeiten und Approximation holomorpher Funktionen. Docquier Ferdinand.— Diss., Math.-naturwiss. Fak., Münster, 1958, 49 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, В, № 21, 1878 (нем.)

См. также: 7999, 8000, 8039, 8068 К, 8132, 8153, 8157, 8161

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

7988. О теоремах единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. Перов А. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 4, 704—707

Сформулированы новые теоремы единственности решения уравнения $dx/dt=f(t, x)$ в банаховом пространстве, обобщающие (даже в случае n-мерного пространства) некоторые известные теоремы единственности (РЖМат, 1955, 2676 К; 1956, 8778)

А. Ф. Филиппов

7989. О теореме Коши—Липшица. Пейзер (On the Cauchy—Lipschitz theorem. Peyser Gideon), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 10, 760—762 (англ.)

Приводится несколько видоизмененная форма доказательства существования решения дифференциального уравнения

$$dy/dx=f(x, y)$$

при наличии условия Липшица. В. В. Немыцкий

7990. Решение в квадратурах некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Илиева (Решение с квадратури на някои обикновени диференциални уравнения от първи ред. Илиева Вяра), Физ.-матем. списание, 1958, **1**, № 1-2, 59—61 (болг.)

7991. К вопросу о понижении порядка системы линейных дифференциальных уравнений при помощи ее частного решения. Козлов (До питання про зниження порядку системи лінійних диференціальних рівнянь за допомогою часткового розв'язку її. Козлов Є. М.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 9, 918—923 (укр.; рез. русск., англ.)

На интервале $[t_0, T]$ автор ищет частное решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в том случае, когда соответствующее характеристическое уравнение имеет один корень, близкий к нулю, а все остальные — с действительными частями одинаковых знаков. Указанное частное решение автор находит численным интегрированием исходной системы „слева направо" при начальном условии, получаемом методом наименьших квадратов. Получив таким образом частное решение, автор понижает исходную систему на единицу. Если же нулевой корень имеет кратность p, то порядок исходной системы можно понизить на p единиц.

Н. Я. Лященко

7992. О сведении дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Зоннер (Über die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche. Sonner Hans), Math. Z., 1956, **65**, № 4, 483—493 (нем.)

Задача, о которой идет речь в заголовке, является, несомненно, совершенно новой в теории дифференциальных уравнений в частных производных, т. е. в теории, которую мы знаем из работ наиболее крупных математиков последних двух веков. Кажется невозможным искать решение этой задачи в последней работе Бурбаки, цитированной автором, так как последняя работа в основном посвящена скорее критическому анализу, чем решению задач. С другой стороны, трудность возникает в тот момент, когда мы заметим, что решение обыкновенного дифференциального уравнения всегда зависит от конечного числа производных постоянных, в то время как уравнение или система уравнений с частными производными допускает решения, зависящие от непрерывного многообразия соответствующих данных из пространства.

Наконец, то небольшое число вычислений и формул, которые входят в текст статьи, ограничивается простыми производными и интегралами, едва соответствующими той общности задачи, о которой говорится в заголовке. B. Levi.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 10, 806.

7993. О решении дифференциального уравнения $f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})=0$. Эйбиан, Браун (On the solution of the differential equation $f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})=0$. Abian Smbat, Brown Arthur B.), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 3, 383—394 (англ.; рез. итал.)

Метод последовательных приближений применяется к решению неявного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка; не решая его явно относительно n-й производной. Даны оценки погрешности до m-го приближения. Резюме автора

7994. Некоторые замечания о решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Бершвили Г., Студентта самецниеро шромебис кребули. Тбилисис унив., Сб. научн. тр. студ. Тбилисск. ун-та, 1958, № 8, 1—5 (груз.)

Методическая заметка, посвященная применению способа Коши для представления частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения к некоторым типам уравнений. Работа является в некотором роде откликом на заметку Феттиса (РЖМат, 1956, 393), касающуюся того же вопроса. А. К. Харадзе

7995. Интегрирование системы линейных уравнений и применение к теории Власова призматических и слабо пирамидальных оболочек. Варбанов (Integration von Systemen simultaner Differentialgleichungen und ihre Anwendung in der Wlassovschen Theorie der prismen- und schwach pyramidenförmigen Schalen (Faltwerke). Warbanoff Christo P.), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1957—1958, **7**, № 6, 1181—1187 (нем.)

Излагается „метод припасовывания" для систем линейных дифференциальных уравнений и затем даются некоторые приложения к теории оболочек.

В. В. Немыцкий

7996. О преследовании цели по кривой погони. Кельзон А. С., Bul. Inst. politehn. Iasi, 1957, **3**, № 3-4, 43—48 (русск.; рез. англ., рум.)

Выводится уравнение движения точки по кривой погони. Резюме автора

7997. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к треугольному виду. Золотарев Ю. Г., Уч. зап. Казахск. ун-та, 1957, **30**, 107—109

Небольшое изменение метода доказательства теоремы Перрона, предложенного референтом (РЖМат, 1955, 720). Р. Э. Виноград

7998. Об одной краевой задаче для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Ешуков Л. Н., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 30—40

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{lk}(t)\, x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

и система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_l}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Высказываются условия существования решения системы (1) или системы (2), удовлетворяющего краевым условиям

$$x_l(t_i) = A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ принадлежат определенному интервалу $[a, b]$, числа A_i произвольны.

Теорема 1. Пусть $x_{11}, \ldots, x_{1n}$ — первая строка матрицы $\| x_{ik} \|$ фундаментальной системы решений системы (1) и пусть ни один из главных миноров матрицы

$$\left\| \frac{d^k x_{1i}}{dt^k} \right\| \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, (n-1) \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль на $[a, b]$. Тогда при всех $t_1, \ldots, t_n$ из $[a, b]$ и произвольных $A_1, \ldots, A_n$ краевая задача (1), (3) имеет единственное решение.

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения дифференциального уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0$$

— действительные числа, то краевая задача (3) для этого уравнения имеет единственное решение при всех $t_1, \ldots, t_n$ и произвольных A_i.

Теорема 3. Если корни характеристического уравнения системы (2) — действительные числа, то любая функция x_l из любого решения $x_1, \ldots, x_n$ этой системы или тождественно равна нулю, или имеет не более $(n-1)$ корней.

Далее автор подробно изучает вопросы эквивалентности системы дифференциальных уравнений и одного дифференциального уравнения. Пусть $x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$ — производные $x_i(t)$, составленные в силу системы (1); эти производные будут линейными формами $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 4. Пусть коэффициенты p_{ik} системы (1) дифференцируемы до $(n-1)$-го порядка и на $[a, b]$ выполнено условие

$$I = \frac{\partial\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0, \tag{4}$$

тогда система (1) эквивалентна уравнению

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) \frac{d^{n-i}x}{dt^{n-i}} = 0 \tag{5}$$

по координате x_1.

В случае системы (2) достаточное условие теоремы 4 является и необходимым.

Теорема 5. Пусть для системы (2) выполнено условие (4). Тогда решение краевой задачи (2), (3) существует и единственно при произвольных $A_1, \ldots, A_n$ и всех $t_1, \ldots, t_n$ из интервала $[a, b]$, если длина этого интервала удовлетворяет неравенству

$$(1 + lh)^n \leqslant 2$$

или более точному

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(lh\sqrt{k})^k}{k!} \leqslant 1,$$

где $l = \max | a_{ik} |$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 6. Пусть в интервале $[a, b]$, длина которого достаточно мала, выполнено условие (4). Тогда для любого выбора чисел t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из интервала $[a, b]$ задача (1), (3) имеет единственное решение.

Теорема 7. Пусть для системы (2) выполнено условие (4) и пусть все корни характеристического уравнения системы (2) — действительные числа. Тогда решение краевой задачи (2), (3) существует и единственно при произвольных $A_1, \ldots, A_n$ и всех $t_1, \ldots t_n$.

Е. А. Барбашин

7999. О росте и распределении нулей трансцендентных решений линейных дифференциальных уравнений. I, II. Пёшль (Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I. II. Pöschl Klaus), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 3-4, 121—138; **200**, № 3-4, 129—138 (нем.)

Рассматриваются решения

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu \tag{1}$$

уравнения

$$w^{(m)}(z) + p_1(z) w^{(m-1)}(z) + \ldots + p_{m-1}(z) w'(z) + p_m(z) w(z) = 0, \tag{2}$$

где $p_j(z) = q_j z^{kj}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ — полиномы. Пусть

$$k = \max_{j=1}^{m} k_j; \quad \alpha_j = m - j + k - k_j. \tag{3}$$

Исследуется функция $M(r)=\max_{|z|=r}|w(z)|=\left|w\left(\frac{1}{x}\right)\right|$, где $|x|=\frac{1}{r}$. Пусть $\ln M(r)=tr^{\lambda}(1+\varepsilon(r))$, где $\lim_{r\to\infty}\varepsilon(r)=0$, λ — порядок роста $w(z)$, а t — тип порядка λ. Обозначим через $n(r)=1/y$ показатель наивысшей степени z у наибольших по модулю членов ряда (1) при $|z|=r$. Тогда

$$\left(\frac{d^jw}{dz^j}\right)_{z=1/x}=\left(\frac{x}{y}\right)^j w\left(\frac{1}{x}\right)(1+\varepsilon(r)),\ \lim_{r\to\infty}\varepsilon(r)=0,$$

откуда следует

$$\sum_{j=0}^{m}q_jx^{\alpha_j}y^j=0, \tag{4}$$

причем $y(x)=Bx^{\lambda}(1+h(x))$, $\lim_{x\to0}h(x)=0$. В силу уравнения (4) число членов низшей степени в сумме $\sum_{j=0}^{m}a_jB^jx^{\alpha_j+j\lambda}$ не меньше двух. Приравняв нулю сумму этих членов, мы получим для B уравнение

$$\sum_{(h)}a_hB^h=0. \tag{5}$$

Для λ мы находим некоторое число возможных рациональных значений $\lambda=\frac{\alpha_i-\alpha_j}{j-i}=1+\frac{k_j-k_i}{j-i}$. Считая j абсциссой, α_j ординатой, выделим из системы точек (j,α_j), где $0\leqslant j\leqslant m$, крайние точки $(0,\alpha_0)$, (m,α_m) и те промежуточные точки (j,α_j), которые образуют ломаную, обращенную выпуклостью к оси абсцисс, ниже которой нет других точек данной системы. Эта ломаная называется диаграммой Пюизе и может состоять из двух частей: первая направлена вниз, а вторая — вверх. Чтобы получить все возможные значения λ, нужно в формуле (5) в качестве точек (i,α_i), (j,α_j) взять две смежные вершины первой части диаграммы Пюизе. Тип t определяется формулой $t=\frac{1}{|B|^{\lambda}}$, где B — один из корней уравнения (5). Если $\frac{k_\mu}{\mu}=\max_{j=1}^{m}\frac{k_j}{j}$ $(\mu<m)$, то $\lambda_{\max}=1+\frac{k_\mu}{\mu}$.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Всегда существует решение $w(z)$ максимального порядка $\lambda_{\max}$ и наивысшего типа t.

Теорема 2. Пусть снижающаяся часть диаграммы Пюизе содержит сторону с вершинами $(m-1,\alpha_{m-1})$ и (m,α_m), которой соответствует минимальный порядок роста $\lambda_{\min}=1+k_m-k_{m-1}$. Вообще говоря, не существует решения $w(z)$, имеющего порядок $\lambda_{\min}$. Такое решение может существовать только при особой форме коэффициентов уравнения и должно иметь вид

$$w(z)=P_1(z)1^{Q_1(z)},$$

где $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — полиномы, $Q_1=-\frac{q_mz^{\lambda}}{q_{n-1}\lambda}+\ldots$ В случае уравнения $w''+p_1w'+p_2w=0$ теорема 2 относится к уравнениям, для которых $\frac{k_2}{2}<k_1\leqslant k_2$, причем

$$\lambda_1=1+k_2-k_1,\ \lambda_2=1+k_1.$$

Порядок λ_1 появляется лишь при наличии решения $w_1=P_1 1^{Q_1}$, где P_1 и Q_1 — полиномы,

$$Q_1=-\frac{q_1}{q_2}\frac{z^{1+k_2-k_1}}{1+k_2-k_1}.$$

Чтобы асимптотически проинтегрировать уравнение (2), применяется метод приведения этого уравнения к интегральному уравнению путем замены переменных w и z переменными

$$W=s(z)e^{1/m\int_{p_1}^{z}(\eta)d\eta}w(z),\ Z=\int^{z}\sqrt{F(\eta)}d\eta,$$

где $s(z)$ и $F(z)$ — вспомогательные функции, выбираемые так, чтобы преобразованное уравнение имело вид

$$L[W]=L_0[W]+\psi_2(Z)\frac{d^{m-2}W}{dZ^{m-2}}+\ldots+\psi_n(Z)W=0, \tag{6}$$

причем

$$L_0[W]=\frac{d^mW}{dZ^m}+A_2\frac{d^{m-2}W}{dZ^{m-2}}+A_4\frac{d^{m-4}W}{dZ^{m-4}}+\ldots+A_mW,$$

а $\psi_j(Z)$ достаточно быстро стремятся к нулю при $Z\to\infty$. Каждому решению $W_0(Z)$ уравнения

$$L_0[W]=0 \tag{7}$$

сопоставляется решение W уравнения (6), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$W(Z)-\int_{z}^{\infty}K(Z,T)W(T)dT=W_0(Z),$$

причем

$$K(Z,T)=\sum_{\mu=1}^{m-1}K_\mu[(-1)^m(T-Z)]\Phi_\mu(T);$$

K_μ образуют систему $m-1$ линейно независимых решений уравнения (7), а $\Phi_1,\ldots,\Phi_{m-1}$ являются линейными комбинациями функций $\psi_2,\psi_3,\ldots,\psi_m$ и их производных.

Предполагается, что в угловой области G функция W_0 ограничена, а $|K(Z,T)|>\delta$, где $\delta>0$, Z — точка области G, а T пробегает луч, выходящий из Z и лежащий в G.

Ю. Л. Рабинович

8000. Элементарное доказательство теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Парсонс (An elementary proof of the existence theorem for linear differential equations with constant coefficients. Parsons D. H.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 278—279 (англ.)

8001. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений. Лю Юн-цзин (Liu Yung-ching), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 297—303 (кит.; рез. англ.)

В первой части статьи найдена область устойчивости в пространстве коэффициентов решений дифференциально-разностного уравнения

$$Au'(t+\delta)+Bu(t+\delta)+Cu'(t)+Du(t)=0, \tag{1}$$

где A, B, C, D и δ — постоянные.

Во второй части доказано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на коэффициенты уравнения и запаздывание, решения уравнения (1) и решения уравнения без отклонений аргумента, получающегося из уравнения (1) при $\delta=0$, одновременно устойчивы или одновременно неустойчивы.

Эквивалентность по отношению к понятию устойчивости в том же смысле устанавливается и для уравнений

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) + ru^{(n)}(t - \delta) = 0 \text{ и}$$
$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) + ru^{(n)}(t) = 0,$$

$\delta > 0$ ($n = 0, 1, 2$), где δ, p, q и r — постоянные.

Л. Э. Эльсгольц

8002. **О краевой задаче типа Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 203—214

Рассматривается краевая задача для уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) + M(x)\, y(x - \Delta(x)) = 0,$$
$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,$$
$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0,$$
$$y(x - \Delta(x)) = y(0)\varphi(x - \Delta(x)), \text{ если } x - \Delta(x) < 0,$$

где $M(x)$ и $\Delta(x) \geqslant 0$—непрерывные на отрезке $[0, \pi]$ функции, λ—действительный параметр, α и β—действительные постоянные, $\varphi(x)$—непрерывная при $x \leqslant 0$ функция, причем $\varphi(0) = 1$.

Доказывается, что эта краевая задача имеет бесконечное множество положительных собственных значений, причем все собственные значения простые. Изучается асимптотика собственных значений и собственных функций при различных ограничениях, налагаемых на $M(x)$ и $\Delta(x)$.

Л. Э. Эльсгольц

8003. **О росте решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Стрелиц Ш. И.,** Матем. сб., 1958, 46, № 4, 433—450

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами

$$w'' + P(z)\, w' + Q(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

и исследуется рост решений в окрестности особых точек.

В окрестности полюса коэффициентов $z = z_0$ решения имеют одно из следующих разложений:

$$w(z) = C_1 (z - z_0)^{\lambda_1} f_1(z) + C_2 (z - z_0)^{\lambda_2} f_2(z),$$
$$w(z) = (z - z_0)^{\lambda} [C_1 f_1(z) + f_2(z) \ln(z - z_0)) + C_2 f_2(z)],$$

где $f_i(z)$—функции, однозначные и аналитические в окрестности точки $z = z_0$. Логарифмический случай из рассмотрения исключается. Предполагается, что точка $z = z_0$ является иррегулярно особой точкой уравнения (1).

Автор называет числа

$$\rho_i = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\ln \ln M_i(r)}{\ln \frac{1}{r}}, \qquad \sigma_i = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\ln M_1(r)}{\frac{1}{r^{\rho_i}}},$$

где $M_i(r) = \max\limits_{|z - z_0| = r} |f_i(z)|$,

порядком и типом однозначных множителей $f_i(z)$, а числа

$$\rho = \max(\rho_1, \rho_2),$$
$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } \rho_1 > \rho_2 \\ \max(\sigma_1, \sigma_2) & \text{при } \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

порядком и типом общего решения.

Получен следующий результат: Пусть корни уравнения

$$\lambda^2 + \lambda(z - z_0) P(z) + (z - z_0)^2 Q(z) = 0$$

имеют в окрестности точки $z = z_0$ разложения

$$\lambda_j(z) = A^{(j)} (z - z_0)^{-\alpha_j} + A_1^j (z - z_0)^{-\alpha_j + 1} + \ldots \quad (j = 1, 2),$$

тогда порядок ρ и тип σ общего решения определяются формулами

$$\rho = \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma = \frac{|A|}{\rho},$$

где A—коэффициент у высшего члена в разложении корня с полюсом порядка ρ.

Д. П. Костомаров

8004. **Краевые задачи для возмущенного дифференциального уравнения, имеющего особенность. Левинсон** (A boundary value problems for a singularly perturbed differential equation. Levinson N.), Duke Math. J., 1958, 25, № 2, 331—342 (англ.)

Рассматривается краевая задача

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon y''' &= f(x, y, y', y'', \varepsilon), \\ y(0) &= a,\ y(1) = b,\ y'(1) = b_1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$—малый параметр. Предполагается, что вырожденное уравнение

$$f(x, u, u', u'', 0) = 0,$$

получающееся из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет решение $u = g(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$ и $u = h(x)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$, где $0 < x_0 < 1$ и $g(0) = a$, $h(1) = b$, $h'(1) = b_1$, а, кроме того,

$$y_0 \equiv g(x_0) = h(x_0),\ g'(x_0) = h'(x_0),\ g''(x_0) \neq h''(x_0).$$

Рассматривается случай

$$g'(x_0) = h'(x_0) = 0,\ h''(x_0) - g''(x_0) = \mu > 0,$$

что не ограничивает общности, так как простая замена переменных сводит общий случай к рассматриваемому. Основной результат работы содержится в следующей теореме. Пусть α, β и ε_0—положительные постоянные, $u(x) = g(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$ и $u(x) = h(x)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$, R—область переменных $(x, y, \omega, z, \varepsilon)$, определяемая соотношениями:

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,\ 0 \leqslant x < x_0 < x \leqslant 1,$$
$$|y - u(x)| + |\omega - u'(x)| + |z - u''(x)| \leqslant \alpha,$$
$$|x - x_0| + |y - y_0| + |\omega| \leqslant \alpha, -\mu - \beta \leqslant z \leqslant \mu + \beta.$$

Пусть в R f—действительная функция из класса C и, кроме того, пусть существуют частные производные f по x, y, ω, z, тоже принадлежащие C.

Теорема. Пусть

$$f_z(x, g(x), g'(x), g''(x), 0) > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0;$$
$$f_z(x, h(x), h'(x), h''(x), 0) < 0,\ x_0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$f(x_0, y_0, 0, z, 0) > 0,\ -\mu < z < \mu$$

и, кроме того, пусть решение линейного уравнения второго порядка

$$f_z(x, g, g', g'', 0)\frac{d^2 r}{dx^2} + f_w(x, g, g', g'', 0)\frac{dr}{dx} +$$
$$+ f_y(x, g, g', g'', 0) r = 0,\ r(x_0) = 0,\ r'(x_0) = 1,$$

определенное на интервале $0 \leqslant x \leqslant x_0$, отлично от нуля при $x = 0$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение краевой задачи (1) $y = \varphi(x, \varepsilon)$ такое, что

$$(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \varepsilon) \in R,$$

и при $\varepsilon \to 0$, $\varphi(x, \varepsilon) \to u(x)$ и $\varphi'(x, \varepsilon) \to u'(x)$ равномерно на промежутке $[0, 1]$, а $\varphi''(x, \varepsilon) \to u''(x)$ равномерно при $x \in [0, x_0 - \delta_0]$ и $x \in [x_0 + \delta_0, 1]$, $\delta_0 > 0$.

Это решение является единственным в том смысле, что не существует другого решения $\psi(x, \varepsilon)$ задачи (1), отличного от $\varphi(x, \varepsilon)$, для которого $|\psi(x, \varepsilon) - u(x)| + |\psi'(x, \varepsilon) - u'(x)|$ мало. В. М. Волосов

8005. Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной. Васильева А. Б., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 4, 583—586

Для уравнения

$$\mu \frac{dy^2}{dt^2} = -A(t, y)\frac{dy}{dt} + B(t, y), \qquad (1)$$

где $\mu \geqslant 0$ — малый параметр, рассматриваются следующие две основные краевые задачи:

I. $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$; II. $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

При $\mu = 0$ из (1) получается вырожденное уравнение

$$A(t, u)\frac{du}{dt} = B(t, u). \qquad (2)$$

В работе Н. И. Бриша показано, что при определенных условиях

$$\lim_{\mu \to 0} y_{\mathrm{I}}(t, \mu) = u(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\lim y_{\mathrm{II}}(t, \mu) = u(t),\ 0 < t \leqslant 1,$$

где y_{I} и y_{II} — решения задач I и II соответственно, а $u(t)$ — решение (2) при условии $u(1) = 0$. Для задачи I приближение является равномерным при $0 \leqslant t \leqslant 1$, а для задачи II — неравномерным. В реферируемой статье ставится задача построения равномерного приближения для случая II, а также задача о построении высших приближений как для первой, так и для второй краевых задач.

Для решения поставленной задачи вводится вспомогательная система

$$\mu dz/dt = -A(t, y)\, z + B(t, y),\ dy/dt = z. \qquad (3)$$

Методы, развитые А. Н. Тихоновым и автором, позволяют вычислить при любых заданных начальных условиях решения (3) с любой степенью точности. Рассматриваются решения системы (3), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$z|_{t=0} = z_0^0,\quad y|_{t=0} = y_0^0 + \mu y_1^0 \text{ и } z|_{t=0} = \frac{z_{-1}^0}{\mu},$$

$$y|_{t=0} = y_0^0.$$

Показано, что параметры $z_0^0, y_0^0, y_1^0, z_{-1}^0$, входящие в указанные начальные условия, можно выбрать таким образом, что соответствующие решения $y(t, \mu)$ системы (3) будут представлять собой равномерные приближения с точностью до $O(\mu^2)$ для решений задач I и II. Разработанная схема может быть применена к вычислению и более высоких приближений. Формулы для вычисления нужных значений $z_0^0, y_0^0, y_1^0, z_{-1}^0$ просты и эффективны.

В заключение указано, что разработанные методы применимы к более общей краевой задаче: $y(0) + \alpha y'(0) = 0$, $y(1) + \beta y'(1) = 0$. В. М. Волосов

8006. Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично загруженной круглой пластины. Морозов Н. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 3, 417—419

Уравнения равновесия круглой симметрично загруженной пластины берутся автором в виде:

$$Av - \frac{\lambda}{2}u^2 = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\varkappa}Au + \lambda uv + \int_0^r q(\rho)\rho d\rho = 0, \qquad (2)$$

$$A = -r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r. \qquad (3)$$

В уравнениях (1)—(3) v характеризует радиальное усилие в оболочке, u — угол наклона нормали к оси симметрии; $\varkappa$, λ — некоторые постоянные, характеризующие жесткость пластины на изгиб и растяжение. Рассмотрения производятся для случая шарнирно-опертой и заделанной пластины, причем в каждом из этих случаев контур пластины либо должен быть заделан от радиальных перемещений, либо свободным от радиальных напряжений, либо радиальные напряжения на контуре должны быть растягивающими.

Во всех случаях доказывается, что система (1)—(3) имеет не более одного решения в естественно определенном для данной механической задачи функциональном пространстве. (Существование хотя бы одного решения в общем случае уравнений Кармана было установлено ранее в работах автора и референта.)

При доказательстве автор сводит систему (1), (2) к уравнению с вполне непрерывным оператором и устанавливает, что производная Фреше этого оператора однозначно обратима при любых u, v, удовлетворяющих (1, 2). После этого единственность решения для (2), (3) вытекает из теоремы Гильдебрандта—Грейвса. Отметим, что попутно автор установил следующую характерную особенность работы пластин в данных условиях: радиальное усилие в пластине в рассматриваемых случаях не может быть сжимающим.

И. И. Ворович

8007. Теорема существования и единственности решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Плехотин А. П., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 4, 613—615

Для системы дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y),$$

где $y(t)$ — искомый n-мерный вектор, $f(t, y)$ — вектор-функция, формулируются условия существования и единственности решения краевой задачи

$$\sum_{m=0}^{\mu} \alpha_m y(t_m) = b,\quad t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m,$$

где α_m, $m = 0, 1, \ldots, \mu$ — заданные постоянные матрицы порядка n, b — заданный постоянный вектор.

Показывается, что искомое решение удовлетворяет определенному неравенству, которое может быть рассматриваемо как формула оценки погрешности при приближенном решении краевой задачи. Содержание статьи исчерпывается формулировкой условий теоремы и замечаниями к ней. Е. А. Барбашин

8008. О первой проблеме различения в теории Фроммера. Андреев А. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 13, 84—86 (рез. англ.)

Автор рассматривает дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)+q(x,y)}{P(x,y)+p(x,y)}, \qquad (1)$$

где $Q(x,y)$ и $P(x,y)$—однородные полиномы степени n, а $q(x,y)=o(r^n)$, $p(x,y)=o(r^n)$; $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. Подразумевается также, что функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$ удовлетворяют каким-либо дополнительным условиям, обеспечи-

вающим для уравнения (1) единственность решения задачи Коши для всех точек некоторой окрестности начала, отличных от начала. В полярных координатах уравнение (1) имеет вид:

$$r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{F(\varphi)+f(r,\varphi)}{G(\varphi)+g(r,\varphi)}, \qquad (2)$$

где $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$—аналитические функции, а $f(r,\varphi)$ и $g(r,\varphi)$—непрерывные функции, исчезающие вместе с r. Рассматривается случай, когда $F(\varphi)=A\varphi^k+a_1\varphi^{k+1}+\ldots$, число k нечетное и $\frac{A}{G(0)}<0$.

Как известно, в рассматриваемом случае могут иметь место две возможности: 1) по направлению $\varphi=0$ в начало входит одна и только одна характеристика (расположение *а*) и 2) по этому направлению в начало входит бесконечное множество характеристик (расположение *б*).

Автор формулирует следующую теорему (не приводя доказательства): Если $f(r,\varphi)$ (при $0<r<R$) удовлетворяет условию:

$$|f(r,\varphi)|<Kc(r), \qquad (3)$$

где k—постоянное, а интеграл

$$\int_0^r\frac{c(u)du}{u} \qquad (4)$$

сходится, причем функции $f(r,\varphi)$ и $g(r,\varphi)$ удовлетворяют (при малых положительных r и малых $|\varphi|$) условию Липшица с коэффициентом $Lc(r)$ (где L—постоянное), то характеристики уравнения (1) имеют для направления $\varphi=0$ расположение *а*. Условие (3) будет выполнено, если выполняются условия

$$\left|\frac{P(x,y)}{r^n}\right|<Kc(r) \quad (4) \quad \text{и} \quad \left|\frac{q(x,y)}{r^n}\right|<Kc(r). \quad (4')$$

Из рассмотренной теоремы вытекает как следствие, что расположение *а* для данного исключительного направления имеет место, если существует положительное число ε такое, что

$$\lim_{r\to 0} f(r,\varphi)(-\ln r)^{1+\varepsilon}=0 \qquad (5)$$

при любых фиксированных φ.

Примечание референта. Вместо условия (3) (которое является основным в теореме) достаточно иметь более слабое условие: $|\psi(r,\varphi)|<L\cdot c(r)$, где $\psi(r,\varphi)=f(r,\varphi)-f(r,0)$, а функция $f(r,0)$ может стремиться к нулю вместе с r любым способом. Требование, чтобы неравенства (4) и (4') выполнялись при всех $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$, также излишне. Достаточно, если эти неравенства будут выполняться для значений φ, заключенных в интервале $(-\delta,\delta)$, где $|\delta|$ сколь угодно мало, или для $\varphi=u(-\ln r)^{1/(1-k)}$, где u фиксировано.

Эти положения непосредственно следуют из работы референта (Тр. Узб. ун-та, 1958, вып. 78, 196—203). В этой работе доказывается теорема 1, из которой упомянутые результаты А. Ф. Андреева вытекают как частный случай. В той же работе приводится теорема 2, из которой вытекает, что расположение *а* в рассматриваемом случае будет всегда иметь место при наличии условия (5) даже, если $\varepsilon=0$ (в этом случае интеграл (4) может расходиться). И. С. Куклес

Примечание редакции. Редакция отмечает, что работа И. С. Куклеса, указанная в примечании, вышла не ранее работы А. Ф. Андреева.

8009. Синхронизация механических систем. Существование двух типов периодических решений. Об одном случае слияния. Фор (Synchronisation des systèmes mécaniques. Existence de deux types de solutions périodiques. Sur un cas de confluence. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 17, 2447—2449 (франц.)

Рассматривается нелинейная система, описываемая уравнением

$$x''+\omega_0^2x=\lambda f(x,x',t), \qquad (1)$$

где λ—параметр, $f(x,x',t)$—периодическая по t с периодом T и, кроме того, удовлетворяет по x,x' условию Липшица с постоянной K.

Для уравнения (1) автором обобщаются результаты, полученные ранее (РЖМат, 1959, 4694) для обобщенного уравнения Ван-дер-Поля:

$$x''+x=\lambda[(1-x^2)x'+a\cos 3t],$$

для которого им было установлено наличие двух типов периодических решений: тип (A) периода $\frac{2\pi}{3}$, амплитуда этих колебаний стремится к нулю вместе с λ, и тип (B) периода 2π, амплитуда колебаний типа (B) в фазовой плоскости стремится к 2, когда λ стремится к нулю. Ю. А. Митропольский

8010. О поведении характеристик уравнения Гукухары в окрестности начала. Куклес И. С., ЎзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 7, 5—10 (рез. узб.)

Изложение результатов одноименной статьи автора. (РЖМат, 1959, 3766) А. Ф. Андреев

8011. О существовании цикла вне условий абсолютной устойчивости техмерной системы. Широкорад Б. В., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 10, 953—967 (рез. англ.)

Рассматривается система

$$dx/dt=y-f(x),\ dy/dt=z,$$
$$dz/dt=-\rho_2z-k_\gamma f(x). \qquad (1)$$

Относительно $f(x)$ предполагается, что она удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждого x, является невыпуклой (т. е. $|f(\theta x_1+(1-\theta)x_2)|\leqslant\theta|f(x_1)|+(1-\theta)|f(x_2)|$ при $0\leqslant\theta\leqslant 1$ для всех x_1 и x_2 и подчиняется неравенству $xf(x)>0$ при $x\neq 0$. В окрестности $x=0$ функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=Dx+\varphi(x), \qquad (2)$$

где $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0$. Параметры ρ_2 и k_γ удовлетворяют соотношению $k_\gamma>\rho_2^2$.

Кроме того, предполагается, что $f(x)$ удовлетворяет условию диссипативности, состоящему в следующем. Положим

$$m=1+2k_\gamma+\frac{2+\rho_2}{\lambda},\quad k=2k_\gamma\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\rho_2}\right),$$
$$n=1+k_\gamma+\frac{k_\gamma\rho_2+2k_\gamma+\rho_2}{\lambda},\quad l=k_\gamma\left(3+\frac{\lambda}{\rho_2}-\frac{\rho_2}{\lambda}\right),$$

где $\lambda^2=4k_\gamma-\rho_2^2$. Существует такое достаточно большое $r>0$, что корни уравнений

$$m\omega+k\xi=f(\xi),\ n\omega+l\eta=f(\eta), \qquad (3)$$

ξ, η, соответствующие $\omega=r$, и ξ', η', соответствующие $\omega=-r$, лежат в интервале $[-r,r]$ и, кроме того, имеют место неравенства

$$-r/k<\xi'<\xi<r/k,\ -r/l<\eta'<\eta<r/l. \qquad (4)$$

Автор отмечает, что условие диссипативности выполнено, если $f'(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

В перечисленных выше предположениях доказывается существование у системы (1) периодического решения, отличного от состояния равновесия. В. А. Плисс

8012. **Актуальные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Трикоми** (Aktuelle Fragen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Tricomi F. G.), MTW—Mitt., 1958, 5, № 6, 327—339 (нем.)

Обзор некоторых вопросов качественной теории одного уравнения второго порядка и системы двух уравнений. Главное внимание уделяется исследованию асимптотического поведения и разысканию предельных циклов. Приводятся некоторые числовые оценки.

В. В. Немыцкий

8013. **Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. Проскуряков А. П.**, Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 4, 510—518

Колебания автономных систем с одной степенью свободы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu\right),$$

где $f(x, \dot{x}, \mu)$ — аналитическая функция ее аргументов в области их изменения. Рассматривается случай, когда корни так называемого уравнения основных амплитуд, будучи вещественными и неотрицательными, могут иметь любую кратность. Развиваемый в статье метод построения периодических решений является сочетанием метода малого параметра Пуанкаре с методом Ван-дер-Поля. Статья примыкает к работе автора (РЖМат, 1958, 3720). В. М. Старжинский

8014. **О периодических решениях одной системы двух дифференциальных уравнений. Кушков Н. Н.**, Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 10, 94—100 (рез. англ.)

Рассматривается система нелинейных колебаний

$$dx/dt = y + f(x), \quad dy/dt = g(x), \tag{1}$$

у которой $f(0) = g(0) = 0$ и $xg(x) < 0$ при $x \neq 0$; предполагается также выполнение условий существования и единственности при всех начальных данных. Доказывается следующее утверждение:

Теорема. Пусть

$$-f(x) \geqslant -f(-x) \text{ при } 0 < x < x_0,\ g(x) = -g(-x); \tag{2}$$

$$p^2 + 4q < 0\ (p = f'(0),\ q = g'(0)); \tag{3}$$

$$-\int_0^{\bar{x}_0} g(x) f(x)\,dx > -\int_0^{-\bar{x}_0} g(x) f(x)\,dx,$$

$$\text{где } \bar{x}_0 > x_0, \tag{4}$$

$$-f(x) \leqslant -f(-x) \text{ при } x > \bar{x}_0.$$

Тогда для существования периодического решения достаточно выполнения одного из следующих условий:

$$\text{A)}\ \overline{\lim_{x \to +\infty}} \left(\int_{\bar{x}_k}^{x} \frac{g(x)}{f(x) + K}\,dx + f(x) \right) = +\infty,$$

если $-f(x) > K_1$ при $x > \bar{x}_k$, $K < K_1$;

$$\text{B)}\ \underline{\lim_{x \to +\infty}} \left(\int_{\bar{x}_k}^{x} \frac{g(x)}{f(x) + K}\,dx + f(x) \right) = -\infty,$$

если $-f(x) < K_1$ при $x > x_k$, $K > K_1$.

В. А. Плисс

8015. **О нелинейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Джонс** (On nonlinear second order differential equations. Jones John, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 586—588 (англ.)

В работе доказаны две теоремы о колеблемости (наличии неограниченно больших положительных нулей) решений уравнения

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{2i-1} = 0. \tag{1}$$

Теорема 1. Если при $x \geqslant 0$ $f_i(x) \geqslant 0$, $f_j'(x) \leqslant 0$,

$$f_j'(x) \in L(0, \infty),\ i = 1, \ldots, n,\ n > 1 \tag{2}$$

и

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x^{2i-1}\,dx < \infty, \tag{3}$$

то уравнение (1) не имеет колеблющихся решений.

Теорема 2. Если каждое решение (1) колеблется и выполнены условия (2), то

$$\int_0^{\infty} x \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx = \infty. \tag{4}$$

Доказательство второй теоремы ведется от противного. Указано, что при выполнении условий (2), (4) методом последовательных приближений, изложенным в работе Аткинсона (РЖМат, 1956, 5226), можно доказать существование решения с асимптотикой $y(\infty) = 1$, $y'(\infty) = 0$.

Есть описки. Например, в формулировке теоремы 1, помимо перечисленных, есть условие: $f_n(x)$ имеет при $x \geqslant 0$ положительную нижнюю грань. Это условие противоречит (3) и нигде не используется в доказательстве. Л. А. Беклемишева

8016. **Некоторые признаки отсутствия замкнутых траекторий. Богданов Ю. С.**, Докл. АН СССР, 1958, 120, № 5, 939—940

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений, записанная в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = p(x); \quad p(x) — \text{вектор } (p_1(x),\ p_2(x)).$$

Вводятся в рассмотрение выражения

$$k(x) \equiv p_1^2(x) \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} + p_1(x)\, p_2(x) \left(\frac{\partial p_2(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} \right) - p_2^2 \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_2}$$

и $k(x, t) = |k(x)| - t\,||p(x)||^3$ и некоторые другие.

Устанавливаются признаки ацикличности области G. Например: Если $k(x, 2/h) > 0$ всюду, кроме особых точек, то G ациклична; аналогичный вывод справедлив, если $k(x, 2/h) < 0$. В этих неравенствах h означает диаметр некоторого ограниченного множества, заключающего область G. Свойства ацикличности, устанавливаемые этими ограничениями, связаны с кривизной интегральных кривых, заполняющих G. В. В. Немыцкий

8017. **Граничная задача для одного технически важного нелинейного дифференциального уравнения. Гигер** (Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung. Giger Adolf), Z. angew. Math. und Phys., 1956, **7**, № 2, 121—129 (нем.; рез. англ.)

Как известно, для уравнения

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta = \beta, \quad |\beta| < 1,$$

существует критическое (бифуркационное) значение параметра $\alpha = \alpha_0(\beta)$ такое, что при $\alpha > \alpha_0$ все движения приближаются к положениям равновесия, а при $\alpha < \alpha_0$ существуют области устойчивости и неустойчивости. Движения, начинающиеся из области неустойчивости, асимпто-

тически приближаются к периодическому движению. Случай $\alpha = \alpha_0$ характеризуется тем, что периодическому движению на фазовой плоскости (y, θ), где $y = d\theta/d\tau$, соответствует сепаратриса $y_p(\theta)$, которая соединяет соседние седловые точки.

Автор аппроксимирует сепаратрису многочленами $\bar{y}_p(\vartheta)$ по степеням $\vartheta = \theta - \pi + \arcsin\beta$ и вычисляет $\alpha_0(\beta)$ из уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{y}_p(\vartheta)\, d\vartheta = \beta/\alpha_0.$$

Сходимость приближений теоретически не рассматривается, но практически очевидна. Значения $\alpha_0(\beta)$ для $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ $(\Delta\beta = 0, 1)$ сосчитаны с тремя цифрами. И. М. Соболь

8018. **О методе эталонных функций. Риекстыньш Э. Я.**, Zinātn. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, **20**, № 3, 65—86 (рез. лат.)

Метод эталонных функций неоднократно использовался для исследования асимптотического поведения решений уравнения

$$y'' + [\lambda^2 R(x) + Q(x)]\, y = 0$$

при $\lambda \to \infty$. Пусть $x = 0$ будет единственной особой точкой коэффициентов $R(x)$ и $Q(x)$. Автор показывает, что весьма простая замена переменных позволяет во всех исследованных случаях привести исходное уравнение к виду

$$L[v] \equiv v'' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)]\quad v = 0,$$

где $\alpha > -2$, $0 < \beta \leqslant 2$. Тогда в качестве эталонного уравнения естественно взять уравнение

$$u'' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2}]\, u = 0,$$

решение которого выражается через бесселевы функции.

Уточнение асимптотических представлений проведено двумя методами: Лангера (Langer R. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 461—490; автор называет его Лейнджером) и Черри (Cherry T. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, 224—257). Полученные формулы различаются только членами $O(\lambda^{-4})$.

Рассмотрен также случай интегро-дифференциального уравнения

$$L[v] = \int_0^t G(t, s)\, v(s, \lambda)\, ds.$$

Библ. 24 назв. И. М. Соболь

8019. **Соображения к расчету реолинейных колебаний. Гёкке** (Ein Beitrag zur Berechnung rheolinearer Schwingungen. Göcke Hermann), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1958, 2, № 1, 15—44 (нем.)

Основное содержание работы связано с рассмотрением свойств решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + [\lambda + \gamma\varphi(t)]\, y = 0,$$

где $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$, λ и γ — постоянные (уравнение Хилла).

Во введении излагается несколько задач из различных областей техники, приводящих к исследуемому уравнению: электропривод шатунно-кривошипного механизма, колебания авиационного мотора с воздушным винтом, колебания в электрическом контуре с периодически изменяемой емкостью. Второй параграф содержит сводку известных результатов относительно уравнения Хилла. Особое внимание уделяется случаям, когда $\varphi(t)$ может быть представлена „прямоугольным синусом" или в виде „пилообразной" кривой. В этой связи в § 3 излагаются вопросы, касающиеся уравнения Лапласа $\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k t)x^{(k)} = 0$. Разъясняется, каким образом и в какой форме может быть записано общее решение уравнения второго порядка. В следующем параграфе общая форма решения конкретизируется применительно к уравнению

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (\beta + t)\, x = 0.$$

В § 5 интегралы, через которые выражается общее решение, преобразуются с помощью рядов к вырожденным гипергеометрическим функциям, причем законность этой операции обосновывается в § 6 доказательством сходимости этих рядов. § 7 посвящен дальнейшей детализации данных §§ 4,5. В § 8 изучается решение, соответствующее некоторым специальным начальным условиям. Устанавливается наличие неустойчивых решений. Исследованию областей устойчивости и неустойчивости посвящена остальная часть работы. Здесь автор в § 13 переходит к матричной форме решения, а в § 14 дает графическую интерпретацию результатов. П. И. Кузнецов

8020. **Теорема сравнения Штурма для осцилляционных чисел линейных систем второго порядка. Винтнер** (A comparison theorem for Sturmion oscillation numbers of linear systems of second order. Wintner Aurel), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 515—518 (англ.)

Рассматривается система уравнений вида $x'' + F(t)x =$ где $x(t)$ — вектор-функция с n компонентами, $F(t)$ — вещественная матрица, непрерывно зависящая от t на конечном или бесконечном интервале T оси t. Осцилляционным числом этой системы F_T называется максимальное число нулей решения $x(t)$ на интервале T. Пусть $f(t) = (F(t)e, e)$, где e пробегает единичную сферу в n-мерном пространстве. Через f_T обозначается осцилляционное число уравнения $u'' + f(t)u = 0$ в интервале T. Теорема сравнения заключается в неравенстве $F_T \leqslant f_T$. Доказательство совершенно элементарное: рассматривается уравнение, которому удовлетворяет функция $r(t) = |x(t)|$, и к этому уравнению применяется классическая теорема сравнения Штурма. Л. А. Чудов

8021. **Исправление. Меркин Д.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **141**, 264

См. РЖМат, 1957, 7035.

8022. **Обобщение одного результата Винтнера. Беллман** (On a generalization of a result of Wintner. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1959, **16**, № 4, 431—432 (англ.)

Установлена теорема: Пусть даны два векторно-матричных уравнения

$$dx/dt = A(t)\, x \quad \text{(a)} \qquad dy/dt = B(t)\, y. \quad \text{(b)}$$

Пусть далее $X(t)$ — решение системы (a) $X(0) = I$. Если

$$\int^{\infty} \| B(t) - A(t) \| \, \| X(t) \| \, \| X^{-1}(t) \| \, dx < \infty,$$

то каждое решение системы (b) может быть написано в форме

$$y = Xc + o(\| x \|),$$

когда $t \to \infty$. В. В. Немыцкий

8023. **О динамической устойчивости упругих систем. Якубович В. А.**, Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 4, 602—605

Данная работа примыкает по содержанию к статье автора (РЖМат, 1959, 5823). Рассматривается система k уравнений

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P_0 y = 0, \qquad (1)$$

где P_0 — постоянная симметрическая матрица, все собственные значения которой положительны. Наряду с

системой (1) вводится двупараметрическое семейство возмущенных систем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [P_0 + \varepsilon Q(\theta t)]y = 0. \qquad (2)$$

Здесь $Q(\tau)$ — фиксированная вещественная симметрическая матрица с периодом 2π.

Совокупность точек на вещественной плоскости (ε, θ), для которых система (2) имеет неограниченные решения, распадается на области „динамической неустойчивости". Каждая такая область примыкает к некоторой точке θ_0, где $\theta_0=(\omega_j+\omega_h)/m$ — одна из критических частот системы (1) в классе всех симметрических матриц $P(t)$

В работе устанавливаются условия, налагаемые на коэффициенты Фурье матрицы $Q(\tau)$, при которых данная частота θ_0 действительно лежит на границе области „динамической", т. е. фактически является критической для данного специального класса возмущений. Приводятся также условия противоположного смысла.

При доказательстве автор исследует поведение совпавших на единичной окружности мультипликаторов разного рода как функций параметров ε и θ. В статье содержится и ряд других результатов. В. Б. Лидский

8024. **Устойчивость движения (Различные определения понятий и практическое значение). Рейссиг** (Stabilität einer Bewegung. Verschiedene Begriffsdefinitionen und ihre praktische Bedeutung. Reißig Rolf), Forsch. und Fortschr., 1959, **33**, № 2, 38—41 (нем.)

8025. **Характеристика показателей степени. Применение к устойчивости. Вейга-ди-Оливейра** (Characteristic exponents. Application to stability. Veiga de Oliveira F.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1952, **A2**, 201—288; 1954, **A3**, 5—59) (порт.; рез. франц.)

Очень ясно написана обзорная статья. Используются векторно-матричные обозначения. J. L. Massera

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 132.

8026. **Достаточные условия существования периодических решений системы слабо нелинейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Хейл** (Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of systems of weakly nonlinear first and second order differential equations. Hale Jack K.), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 2, 163—171 (англ.)

Продолжение ранее опубликованных работ автора. Рассматриваются некоторые системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, близкие к линейным, для которых устанавливаются достаточные условия существования периодических решений. Основной результат относится к системам вида

$$\left.\begin{aligned} y''+Dy&=\varepsilon f(y, w, y', \varepsilon, t),\\ w'&=\varepsilon g(y, w, y', \varepsilon, t),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $y=\{y_1, \ldots, y_\mu\}$, $w=\{y_{\mu+1}, \ldots, y_n\}$, $f=\{f_1, \ldots, f_\mu\}$, $g=\{f_{\mu+1}, \ldots, f_n\}$, $D=\left\|\begin{matrix}\sigma_1^2 & & & 0\\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_\mu^2\end{matrix}\right\|$, ε — малый параметр, а, кроме того, f_n g периодичны по t с периодом $2\pi/\omega$ и аналитичны по y, w, y', ε в некоторой окрестности начала координат пространства $\{y, w, y', \varepsilon\}$, не зависящей от t при $-\infty<t<+\infty$. Указывается, что достаточные условия существования периодических решений (1), сформулированные в реферируемой работе, могут выполняться и тогда, когда известные условия Пуанкаре не дают ответа на вопрос о наличии периодических решений.

В статье рассматриваются также и некоторые системы более общего вида, а также некоторые уравнения третьего порядка, принадлежащие к системам типа (1). Статья содержит подробные доказательства. Имеется библиография (8 названий). В. М. Волосов

8027. **Об исследовании индивидуальных решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в случае резонанса. Лыкова О. Б.**, Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 4, 365—374 (рез. англ.)

Продолжение ранее опубликованных работ автора. Рассматривается система

$$dx/dt=X(x)+\varepsilon X^*(vt, x, \varepsilon), \qquad (1)$$

где x, X, X^* — n-мерные векторы, X^* периодична по vt с периодом 2π, ε — малый параметр. Решения (1) рассматриваются в окрестности двупараметрического семейства периодических решений невозмущенной системы $dx/dt=X(x)$. В этом случае при определенных условиях, как показано в предыдущих работах автора, существует двумерное локальное многообразие системы (1), на котором она принимает вид

$$\left.\begin{aligned} da/dt&=\varepsilon Q^{(f)}(vt, \psi, a, \varepsilon),\\ d\psi/dt&=\omega(a)+\varepsilon P^{(f)}(vt, \psi, a, \varepsilon).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В данной работе рассматривается случай резонанса, когда $\omega(a)\approx\frac{p}{q}v$. Для простоты изучается основной резонанс, когда $p=q=1$. Вводится фазовая расстройка $\Theta=\psi-vt$ и после некоторых преобразований система (2) приводится к уравнениям первого (улучшенного) приближения вида

$$da/dt=\varepsilon F(a, \Theta, \varepsilon),\ d\Theta/dt=\omega(a)-v+\varepsilon\varphi(a, \Theta), \qquad (3)$$

где F и φ — некоторые определенные функции.

Указывается, что термин „уравнения первого (улучшенного) приближения" понимается в том же смысле, как и в предыдущей работе автора. Однако надо иметь в виду, что уравнения (3) получаются из точных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} da/dt&=\varepsilon F(a, \Theta, \varepsilon)+O(\varepsilon^3),\\ d\Theta/dt&=\omega(a)-v+\varepsilon\varphi(a,\Theta)+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $O(\varepsilon^3)$, $O(\varepsilon^2)$ — некоторые определенные функции a, Θ, ε, отбрасыванием членов $O(\varepsilon^3)$, $O(\varepsilon^2)$. Обозначая через δa, $\delta\Theta$ отклонения решений (4) от решений (3), мы получаем для δa, $\delta\Theta$ уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt}&=\varepsilon F'_a\cdot\delta a+\varepsilon F'_\Theta\delta\Theta+O(\varepsilon^3)+\ldots,\\ \frac{d\Theta}{dt}&=[\omega-v]'_a\delta a+\varepsilon\varphi'_a\delta a+\varepsilon\varphi'_\Theta\delta\Theta+O(\varepsilon^2)+\ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

с начальными условиями $\delta a\mid_{t=0}=\delta\Theta\mid_{t=0}=0$. Из (5) видно, что в общем случае отнюдь нельзя утверждать, что $\delta a=O(\varepsilon)$ $\delta\Theta=O(\varepsilon)$ на всем интервале $t\sim1/\varepsilon$. Это имело бы место, если бы на всем интервале $t\sim1/\varepsilon$ выполнялось соотношение $[\omega-v]'_a\approx\varepsilon$, но этого как раз и нельзя гарантировать, так как при прохождении через резонанс условие $[\omega-v]'_a\approx\varepsilon$ может выполняться не на всем промежутке $t\sim1/\varepsilon$, а лишь в окрестности некоторых отдельных точек. Таким образом уравнения (3) обеспечивают соответствующую точность лишь при некоторых дополнительных условиях. Автор не выдвигает заранее этих ограничений, однако в работе рассматриваются лишь такие решения (3), которые в определенном смысле устойчивы, и в окрестности этих решений уравнения (3) как раз и будут обеспечивать нужную точность приближений.

Рассматриваются решения (1) в окрестности устойчивых решений (3) следующих трех типов: 1. Система (3) имеет устойчивое статическое решение $a=a_0$, $\Theta=\Theta_0$. В этом случае на многообразии существует устойчивое периодическое решение системы (1). 2. Система (3) имеет устойчивое периодическое решение. В этом случае система (1) имеет на многообразии устойчивое двоякопериодическое решение. 3. Система (3) имеет решение с вращающейся фазой вида

$$a=L(\varepsilon\Omega t+\bar{\psi}),\quad \Theta=M(\varepsilon\Omega t+\bar{\psi})+\varepsilon\Omega t.$$

В этом случае также существует устойчивое двоякопериодическое решение.

Проведенное исследование является обобщением теорем Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова и дает весьма полное представление о структуре индивидуальных решений (1) на двумерном многообразии. В. М. Волосов

8028. О синхронизации систем нелинейных колебаний. Решения вблизи особых точек. Фор (Sur la synchronisation des systèmes oscillants. Solutions voisines de points singuliers. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 15, 1087—1089 (франц.)

Автор рассматривает систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt}+\sum_k p_{ik}z_k=\Phi_i(z_k,\ t)+\lambda\, g_i(z_k,\ t)=\psi_i(z_k,\ t) \quad (1)$$

$(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,n)$ при малых значениях параметра λ. Пусть $D(R)$ есть область $|z|<R$, где $|z|=\sqrt{\sum z_i^2}$, и пусть M — точка с координатами z_i. Делаются следующие предположения: 1) Функции $g_i(z_k,\ t)$ являются периодическими от t с периодом T. 2) Функции $g_i(z_k,\ t)$ и $\Phi_i(z_k,\ t)$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми частными производными по z_k в области $D(R)$. 3) Если $M\in D(R)$ и $M'\in D(R)$, то имеют место неравенства

$$|\Phi_i(z_k,\ t)-\Phi_i(z_k',\ t)|<KR\sum_k|z_k-z_k'|,$$

$$\Phi(0,\ t)=0,\quad |g_i(z_{kl},t)-g_i(z_k',t)|<K'\sum_k|z_k-z_k'|$$

(где K и K' — постоянные). Автор показывает, что из рекуррентных формул

$$\frac{dz_{in}}{dt}+\sum_k p_{ik}z_{k,\,n}=\Phi_i(z_{k,\,n-1},\ t)+\lambda\, g(z_{k,\,n-1},\ t)$$

можно определить последовательность функций $z_{i,\,n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ (взяв за $z_{i0}(t)=0$), периодических от t с периодом T и сходящихся к предельной функции $z_i(t,\ \lambda)$, которая, будучи периодической от t (с периодом T), равномерно стремится к нулю вместе с λ. Эти предельные функции $z_i(t,\ \lambda)$ являются решениями системы (1).

Настоящая работа является обобщением предыдущих работ автора (РЖМат, 1954, 4694), а также обобщением работы Хага (Haag, Ann. Ecol. почт. supér, 1948, 65, 299—334). И. С. Куклес

8029. Асимптотическая теория релаксационных колебаний. Мищенко Е. Ф., Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 141—142 (русск.); 142 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{x}=f(x,y),\quad \dot{y}=g(x,y), \quad (1)$$

где ε — малый параметр, а x и y — соответственно k- и l- мерные векторы. Предполагается, что „вырожденная" система, получающаяся из (1) при $\varepsilon=0$, имеет устойчивое разрывное периодическое решение Z_0 периода T_0. В этом предположении приближенно (с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$) вычисляется периодическое решение Z_ε, близкое к Z_0 и стремящееся к Z_0 при $\varepsilon\to 0$. С такой же точностью вычисляется затем период решения Z_ε. Оказывается, что

$$T_\varepsilon=T_0+\Omega_1\varepsilon^{\frac{2}{3}}+\Omega_2\varepsilon\ln\varepsilon+O(\varepsilon).$$

Для величин Ω_1 и Ω_2 найдены эффективные формулы.

8030. Расщепление уравнений движения демпфированной линейной динамической системы. Фосс (Co-ordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems. Foss K. A.), J. Appl. Mech., 1958, 25, № 3, 361—364 (англ.)

Уравнения движения линейной динамической системы с трением записываются в следующем виде:

$$[m_{ij}]\{\ddot{q}_i\}+[r_{ij}]\{\dot{q}_j\}+[k_{ij}]\{q_j\}=\{f_i\};\ i,j=1,\ldots,N, \quad (1)$$

где $[m_{ij}]$ — матрица масс, $[r_{ij}]$ — матрица коэффициентов трения, $[k_{ij}]$ — матрица коэффициентов упругости. Предлагается метод введения для систем (1) координат, аналогичных нормальным координатам для систем без трения. Для этой цели вводится матрица-столбец $\{\Phi\}$ порядка $(2N,1)$ и число α, определяемые соотношением

$$[u]\{\Phi\}=\frac{1}{\alpha}\{\Phi\}. \quad (2)$$

В (2) матрица $[u]$ дается соотношением

$$[u]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ -[k_{ij}][m_{ij}] & -[k_{ij}]^{-1}[r_{il}]\end{bmatrix}. \quad (3)$$

Уравнению (2) в общем случае удовлетворяют $2N$ матриц $\{\Phi^{(m)}\}$ и чисел α_m, причем оказывается справедливым следующее соотношение ортогональности:

$$\{\Phi^{(m)}\}^T\begin{bmatrix}0 & [m_{ij}]\\ [m_{ij}] & [r_{ij}]\end{bmatrix}\{\Phi^{(n)}\}=0, \quad (4)$$

где $\{\Phi^{(m)}\}^T$ — матрица, транспонированная к $\{\Phi^{(m)}\}$. С помощью матриц $\{\Phi^{(m)}\}$ решение системы (1) дается сразу формулой:

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}_i\\ q_i\end{Bmatrix}=\sum_n\frac{\{\Phi^{(n)}\}}{R_n}\int_0^t e^{\alpha_n(t-\tau)}F_n(\tau)\,d\tau, \quad (5)$$

где

$$R_n=\{\Phi^{(n)}\}^T\begin{bmatrix}0 & [m_{ij}]\\ [m_{ij}] & [r_{ij}]\end{bmatrix}\{\Phi^{(n)}\};$$

$$F_n(t)=\{\Phi^{(n)}\}^T\begin{Bmatrix}0\\ \{f_i\}\end{Bmatrix}.$$

Указывается, что вышеизложенный прием использовался при определении динамических напряжений в некоторых упругих системах (Bisplinghoff R. L., Isakson G, Pian T. H. H., j. Aeronaut. Sci., 1950, 17, 259). Аналогичный прием развивается автором для систем вида

$$[a_{ij}]\{\dddot{q}_j\}+[b_{ij}]\{\ddot{q}_j\}+[c_{ij}]\{\dot{q}_j\}+[d_{ij}]\{\dot{q}_j\}+[l_{ij}]\{q_j\}=\{q_l\},$$

встречающихся в некоторых задачах аэроупругости, а также для некоторых систем с бесконечным числом степеней свободы. И. И. Ворович

8031. Возмущения дифференциальных операторов. **Креймер** (Perturbation of differential operators. Kramer Henry P.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 3, 1405—1435 (англ.)

Оператор T, действующий в некотором банаховом пространстве X, называется спектральным (Dunford N., Pacif. J. Math., 1952, 2, 559—614), если на борелевских множествах комплексной плоскости Z определена операторная функция множеств $E(e)$ — его спектральная мера — с равномерно по e ограниченной нормой, обладающая следующими свойствами: 1) $E(e_1)E(e_2) = E(e_1 \cap e_2)$, $E(Z \setminus e) = I - E(e)$, $TE(e) = E(e)T$; 2) при каждом $f \in X$ $E(e)f$ вполне аддитивна по e; 3) спектр оператора T, рассматриваемого на $E(e)X$, содержится в замыкании e. Оператор называется регулярным, если при некотором λ его резольвента существует и является вполне непрерывным оператором. Таким образом, для спектрального регулярного оператора мера $E(e)$ сосредоточена на не более чем счетном множестве точек $\lambda_n \to \infty$ — спектре оператора T.

В первой части работы автор для случая гильбертова пространства X показывает, что если T — спектральный регулярный оператор, удовлетворяющий некоторым дополнительным требованиям, а S — в определенном смысле подчиненный ему оператор, то $T + S$ также будет спектральным и регулярным. Если λ_k — собственные числа $T + S$, а $E(e)$ — его спектральная мера, то при некоторых дополнительных ограничениях на S можно писать разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} E(\lambda_k) f \quad (f \in X). \qquad (1)$$

В дальнейшем на основании упомянутых рассмотрений доказывается следующий общий факт:

Пусть T — оператор в $L_2(0,1)$, порожденный обычным образом дифференциальным выражением $\dfrac{d^{2\mu} f}{dx^{2\mu}}$ и граничными условиями

$$f^{(k_i)}(0) + \sum_{j=0}^{k_i - 1} \alpha_{ij} f^{(j)}(0) = 0,$$

$$f^{(l_i)}(1) + \sum_{j=0}^{l_i - 1} \alpha_{ij} f^{(j)}(1) = 0$$

$(i = 1, \ldots, \mu;\ k_1 > k_2 > \ldots > k_\mu;\ l_1 > l_2 > \ldots > l_\mu)$.

Если S — произвольный замкнутый оператор, область определения которого состоит из $2\mu - 2$ раза дифференцируемых функций f, причем $f^{(2\mu-2)}(x) \in L_2(0,1)$, то $T + S$ — спектральный регулярный оператор и для него справедливо разложение (1). В частности, в качестве S может быть взят, например, оператор, порожденный произвольным линейным дифференциальным выражением $(2\mu - 2)$-го порядка. Ю. М. Березанский

8032 К. Три лекции по обыкновенному дифференциальному уравнению. Пособие для заочников. Азимов М. А. (Ади дифференсиал тэнликлэрдэн уч мухазирэ. Эзимов М. Э. Азэрб. дювлэт гияби пед. инст. Бакы, 1958, 47 сэһ., шэкилли, пулсуз) (азерб.)

8033 К. Приложения дифференциальных уравнений. **Спигел** (Applied differential equations. Spiegel Murray R., Englewood Cliffs, N. J., Prentice—Hall, Inc., 1958, xvi, 381 pp., ill.) (англ.)

Книга представляет собой учебное пособие для студентов инженерных и естественных специальностей американских высших учебных заведений и включает материал по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными. Теория носит элементарный характер и строится главным образом на основе наводящих иллюстративных примеров. Большое внимание уделено применению дифференциальных уравнений к практическим вопросам. В тексте рассмотрены многочисленные примеры из геометрии, механики, физики, химии, астрономии и др. Книга снабжена большим количеством тщательно подобранных задач для самостоятельной работы. Упражнения разбиты на три группы: А) легкие упражнения для тренировки; Б) упражнения повышенной трудности; В) дополнения к тексту. На часть задач даны ответы.

Приводим распределение материала по главам: I. Дифференциальные уравнения в общем (стр. 1—24). II. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка и простейшие высших порядков (стр. 25—58). III. Приложения дифференциальных уравнений первого порядка и простейших высшего порядков (стр. 59—141). IV. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (стр. 142 — 182). V. Приложения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (стр. 183—216). VI. Совместные дифференциальные уравнения и их приложения (стр. 217—248). VII. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов (стр. 249—277). VIII. Численное решение дифференциальных уравнений (стр. 278—288). IX. Уравнения с частными производными (289—304). X. Решение граничных задач и ряды Фурье (стр. 305—340). Библиография (стр. 341—342). Б. П. Демидович

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа*, *Н. И. Мозжерова*

8034. О корректной задаче Коши для линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Крейсс (Über sachgemässe Cauchyprobleme für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. Kreiss Heinz-Otto. Kungl. tekn. högskolans handl., 1958, № 127, 30 S., ill.) (нем.)

Рассматривается система уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^{m} P_\nu\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = P\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t), \qquad (1)$$

где $(x,\ t) = \{x_1, \ldots, x_s, t\}$ — точка действительного $s+1$-мерного пространства; $u(x,t)$ — искомая матрица-столбец высоты n;

$$P_\nu\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\Sigma \nu_i = \nu} A_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(t) \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_s^{\nu_s}}; \quad A_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(t)$$

—квадратная матрица порядка n. Функция $u(x,t)$ называется решением системы (1) в интервале $(0,T)$, если для каждого фиксированного $t \in (0,T)$ $\alpha)$ $u(x,t)$ и все ее производные, входящие в (1), существуют в сильном смысле и принадлежат гильбертову пространству $\mathfrak{M}$, состоящему из всех квадратично интегрируемых во всем пространстве $R_s\{x_1,\ldots,x_s\}$ функций,

$$\beta) \qquad \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_\nu P_\nu\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \right\| = 0$$

для каждого фиксированного $t \in (0,T)$. Задачу Коши автор называет корректной, если существуют натуральное число $l \geqslant 0$ и постоянная K такие, что а) каждая функция $f(x)$, производные от которой порядка $\leqslant l$ существуют и $\in \mathfrak{M}$ и каждое значение $t = t_1 \in (0,T)$, определяет единственное решение $u(x,t)$ системы (1) в интервале (t_1, T) с начальными данными $u(x, t_1) = f(x)$; б) для этого решения справедливо неравенство $\|u(x,t_2)\| \leqslant K \|u(x,t_1)\|$ при всех $t_2 \in (t_1, T)$. Выведен необходимый и достаточный алгебраический критерий

корректности задачи Коши для системы (1) с постоянными коэффициентами. Показано, что при некоторых требованиях относительно гладкости коэффициентов, этот критерий остается в силе и для системы с переменными коэффициентами. Выведен абстрактный критерий корректности задачи Коши. Введенные определение и критерии корректности задачи Коши автор сравнивает с определением и критериями корректности Адамара (Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale, 1921) и Петровского (Матем. сб., 1937, **44**, 814—868; Бюл. МГУ, 1938, 7, 1—74).
Замеченная опечатка: в (1,6) справа вместо $\partial v/\partial t$ должно быть $\partial v/\partial x$. В. Э. Аболиня

8035. Локальные и общие свойства фундаментальных решений. Хёрмандер (Local and global properties of fundamental solutions. Hörmander Lars), Math. scand., 1957, **5**, № 1, 27—39 (англ.)

Обозначения и определения: L^2_{loc} (L^2_c)—пространство локально интегрируемых в квадрате функций (с компактным носителем); $P(D) = P\left(i^{-1}\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, i^{-1}\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$— дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами; $\widetilde{P}(\xi) = \left(\sum |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{1/2}$, где суммирование производится по производным всех порядков.

Говорят, что оператор $Q(D)$ слабее оператора $P(D)$ в смысле Хёрмандера, если $\widetilde{Q}(\xi)/\widetilde{P}(\xi) < C$ при действительных ξ.

Фундаментальным решением E оператора $P(D)$ называется распределение E такое, что $P(D)E = \delta_0$. Говорят, что фундаментальное решение E „малого экспоненциального роста", если $E/\cosh(\varepsilon(x^2+1)^{1/2})$ ограничено, где ε может быть взято произвольно малым.

Мальгранж показал существование фундаментального решения „малого экспоненциального роста" такого, что $E * L^2_c \subset L^2_{loc}$.

В настоящей статье доказано, что каждый дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение E „малого экспоненциального роста" и такого, что

$$Q(D)(E * L^2_c) \subset L^2_{loc} \qquad (1)$$

для любого дифференциального оператора $Q(D)$, более слабого, чем $P(D)$. Такое фундаментальное решение автор называет собственным (proper). Обратно, доказано, что (1) не имеет места для любого фундаментального решения E оператора $P(D)$, если $Q(D)$ не слабее $P(D)$.

Далее приводится пример, доказывающий несуществование собственных ограниченных фундаментальных решений, что показывает, что требованию естественных локальных свойств фундаментального решения не всегда можно удовлетворить в классе ограниченных распределений.

В работе доказано, что необходимым и достаточным условием существования фундаментального решения в L^2_{loc} является условие

$$\int \frac{d\xi}{\widetilde{P}(\xi)} < \infty. \qquad (2)$$

Если (2) имеет место, то всякое собственное фундаментальное решение принадлежит L^2_{loc}. Автору неизвестно условие существования решения в L^1_{loc}. Конструкция фундаментального решения является модификацией конструкции Мальгранжа (Ann. Inst. Fourier, 1955—56, 6, 271—355). Доказательства носят элементарный характер. А. Л. Крылов

8036. Исследование задачи Дирихле—Неймана для операторов метагармонического, волнового и диффузии методом собственных функций. Второе сообщение. Гарнир, Гобер (Le problème de Dirichlet—Neumann pour les opérateurs métaharmonique, des ondes et de la diffusion par la méthoden des fonctions propres. Seconde Communication). Garnir H. G., Gobert J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, **27**, № 1-2, 17—27 (франц.)

Первое сообщение см. РЖМат, 1958, 6739.

В работе изучается краевая задача с данными $u|_s = 0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = 0$, понимаемыми в обобщенном смысле для оператора

$$\Box_{abc} = -\Delta + a\partial_t^2 + b\partial_t + c.$$

Когда $|a| + |b| > 0$, приходится задавать еще соответствующие начальные условия. Так же как и в книге (реф. 6843 К), решения уравнения

$$\Box_{abc} u = m$$

автор рассматривает как обобщенные функции времени, определенные на финитных функциях $\varphi \in C^\infty$, причем $u_\varphi = (u(x,t), \varphi(t))$ принадлежит L_2 вместе с $\frac{\partial}{\partial x_i} u_\varphi$ и Δu_φ и, кроме того, удовлетворяет некоторому интегральному соотношению. Сначала доказывается единственность решения задачи в такой постановке, затем с помощью метода Фурье доказывается существование решения.

Нахождение решения эквивалентно нахождению u_φ для любой φ рассматриваемого класса.

Пусть

$$e_k(t) = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4a(c - z_k)}} e^{-\frac{bt}{2a}} sh\frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-z_k)}}{2a}t,$$

$a > 0$, и $\quad e_k(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t(c-z_k)}{b}}$,

где z_k — собственное число соответствующей краевой задачи оператора Лапласа, и

$$\Lambda_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} e_k(t)\varphi(t)\,dt.$$

Сопоставим любой $f \in L_2$

$$G_\varphi f = \sum_1^{+\infty} \Lambda_k(\varphi)(f, u_k) u_k$$

и

$$G_\varphi * f_t = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \int_0^{+\infty} \Lambda_k(\varphi(t+\tau))(f_\tau, u_k)\,d\tau,$$

тогда выражение

$$G_\varphi[au_1 + bu_0] + G_{-\partial_t\varphi} au_0 + G_\varphi * m_t;$$

$(u|_{t=0} = u_0;\ u_t|_{t=0} = u_1)$ определено и дает искомое решение смешанной задачи

Большая часть работы посвящена исследованию свойств оператора G_φ. В. М. Бабич

8037. Решение задачи Дирихле—Нёймана для операторов метагармонического, волнового и диффузии методом собственных функций (3-е сообщение). Гарнир, Гобер (Le problème de Dirichlet—Neumann pour les opérateurs métaharmonique, des ondes et de la diffusion par la méthode des fonctions propres. 3-e communication). Garnir H. G., Gobert J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, **27**, № 5-6, 119—127 (франц.)

Продолжено начатое во второй части работы (реф. 6811 рассмотрение следующей задачи (задачи Дирихле-Нёймана) для оператора диффузии $-\Delta + b\partial_t + c$ $(b > 0)$: найти распределение u_φ в $L_2(\Omega)$, обращающееся в нуль на-

$(-\infty, 0)$ вместе с производными $\partial_{x_1} u_\varphi, \ldots, \partial_{x_m} u_\varphi$ и Δu_φ такое, что u_φ удовлетворяет условию Дирихле—Нёймана

$$u_{-b\partial_t\varphi+c_\varphi} - \Delta u_\varphi = \int_0^\infty m(x,t)\varphi(t)dt + bu_0\varphi(0)$$

для каждой функции $\varphi(t)$ пространства $D(E_1)$ Л. Шварца. Здесь u_0 — заданная функция из $L_2(\Omega)$, а $m(x,t) = m_t$ — заданная функция в $\Omega\times(-\infty,\infty)$, равная нулю в $\Omega\times(-\infty,0)$ и принадлежащая $L_2(\Omega\times(0,T))$ для каждого $T\in(0,\infty)$. При этом $\|m_t\|$ локально квадратично суммируема по $(0,\infty)$, $\int_0^\infty m_t\varphi(t)\,dt$ есть распределение в $L_2(\Omega)$, равное нулю левее нуля и $\left(\int_0^\infty m_t\varphi(t)\,dt, f\right) = \int_0^\infty (m_t, f)\varphi(t)\,dt$ для любых $f\in L_2(\Omega)$ и $\varphi(t)\in D(E_1)$.

Изучив свойства обобщенного оператора Грина, построенного в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа (коэффициенты этого ряда суть некоторые определенные распределения), авторы строят во второй части работы такое обобщенное решение (это построение производится одновременно с построением обобщенного решения такой же задачи для волнового оператора) и доказывают его единственность.

В реферируемой третьей части работы показано, что это решение является физическим решением, т. е. u_φ есть распределение типа функции: $u_\varphi = \int_0^\infty u(x,t)\varphi(t)dt$, причем $u(x,t) = bT_t u_0 + T_t * m_t$, где

$$T_t(f) = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{\infty}(f,u_k)e^{\frac{z_k-c}{b}t}u_k \quad (f\in L_2(\Omega)),$$

$$T_t * m_t = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\int_0^t(m_\tau, u_k)e^{\frac{z_k-c}{b}(t-\tau)}d\tau,$$

z_k, u_k — соответственно собственные значения и собственные функции оператора Лапласа (область Ω такова, что собственные функции u_k образуют полную ортонормированную систему, а собственные значения — последовательность, сходящуюся к $-\infty$). Далее исследуется вопрос о том, в какой мере функция $T_t u$ может рассматриваться как решение некоторой задачи Дирихле—Нёймана для оператора диффузии, если не обращаться к распределениям. Доказывается, что функция $bT_t f$ является единственным решением следующей задачи: найти такую функцию u_t, дифференцируемую по крайней мере один раз по $t\in(0,\infty)$ в $L_2(\Omega)$, что для каждого $t\in(0,\infty)$ она удовлетворяет условию Дирихле—Нёймана, $(-\Delta + b\partial_t + c)u_t = 0$ и $u_t \to f$ в $L_2(\Omega)$ при $t\to 0$. Отмечается, что для функции $T_t * m_t$ такого рода утверждение без дополнительных ограничений несправедливо. И. В. Гельман

8038. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений. Вишик, Ладыженская (Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations. Višik M. I., Ladyženskaya O. A.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, **10**, 223—281 (англ.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1958, 328.

8039. Об области регулярности обобщенного осесимметрического потенциала. Хенрич (On the domain of regularity of generalized axially symmetric potentials. Henrici Peter), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 29—31 (англ.)

Из работы Макки (J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, 733—750) известно, что каждое действительное аналитическое по переменным x и y решение $u(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ,\quad 2\nu\neq 0,-1,-2,\ldots, \qquad (1)$$

определенное в области, содержащей внутри себя отрезок линии сингулярности $y=0$, единственным образом определяется значениями решения при $y=0$, т. е. функцией $g(x) = u(x,0)$.

В заметке исследуется вопрос: как область аналитичности функции $g(z)$, представляющей собой аналитическое продолжение функции $g(x)$ на комплексные значения, определяет область регулярности решения $u(x,y)$. Упоминается, что результаты И. Н. Векуа в теории эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами подсказали следующее утверждение.

Пусть $g(z)$ голоморфна в односвязной области η, тогда существует единственное решение $u(x,y)$ уравнения (1) $(2\nu\neq 0,-1,-2,\ldots)$, которое удовлетворяет условию: $u(z,0) = g(z)$ при $z\in\eta$.

При этом $u(x,y)$ — действительная аналитическая функция своих аргументов в области $D(\eta)$ всех комплексных точек (x,y), для которых $x+iy\in\eta$ и $x-iy\in\eta$.

Доказательство сводится к выбору комплексных путей интегрирования в интегральных представлениях, рассмотренных ранее автором (РЖМат, 1955, 236) и Макки (цит. выше).

Далее в заметке формулируется утверждение, которое является распространением на невыпуклые области теоремы из цитированной работы Хенрича.

Пусть при $Re\nu>0$ действительное аналитическое решение $u(x,y)$ уравнения (1) определено в простой связной области $D(\eta_1)$, которая симметрична относительно оси $y=0$.

Тогда функция $g(x) = u(x,0)$ может быть аналитически продолжена в функцию $g(z)$, голоморфную в η.

Доказательство основано на результате Сегё, установившего взаимную регулярность решения $u(x,y)$ в точке (x,y) и функции $g(z)$ в точке $z = x+iy$.

Отображение $u(x,y) = \Theta|g(z)|$ непрерывно в следующем смысле. Для любого $\varepsilon>0$ и каждой замкнутой подобласти $\overline{\eta_1}$ из η существует δ такое, что $|\Theta|g(z)|| < \varepsilon$ в $D(\overline{\eta_1})$ лишь только $|g(z)|<\delta$ при $z\in\eta$.

Доказательство основано на теореме Рунге, согласно которой $u(x,y)$ в каждой $D(\overline{\eta_1})$ может быть равномерно приближено линейной комбинацией функций $\Theta(z^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, которые могут быть выражены через ультрасферические полиномы.

В заключение сделано замечание для несколько более общего, чем (1), уравнения. Библ. 7 назв. Ю.П. Кривенков

8040. Новое доказательство теорем существования решения регулярных краевых задач для линейных уравнений с частными производными эллиптического типа. Петтинео (Nuova dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi al contorno regolari relativi alle equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico. Pettineo Benedetto), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **23**, № 1-2, 32—38 (итал.)

Рассматриваются первая и вторая краевые задачи для эллиптического уравнения

$$\sum\nolimits_{h,k} a_{hk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum\nolimits_h b_h\frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f(x)$$

в конечной области. Теоремы существования решений при соответствующих предположениях гладкости приведены в известной монографии Миранды („Уравнения с частными производными", Изд-во Ин. лит., М., 1957), где доказательство основано на применении фундаментальных решений. Опираясь на ряд результатов, содержащихся в этой монографии, автор дает другой вывод теорем существования. Здесь реше-

ние первой краевой задачи ищется в виде суммы объемного потенциала и потенциала двойного слоя с явно и сравнительно просто строящимися ядрами. Для плотностей этих потенциалов получается система интегральных уравнений типа Фредгольма и в случае единственности решения соответствующей однородной краевой задачи показывается, что эта система разрешима. Если единственности нет, то получается условие разрешимости, имеющее обычный характер ортогональности. Решение второй краевой задачи строится аналогично. В первом случае альтернативы Фредгольма этот метод можно применить для построения фундаментальных решений и функции Грина. А. Д. Мышкис

8041. О главной частоте мембраны. Нехари (On the principal frequency of a membrane. Nehari Zeev), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 2, 285—293 (англ.)

Теорема Релея, утверждающая, что однородная круговая мембрана имеет наинизшую главную частоту среди всех однородных мембран той же массы, обобщается на случай неоднородных мембран, при определенных ограничениях на распределение плотности.

Устанавливаются следующие теоремы, в первой и второй из которых мембрана, покрывающая односвязную область D в xy-плоскости, предполагается закрепленной вдоль ее кусочно-гладкой границы C.

Теорема 1. Если λ есть главная частота мембраны данной массы, распределение плотности $p(x,y)$ которой таково, что $\log p(x,y)$ является субгармонической функцией, то $\lambda \geqslant \lambda_0$, где λ_0 есть главная частота однородной круговой мембраны той же массы.

Теорема 2. Если λ есть главная частота круговой мембраны данной массы, распределение плотности $p(x,y)$ которой является супергармонической функцией, то $\lambda \leqslant \lambda_0$, где λ есть главная частота однородной круговой мембраны той же массы.

Теорема 3. Пусть α — аналитическая часть C, вогнутая относительно D. Если Λ обозначает главную частоту однородной мембраны, граница которой свободна вдоль α и закреплена вдоль $C-\alpha$, то $\Lambda \geqslant \Lambda_0$, где Λ_0 есть главная частота однородной полукруговой мембраны равной массы, граница которой свободна вдоль диаметра и закреплена вдоль полуокружности.

О. В. Гусева

8042. Достаточные условия разложимости функции в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье. Ильин В. А., Матем. сб., 1958, 46, № 1, 3—26

Статья состоит из двух глав. В первой доказывается теорема: Если функция f задана в N-мерной области g, ограниченной поверхностью Ляпунова, и имеет вид

$$f = r_{PQ}^{\varepsilon} + v(Q), \quad \varepsilon > 0,$$

или

$$f = r_{PQ}^{2m} \ln r_{PQ} + v(Q), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

то f разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся (во всей замкнутой области) ряд Фурье по собственным функциям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ этой области, если: 1) $v \in W_2^{[N/2]+1}(g)$, 2) $f, \Delta f, \ldots, \Delta^k f$ ($k = [N/4]$ для первой краевой задачи, $k = [(N-2)/4]$ для второй и третьей) в обобщенном смысле удовлетворяет краевым условиям. В этой же главе показывается абсолютная расходимость в каждой точке N-мерного параллелепипеда ряда Фурье для любой функции, обладающей логарифмической особенностью (случай первой краевой задачи). Отсюда следует невозможность существенного усиления сформулированной теоремы.

Во второй главе вводится определение: любую из функций $f_1, \ldots, f_N$ назовем истокообразно представимой в области g при помощи ядра уравнения Лапласа, если

$$f_k(Q) = \int_{C^k} K_{\alpha_k}(Q, S)\, h_k(S)\, dS \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$f_N(Q) = \int_g K_{\alpha_N}(Q, \sigma)\, h_N(\sigma)\, d\sigma,$$

где C^k — k-мерное многообразие, K_{α_k} — любое из ядер дробного порядка (РЖМат, 1959, 2680), интегрируемое с квадратом вдоль C^k (или g), $h_k(S)$ — ограниченная функция (при $k = N$ можно ограничиться требованием квадратичной в g интегрируемости h_N).

Доказано, что любая истокообразно представимая функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям. В конце работы более подробно рассмотрен случай двумерной области. В. М. Бабич

8043. О решении одной задачи Неймана для прямоугольной области Рейна (Sulla soluzione di un problema di Neumann relativo a un dominio rettangolare. Riena Ida), Rend. hat. e applic., 1956, 15, № 3—4, 366—384 (итал.)

В прямоугольнике на плоскости (x, y) рассматривается задача Неймана для уравнения $\Delta u + K^2 u = 0$ (K — постоянная). Доказывается существование решения этой задачи в предположении, что K^2 не является собственным значением задачи и что на границе прямоугольника функция $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(p)$ удовлетворяет условию Гельдера и имеет ограниченную вариацию. Т. Д. Вентцель

8044. Об асимптотических свойствах спектральной функции, относящейся к самосопряженному полуограниченному расширению эллиптического дифференциального оператора. Гординг (On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self—adjoint semibounded extension of an elliptic differential operator. Gårding Lars. Kungl. Fysiog. Sällsk. i Lund Förh., 1954 (1955), 24, № 21, 18 pp. (англ.)

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $a = a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $D^\alpha = i^{-|\alpha|} \times (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, а коэффициенты — достаточно гладкие функции, определенные на открытом множестве S в R^n. Предполагается, что полином $\hat{a}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0$ для $x \in S$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$. Пусть, далее, $C^k(S)$ будет множество k раз дифференцируемых комплексных функций на S, $C_0^k(S)$ — подмножество функций с компактным несущим множеством и пусть $H = H(S)$ — гильбертово пространство $L_2(S)$. Предполагается, что a, рассматриваемое как оператор на $C_0^m(S)$ в $H(S)$, имеет самосопряженное расширение A, которое ограничено снизу нижней границей $\mu(A)$. Для этого требуется, чтобы $\hat{a}(x, \xi)$ был положительно определенным полиномом и чтобы m было четным. Наконец, вводится оператор $\hat{a}_z(D) = \hat{a}(z, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(z) D_x^\alpha$, где z — фиксированная точка в S. Рассматриваемый как оператор на $C_0^m(S)$ в $H(R^n)$, он имеет самосопряженное замыкание $\hat{A}_z$.

Пусть $E(\lambda)$ — множество проекций в спектральном разложении A, так что $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Автор доказывает, что для каждого λ существует ядро Карлемана $e(\lambda, x, y)$ такое, что $[E(\lambda)f](y) = \int e(\lambda, x, y) f(x)\, dx$ для почти всех y, когда $f \in H$. Здесь ядро есть функция Бореля на $R \times S \times S$, непрерывное на $S \times S$ для фиксированного λ и равное нулю для $\lambda < \mu(A)$. Кроме того, оно является эрмитианом и его полная вариация над ограниченными

λ-интервалами ограничена на компактном подмножестве $S\times S$. Примененная к оператору $\hat{A}_z$ эта теорема дает аналогичное представление для $[E_z(\lambda)f](y)$ через ядро $\hat{e}_z(\lambda; x-y)$, где

$$e_z(\lambda; u) = (2\pi)^{-n}\int_\Delta e^{-iu\xi}\,d\xi,$$

$$u\xi = \sum_1^n u_k\xi_k \text{ и } \Delta = [\xi;\ \hat{a}(x,\xi) < \lambda].$$

Здесь $\hat{e}_z(\lambda; u) = 0(\lambda(n-1)/m)$ для $u \neq 0$. Фундаментальная теорема автора утверждает, что $e(\lambda, x, y) = \hat{e}_x(\lambda; x-y) + o(\lambda^{n/m})$ при $\lambda \to \infty$ равномерно на компактном подмножестве $S\times S$. Это может рассматриваться как объединение различных специальных результатов, принадлежащих Карлеману (Carleman), Плейелю (A. Pleyel), Минакшисундараму (Minakshisundaram), Браудеру (Browder) и автору, касающихся асимптотического поведения собственных функций вибрационных задач. Если a имеет постоянные коэффициенты, то можно доказать более тонкий результат. Пусть A_0 — самосопряженное замыкание a, рассматриваемое как оператор на $C_0^m(R^n)$ в $H(R^n)$; пусть $\sigma(\lambda)$ — функция ограниченной вариации и множество

$$I^k\sigma(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^{1-k}[\Gamma(k)]^{-1}\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\mu)^{k-1}\,d\sigma(\mu).$$

Тогда, если $n > 1$, $k \geqslant 1$, $\lambda_0 < \min[\mu(A),\ \mu(A_0)]$, имеем

$$I^k e(\lambda, x, y) = I^k e_0(\lambda, x-y) + O[\lambda^{(n-k)/m}]$$

равномерно на компактном подмножестве $S\times S$. Здесь $e_0(\lambda; u) = (2\pi)^{-n}\int e^{-iu\xi}\,d\xi$, интеграл, взятый над $\lambda > a(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \xi_n^{\alpha_n}$, есть спектральная функция A_0. Если $k = 1$, то можно заменить e_0 его „главной частью“ $\hat{e}_0$, но для $k > 1$ это, вообще говоря, невозможно. Для $k \geqslant n-1$ это есть некоторое улучшение результата Б. М. Левитана (РЖМат, 1956, 440).

Доказательство первых двух теорем неявно содержится в более ранних работах автора (см. РЖМат, 1957, 3153). Основной метод есть классическая тауберова теорема для преобразования Стилтьеса. В случае третьей теоремы показывается, что преобразование Лапласа—Стилтьеса от $e(\lambda, x, y) - e_0(\lambda, x-y)$ есть

$$O[\exp(-ct^{-1/(m-1)})]$$

равномерно на компактных подмножествах $S\times S$, когда $t < 1$. Требуемый результат тогда следует из тауберовой теоремы, доказанной Ганелиусом (реф. 8146). Указываются различные обобщения. E. Hille

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 158—159.

8045. **О задаче разделения нулей собственных функций самосопряженного оператора второго порядка эллиптического типа. Омельченко О. К.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 184—190

Исследуются узловые линии собственных функций уравнения эллиптического типа:

$$\sum_{k,\,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + c(x_1, x_2)\,u = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты a_{kl} дважды непрерывно дифференцируемы в области определения уравнения (1), c непрерывно дифференцируемо и, сверх того, $c(x_1, x_2, \lambda) > 0$ при $\lambda \geqslant \lambda_1$ и монотонно возрастает по λ. Решения уравнения $u \in C^{(2)}$. Обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ уравнения (1). Пусть M_i означает некоторую замкнутую узловую линию собственной функции φ_i, ограничивающую область D_i.

Определение. Скажем, что M_j разделяет M_i, если концы кривой M_j лежат на M_i или M_j — замкнутая кривая, расположенная в D_i. Имеет место

Теорема 1. Узловые линии функции φ_k разделяют узловые линии функции φ_s, если $s < k$.

Для значения λ, которому соответствуют несколько собственных функций, справедлива

Теорема 2. Любые две собственные функции, соответствующие одному собственному значению λ, имеют взаимно разделяющиеся узловые линии. Доказательство теорем проводится на основании трех лемм, представляющих и самостоятельный интерес. Результаты работы справедливы для n аргументов. В. Я. Скоробогатько

8046. **Аналог второго метода Ляпунова в краевых задачах для нелинейных гиперболических уравнений. Волков Д. М.,** Докл. АН БССР, 1958, 2, № 8, 317—319

Пусть D — конечная область в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_m$, ограниченная поверхностью S; t — время $(0 \leqslant t < +\infty)$; $u(x, t)$ — решение нелинейного гиперболического уравнения, удовлетворяющее на S некоторым краевым условиям. Если для любого такого $u(x, t)$

$$\int_D \sum_{j_1 \ldots j_k = 1} \left|\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right|^2 dx_1 \ldots dx_m < f_k(t),$$

$$df_k(t)/dt \leqslant 0,$$

где $f_k(t)$ зависит только от значений $u(x, t)$ в любой малой окрестности t, то тогда говорится, что в данной задаче имеется устойчивость k-го порядка. Приводятся примеры нелинейных уравнений, для которых имеет место такого рода устойчивость. В. М. Бабич

8047. **Задача Гурса для уравнения $z''_{xy} = f(x,y)$ Белецкий, Кисынский** (Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation $z''_{xy}=f(x,y)$. Bielecki Adam, Kisyński Jan), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1956 (1958), **A10**, 99—126 (франц.; рез. польск., русск.)

Ищется решение уравнения $z''_{xy} = f(x,y)$ по заданным значениям $z(x,y)$ на двух кривых, лежащих внутри характеристического угла. При этом предполагается, что кривые пересекаются только в начале координат. Основное внимание авторы уделяют случаю, когда эти кривые соприкасаются в начале координат. Налагая на кривые дополнительные условия, авторы устанавливают разрешимость задачи. Е. И. Ким

8048. **Регулярность решений уравнений Монжа—Ампера. Бакельман И. Я.,** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 143—184

Выпуклая функция $z(x, y)$ называется обобщенным решением уравнения

$$rt - s^2 = f(x, y, z, p, q), \qquad (1)$$

если кривизна на любом борелевском множестве M выпуклой поверхности $z = z(x, y)$ равна

$$\iint_{\overline{M}} \frac{f(x, y, z, p, q)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\,dxdy$$

где интегрирование выполняется по проекции $\overline{M}$ множества M на плоскость xy.

Доказывается регулярность обобщенных решений уравнения (1) для случая регулярной правой части вида $f(x, y, z, p, q) = \varphi(x, y)R(p, q)$. Доказательство основано на получении априорных оценок для модуля регулярного решения уравнения (1) и его производных, которые позволяют решить задачу Дирихле для уравнения

1) в классе аналитических или регулярных функций. После этого регулярность обобщенных решений уравнения (1) в зависимости от дифференциальных свойств правой части следует из теоремы единственности в задаче Дирихле для обобщенных решений этого уравнения.

А. В. Погорелов

8049. Обобщение нелинейного дифференциального уравнения. $\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = 0$. **Ван-дер-Поль** (On a generalisation of the nonlinear differential equation. $\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = 0$. Vander Pol Balth), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 477—480; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 477—480 (англ.)

Рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon(1-u^2)\frac{\partial u}{\partial t} \quad (\varepsilon > 0), \qquad (1)$$

являющееся обобщением уравнения, указанного в заглавии, называемого уравнением Ван-дер-Поля. Уравнение (1) рассматривается в связи с некоторыми вопросами биологии (электрическая модель сердца, распространение возбуждения в нервном волокне и пр.).

Находится частное решение (1) в виде

$$u(x,\ t) = \psi(x - vt) \equiv \frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\frac{v}{1-v^2}(x-vt)}}},$$

где v — скорость распространения процесса. В заключение проводится обсуждение поведения решения при различных больших и малых значениях ε, а также делается ряд выводов, относящихся к биологии. В. М. Волосов

8050. Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа. Таймуразов Х. И., Уч. зап. Дагестанск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 2, 115—150

Рассматривается первая краевая задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными (x,y,t) в цилиндре конечных размеров $Q = \Omega \times [0,T]$. При условии, что T достаточно мало, цилиндр Q покрывается конечным числом областей, которые могут быть отображены на пирамиды. Для каждой из таких пирамид (в предположении ее малости) строится своя разностная схема, позволяющая найти решение задачи Коши для внутренних пирамид и краевой задачи для пограничных пирамид. Решение исследуемой задачи в Q „склеивается" из этих решений так, как это сделано в известной работе Шаудера и Кржижанского.

Примечание референта. Автор, по-видимому, незнаком с книгой референта (РЖМат, 1955, 3774 К) и другими работами по методу конечных разностей для уравнений и систем. Отметим, наконец, что автор незнаком и с более известными фактами, например с доказательством теорем единственности классического решения, задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических уравнений (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV; РЖМат, 1955, 3773 К). Он доказывает на стр. 142—150 весьма частный случай этой теоремы. О. А. Ладыженская

8051. Заметка о некотором решении телеграфного уравнения, применимом к сверхзвуковым течениям. Элрод (Note on a solution of the telegraphist's equation applicable to supersonic shear flow. Elrod Harold G., Jr.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 1, 66—68 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$g(x) = \int_0^x f(\xi)\, J_0\{\lambda(x-\xi)\}\, d\xi$$

с неизвестной функцией $f(\xi)$, где J_0 — бесселева функция, для нахождения решения которого применяется преобразование Лапласа. Полученное решение используется для представления решения уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} = -\lambda^2 v$$

при граничных условиях частного вида, имеющих значение в теории сверхзвуковых течений (Chang C. C., Werner Jack, J. Math. and Phys., 1952, **31**, 91—101).

Н. А. Бразма

8052. Задача Гурса в пространстве. Ван Гуаньинь (The Goursat problems in space. Wang Guang-ying), Sci. Rec., 1957, **1**, № 5, 283—286 (англ.)

В области D_1 ограниченной тремя поверхностями $x^2+y^2=(t+\varepsilon)^2$, $x^2+y^2=(t-1)^2$, $t=0$, где $0 \leqslant \varepsilon < 1$, рассматриваются задачи, поставленные Проттером для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(t,\ r,\ \Theta) \qquad (1)$$

с граничными условиями:

$$u(1-r,\ r,\ \Theta) = f(r,\ \Theta) \quad (1/2 \leqslant r \leqslant 1), \qquad (2)$$
$$u(0,\ r,\ \Theta) = \tau(r,\ \Theta) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

или с граничными условиями:

$$u(1-r,\ r,\ \Theta) = f(r,\ \Theta) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1), \qquad (2)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(0,\ r,\ \Theta) = \nu(r,\ \Theta) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1).$$

Заменяя граничные условия (2) условием

$$u(r-\varepsilon,\ r,\ \Theta) = \varphi(r,\ \Theta) \quad (\varepsilon \leqslant r \leqslant 1/2\,(1+\varepsilon)),$$

автор получает еще две граничные задачи.

В работе указывается существование решения этих задач, если $F(t,\ r,\ \Theta)$, $f(r,\ \Theta)$, $\tau(r,\ \Theta)$, $\nu(r,\ \Theta)$ и $\varphi(r,\ \Theta)$ являются тригонометрическими полиномами от Θ. Далее доказывается теорема единственности задач при предположении существования решения. Указывается также на доказательство теоремы единственности Проттером на основании неверного предположения. Е. И. Ким

8053. О зависимости решения уравнения типа телеграфного от начальных данных. Чекмарев Т. В., Уч. зап. Муромск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 43—54

Рассматривается непрерывная зависимость решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sigma(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

в зависимости от начальных данных при условии

$$0 \leqslant K \leqslant \sigma(x,\ t) \leqslant K' \leqslant 2K < \infty.$$

Решение уравнения (1) u и его производная $\partial u/\partial t$ оцениваются при $-\infty < x,\ t < \infty$ равномерно зависимости от равномерной оценки значений u, $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$ при $t = 0$ и $-\infty < x < \infty$.

Оценки получены посредством замены уравнения (1) с начальными условиями соответствующим интегральным уравнением. Для этой цели используется формула Грина и дано построение решения этого интегрального уравнения с помощью последовательных приближений.

Н. А. Бразма

8054. Периодические решения нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Проди (Soluzioni periodiche diequazioni a derivate paraziali di tipo iperbolico non lineari. Prodi Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **42**, 25—49 (итал.)

Отыскиваются решения уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + g(x, t, u_t) = f(x, t, u),$$

периодические по t с периодом 2π, обращающиеся в нуль на границе некоторой ограниченной области G в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$. По крайней мере одно такое решение существует, если функции g и f удовлетворяют следующим условиям:

1) $m \leqslant \dfrac{g(x, t, p_2) - g(x, t, p_1)}{p_2 - p_1} \leqslant M$, где m, M — положительные постоянные,

2) $g(x, t, 0) = 0$,

3) $f(x, t, u)$ измерима по x и t в области $U = G \times T$, где T — отрезок $0 \in t \leqslant 2\pi$, и непрерывна по u для почти всех $(x, t) \in U$; кроме того,

$$f(x, t, u) \leqslant \mu \mid u \mid + \psi(x, t), \qquad (1)$$

где μ — постоянная, а $\psi(x, t)$ — неотрицательная функция с интегрируемым квадратом.

Чтобы сформулировать последнее условие, надо ввести некоторые обозначения. Пусть σ^* — нижняя грань σ таких, что

$$f(x, t, u)\, u \leqslant \sigma u^2 + \varphi(x, t) \mid u \mid;$$

$\varphi(x, t) \geqslant 0$, с интегрируемым квадратом; Θ^* — нижняя грань Θ таких, что

$$\mid f(x, t, u) - r(x, u) \mid \leqslant \Theta \mid u \mid + \chi(x, t)$$

$\chi \geqslant 0$, с интегрируемым квадратом; $r(x, u)$ измерима по x, непрерывна по u и удовлетворяет неравенству типа (1); наконец, γ^* — нижняя грань γ таких, что

$$\mid g(x, t, u_t) - s(x)\, u_t \mid \leqslant \gamma \mid u_t \mid,$$

где функция $s(x)$ ограничена и измерима.

На функции f, g налагается условие

4) $m^2(\lambda_1 - \sigma^*) - m\,\Theta^*\gamma^* - \Theta^* > 0$;

Здесь λ_1 — наименьшее собственное значение для уравнения $\Delta u = -\lambda u$ в области G, а m — постоянная из условия 1). Т. Д. Вентцель

8055. **Свойства интегралов нормального параболического уравнения. Погожельский** (Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale. Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 61—92 (франц.)

Предельные задачи для нормального параболического уравнения. Погожельский (Problèmes aux limites pour l'équation parabolique normale. Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 110—126 (франц.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 4850). При указанных в предыдущей статье весьма малых ограничениях можно построить фундаментальное решение $\Gamma(A, t; B, \tau)$ параболического уравнения

$$L(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A, t)\, \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A, t)\, u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$A(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega + S$; $0 \leqslant t \leqslant T$, Ω — ограниченная область евклидова пространства n ($n \geqslant 2$) измерений, ограниченная замкнутой поверхностью S. S в дальнейшем предполагается поверхностью Ляпунова. Изучению подвергаются тепловые потенциалы, ядром которых является функция $\Gamma(A, t; B, \tau)$ и ее производные. Приведем полученные в работе результаты.

Теорема 1. Если плотность $\varphi(Q, \tau)$ является непрерывной функцией в области $Q \in S$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, то трансверсальная производная

$$\frac{\partial}{\partial T_P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \cos(N_P x_\beta)\, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

((N_P, x_β) — угол, который образует внутренняя нормаль к поверхности S в точке P с осью x_β) от теплового потенциала простого слоя

$$u(A, t) = \int_0^t \int\int_S \Gamma(A, t; Q, \tau)\, \varphi(Q, \tau)\, d\sigma_Q\, d\tau$$

во внутренней точке $A \in \Omega$ стремится равномерно к пределу

$$\lim_{A \to P} \frac{\partial u(A, t)}{\partial T_P} = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det \| a_{\alpha\beta} \|}}\, \varphi(P, t) + \int_0^t \int\int_S \frac{\partial}{\partial T_P}\, \Gamma(P, t; Q, \tau)\, \varphi \times (Q, \tau)\, d\sigma_Q\, d\tau; \quad P \in S;\ 0 < t \leqslant T. \qquad (2)$$

Теорема 2. Если $\varphi(Q, \tau)$ ограничена и интегрируема в замкнутой области $Q \in S$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, то тепловой потенциал простого слоя удовлетворяет в замкнутой области $\{A \in \Omega + S,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ условию Гёльдера по x с любым показателем θ, $0 < \theta < 1$, и по t с показателем $\theta/2$.

В заключение устанавливаются утверждения, аналогичные теореме 2, для второго слагаемого в правой части формулы (2) и объемного теплового потенциала. Результаты типа сформулированных выше хорошо известны, но автор строит фундаментальное решение и проводит все исследование при меньших, чем обычно, ограничениях, налагаемых на коэффициенты уравнения (1).

Во второй статье, используя фундаментальное решение (1), построенное автором (РЖМат, 1957, 4850), и свойства тепловых потенциалов, изложенные выше, изучаются некоторые краевые задачи для уравнения (1).

Первая часть работы посвящена решению линейной задачи

$$L(u) = 0;\ u|_{t=+0} = f(A);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T_P} + g(P, t)\, u + g_1(P, t) \right) = 0;\ (P, t) \in S \times (0T],$$

которая обычным путем сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода с квазирегулярным ядром. Во второй, основной, части работы рассматривается нелинейная краевая задача

$$L(u) = F(A, t, u), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T_P} = \Phi(P, t, u_P);\ P \in S \times (0, T], \qquad (4)$$

$$u|_{t=+0} = f(A). \qquad (5)$$

С помощью той же методики, которой аналогичная задача была решена автором для уравнения теплопроводности (РЖМат, 1957, 4852), устанавливается существование по крайней мере одного решения задачи (3), (4), (5) в предположениях о коэффициентах (1), позволяющих построить фундаментальное решение и следующих предположениях о нелинейностях: $F(A, t, u)$ определена в области $G\{A \in \Omega + S;\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ -\infty < u < \infty\}$, ограничена, непрерывна по совокупности переменных и

гёльдерова по A и u в G; $\Phi(P, t, u)$ определена, ограничена и непрерывна в области $P \in S$; $0 \leqslant t \leqslant \infty$, $-\infty < u < \infty$. С. Д. Эйдельман

8056. Свойства тангенциальных производных интегралов параболического уравнения. Погожельский (Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique. Pogorzelski W.), Ricerche mat., 1957, **6**, № 2, 162—194 (франц.)

Продолжается изучение свойств теплового потенциала простого слоя (реф. 8055). Изучается предел производной от этого потенциала по какому-либо касательному в точке P поверхности S направлению, когда внутренняя точка $A \to P$. Устанавливается:

Теорема 1. Если плотность $\varphi(Q, \tau)$ непрерывна и гёльдерова по Q, $Q \in S$, тогда производная теплового потенциала простого слоя в точке $A \in \Omega$ в направлении касательной P_{x_i} в произвольной точке P поверхности S стремится равномерно к пределу, определенному сингулярным интегралом

$$\lim_{A \to P} U'_{x_l}(A, t) =$$

$$= \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma'_{x_i}(P, t;\ Q, \tau)\, \varphi(Q, \tau)\, ds_Q\, d\tau, \qquad (1)$$

если $A \to P$ произвольным образом.

В предположениях теоремы 1 далее устанавливается, что предельные значения, определенные формулой (1), удовлетворяют условию Гёльдера по P и t. Доказательства используют конструкцию фундаментального решения и обычные оценки теории потенциала. С. Д. Эйдельман

8057. О решении некоторых дифференциальных уравнений путем разложений по собственным функциям. Чжоу Цзэ-сунь (On the solution of certain differential equations by characteristic function expansions. Chow Tse-sun), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 3, 227—235 (англ.)

Методом разделения переменных (Фурье) строится решение уравнения

$$p_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} + p_2(x)\, u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ и двумя краевыми условиями вида

$$\alpha_1 u(a, t) + \alpha_2 u(b, t) + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = f(t).$$

Дано явное решение этой же смешанной краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

в кольце $a < r < b$. И. М. Соболь

8058. Оценки решений уравнения с частными производными параболического типа, определенных в неограниченной области. Кшижанский (Evaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné. Krzyżański M.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 93—97 (франц.)

Используя свои предыдущие результаты (Studia math., 1949, **11**, 95—125), автор с помощью принципа максимума изучает некоторые свойства решений уравнения параболического типа

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\, u_{x_i x_j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k(X, t)\, u_{x_k} + c(X, t)\, u - u_t = f(X, t), \qquad (1)$$

определенных в цилиндре D, ограниченном поверхностью σ, которая не касается характеристик уравнения, и бесконечными областями S_0 и S_T, лежащими соответственно на гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Предполагается, что $a_{ij}(X, t)$, $b_k(X, t)$ непрерывны и ограничены в D, $c(X, t)$ непрерывно и ограничено сверху в D, $f(X, t)$ непрерывно. Вводится класс E_α функций $F(X, t)$, удовлетворяющих в D неравенству $|F(X, t)| \leqslant Me^{kr^\alpha}$, $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$.

Устанавливается, во-первых, единственность решения первой краевой задачи для (1) в классе E_2. Затем доказывается теорема: Пусть $c(X, t) \leqslant 0$, $f(X, t) \geqslant 0$ (или $f(X, t) \leqslant 0$) в D, $f(X, t) \in E_2$. Предполагается, что для любой непрерывной граничной функции разрешима первая краевая задача для произвольной области, представляющей собой пересечение области D с цилиндром $\{r \leqslant R,\ 0 < t < T\}$, $R > R_0$. Пусть $u(X, t)$—регулярное в D решение, принадлежащее E_2. Тогда, если $u(X, t) \leqslant M$ (соответственно $\geqslant -M$) на $\sigma + S_0$, то $u(X, t) \leqslant M$ ($u(X, t) \geqslant -M$) в $\bar{D}$. Приводится ряд следствий из этой теоремы, оценивающих решения через граничные значения и $f(X, t)$. Приведем одно из них: Если $|f(X, t)| \leqslant M_0 e^{kr}$; $u(X, t) \in E_2$; $|u(X, t)|_{\sigma + S_0} \leqslant Me^{kr}$, то $|u(X, t)| \leqslant (M + M_0 t) \exp\{k(r^2 + 1)^{1/2} + \nu(k)\, t\}$, где функция $\nu(k)$ определяется максимумом модулей коэффициентов уравнения. С. Д. Эйдельман

8059. Интегральные преобразования, связанные с теплопроводностью. Уиддер (Integral transforms related to heat conduction. Widder D. V.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **42**, 279—305 (англ.)

Рассматривается задача; найти достаточно гладкую функцию, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = g(t). \qquad (2)$$

Для решения задачи используется преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_0^\infty R(y, t)\, \varphi(y) dy = \int_0^\infty R(y, t)\, d\alpha(y)$$

с ядрами

$$R = R_1(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2/4t},$$

$$R = R_2(y, t) = \frac{y}{t} R_1(y, t),$$

$$R = R_3(y, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\sqrt{4t}}^\infty e^{-r^2} dr.$$

Составлена таблица для некоторых простейших оригиналов $\varphi(y)$ и $\alpha(y)$ и их изображений $f(t)$. Пусть известно, что решение $u(x, t) \in C^{(2)}$ уравнения (1). Имеет место теорема:

1) $f(x)$ и $g(t)$ аналитические для $\mathrm{Re}\, t > 0$.

2) Решение определено в области $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$.

3) $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = g(t)$.

Тогда справедливы утверждения

$$\text{A)}\ u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

B) $u(x_0, t)$, $-\infty < x_0 < \infty$, является аналитической для $\operatorname{Re} t \geqslant 0$.
C) $u(x, t_0)$, $0 < t_0 < \infty$, является целой.

Устанавливаются соотношения:

$$\text{A) } \frac{1}{2}\int_0^\infty [k(x-y, t) + k(x+y, t)]\, d\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos hx\sqrt{p}\cdot f(t).$$

$$\text{B) } \frac{1}{2}\int_0^\infty [k(x-y, t) - k(x+y, t)]\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Здесь $p = d/dt$.

Вводится также символический оператор

$$l^{x\sqrt{p}} f(t) = \cos h\sqrt{p}\cdot f(t) + \sin hx\sqrt{p}\, f(t).$$

Применение операторов

$$e^{x\sqrt{p}} f(t), \quad \cos hx\sqrt{p} f(t), \quad \sin hx\sqrt{p} f(t)$$

упрощает выкладки при решении сформулированной задачи (1, 2). В. Я. Скоробогатько

8060. О первой краевой задаче для линейных параболических уравнений. Пини (Sul primo problema di valori al contorno per le equazioni paraboliche lineari. Pini Bruno), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, 6, № 3-5, 215—237 (итал.)

Для уравнения

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\, u = 0 \quad . \quad (1)$$

рассматривается первая краевая задача в области D, ограниченной отрезками прямых $y = y_1$, $y = y_2$ и кривыми γ_1 и γ_2 с уравнениями $y = \chi_1(x)$ и $y = \chi_2(x)$ соответственно; на границе D задается непрерывная функция φ. Определяется обобщенное решение этой задачи, аналогичное обобщенному решению задачи Дирихле для эллиптического уравнения в смысле Винера. Точка P_0, лежащая на кривой γ_1 или γ_2, называется регулярной, если для любой непрерывной функции φ обобщенное решение $u(P)$ стремится к $\varphi(P_0)$ при $P \to P_0$; в противном случае она называется иррегулярной.

Устанавливается, что точки кривых γ_1 и γ_2 регулярны тогда и только тогда, когда они регулярны для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Доказывается, что необходимым и достаточным условием регулярности точки является существование барьера, т. е. такой функции $V_{P_0}(P)$ что $L(V) > 0$ в D, $V > 0$ в $D - P_0$ и $V_{P_0}(P_0) = 0$.

Т. Д. Вентцель

8061. О задаче Дирихле для линейных эллиптических уравнений в частных производных с двумя переменными. Пини (Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili. Pini Bruno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 177—200 (итал.)

Дано уравнение

$$L(u) = \sum_{0 < i+j \leqslant 2m} a_{ij}\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x, y), \quad (1)$$

причем уравнение $\sum_{i+j=2m} a_{ij}\lambda^i = 0$ имеет только комплексные корни. В области D, ограниченной замкнутой кривой $C: x = x(s)$, $y = y(s)$, ставится задача Дирихле для уравнения со следующими данными: $\frac{d^k u}{d\nu^k} = f_k(s)$, $k = 0, \ldots, m-1$. Автор стремится получить теорему существования решения этой задачи при минимальных предположениях относительно функций $f_k(s)$, не стараясь свести к минимуму требования на коэффициенты уравнения и кривую C. В случае, когда решение единственно, оно существует и принадлежит классу $C^{(m-1)}$ в D, если $f_k \in C^{(m-k-1)}$. В случае, когда $f_k \in C^{(m-k-2)}$, а $f_k^{(m-k-2)}$ абсолютно непрерывны для $k = 0, \ldots, m-2$ и $f_{m-1}(s)$ суммируемы, существует решение, удовлетворяющее граничным условиям в некотором обобщенном смысле. Эти утверждения доказаны для уравнения четвертого порядка с двойными корнями. Для уравнений порядка $2m$ доказано следующее утверждение: если $f_k \in C^{(m-k-1, \lambda)}$, то существует решение обычной задачи Дирихле (если выполнены условия единственности).

Т. Д. Вентцель

8062. Оценка решений эллиптических и параболических систем. Слободецкий Л. Н., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 3, 468—471

В статье введены пространства $W_{x^1, x^2, \ldots, x^r, p}^{l_1, l_2, \ldots, l_r}$, при $l_1 = l_2 = \ldots = l_r = l =$ целому неотрицательному числу, совпадающие с пространствами $W_p^{(l)}$ С. Л. Соболева.

Пусть теперь в области Ω n-мерного пространства задан эллиптический дифференциальный оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{r=1}^{2k} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_r)}(x)\frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} + A(x)\, u,$$

где $A^{i_1, \ldots, i_r}$ и A — квадратные матрицы порядка N и u — вектор-функция с N компонентами, и пусть, кроме того, u удовлетворяет однородным краевым условиям весьма общего типа, тогда

$$C_1 \| Lu \|_{W_p^{(l-2k)}(\Omega)} \leqslant \| u \|_{W_p^{(l)}} \leqslant C_2 [\| Lu \|_{W_p^{(l-2k)}} + \| u \|_{L_p}].$$

В случае, если u не удовлетворяет однородным краевым условиям, необходимо к крайним частям этого неравенства добавить дополнительные выражения. Аналогичные неравенства приводятся также для некоторых параболических систем. Доказательства отсутствуют.

В. М. Бабич

8063. Исследование одной задачи с косой производной при помощи системы уравнений Фредгольма. Данилюк И. И., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 2, 175—178

Ищутся решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lambda B(z)\, \bar{f} \quad (1)$$

в области $D + \Gamma$, удовлетворяющие на границе Γ граничному условию

$$\operatorname{Re}\left\{a(t)\frac{\partial f}{\partial l} + \lambda b(t) f\right\}|_{\Gamma = \gamma(t)} \quad (2)$$

$B_2(z) \in L_p$, $p > 2$; $a(t)$ и $b(t)$ непрерывно дифференцируемы, $\gamma(t)$ — H-непрерывна, λ — действительный параметр, $a(t) \neq 0$.

Задача (1), (2) сводится к системе трех интегральных уравнений типа Фредгольма от трех неизвестных функций:

$$\varphi + T_\lambda \varphi = \Phi, \quad (3)$$

где $T_\lambda \varphi$ — оператор, зависящий нелинейно от λ, а именно аналитически.

Пусть $\varkappa = {}^1/_2 \pi [\arg a(t)]$ — индекс задачи. В случае $\varkappa \geqslant 0$ правая часть содержит $2\varkappa + 3$ произвольных постоянных. Ввиду того, что $\leqslant \lambda = 0$ не является собствен-

ным значением уравнения (3), применяются результаты о дискретности спектра, когда ядро интегрального уравнения есть аналитическая функция параметра λ. В случае $\varkappa < 0$ строится система интегральных уравнений типа системы (3), решения которой удовлетворяют системе (1), но, вообще говоря, не удовлетворяют краевому условию (2). Решения соответствующей системы, когда λ не является точкой спектра, удовлетворяют условию (2) с функцией $\gamma(t)$, подправленной на некоторый определенный тригонометрический полином степени $\varkappa$.

В. С. Виноградов

8064. Замечание по доказательству существования решения задачи Коши для гиперболических систем. Кадзивара, Сибагаки (A note on an existence proof about the initial value problem for hyperbolic systems. Kajiwara Joji, Sibagaki Wasao), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1958, **A12**, № 1, 22—29 (англ.)

Доказана равностепенная непрерывность частных производных от последовательных приближений решения задачи Коши для системы уравнений $z_x = f(x, y, z)\, z_y + g(x, y, z)$, $z(0, y) = 0$. Основные предположения следующие: существует несингулярная матрица H такая, что $HfH^{-1} = F$, где F — диагональная матрица; функции f, f_x, f_y, f_z, H, H_x, H_y, H_z, F, F_x, F_y, F_z, g, g_y, g_z имеют общую верхнюю границу и являются равностепенно непрерывными в некоторой области. Из доказанного следует, что все задачи Коши из рассмотренного класса имеют единственное решение z и частные производные z_x и z_y являются равностепенно непрерывными в рассмотренной области.

В. Э. Аболиня

8065. Представление функций многих переменных с помощью плоских волн и решение задачи Коши для гиперболических систем. Игнатьева А. В., Вострецов Б. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 100—112

В статье дополнены результаты авторов, изложенные в работах Уч. зап. МГУ, 1957, **9**, вып. 186; РЖМат, 1958, 7748. Первая часть работы посвящена вопросам о возможности представления ограниченной непрерывной функции $f(x)$ (x — точка ограниченной области D m-мерного пространства R_m) в виде

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Sigma} \varphi_n(XP, P)\, d\sigma, \qquad (1)$$

где $\sum$—единичная сфера в R_m, $P \in \sum$, $XP = \sum_1^m x_i p_i$, $\varphi_n(z, P)$ — последовательность непрерывных при $|z| \leqslant d$ (d — диаметр D) функций; сходимость равномерна в любой области $\overline{D'} \subset D$. Функции φ_n можно выбрать так, что соотношение (1) можно дифференцировать нужное число раз. Во второй части работы представление (1) используется при решении задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(t) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\, u_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, r,$$

когда коэффициенты и начальные данные достаточно гладкие функции и уравнение $\left| \sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(t) p_k \right| - \lambda \left| E \right| = 0$, E — единичная матрица, имеет действительные и различные корни при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и $P \in \Sigma$. Представление (1) дает авторам возможность решение задачи Коши в m-мерном пространстве ($m > 2$) свести к задаче Коши на плоскости, которая решается методом последовательных приближений. При помощи рассмотренного метода выведены хорошо известные формулы Кирхгофа.

В статье очень много опечаток и неточностей: в уравнении (3) вместо $2n - 1$ должно быть $2m - 1$; вместо „имеющее при $t = 0$ нуль кратности $n - 1$“ (стр. 101) должно быть „..., ... нуль кратности $m - 1$“; в выражении для I_n (стр. 101) пропущен множитель $1/[(m-3)!!]^2$ и др.

В. Э. Аболиня

8066. Фундаментальные матрицы решений общих параболических систем. Эйдельман С. Д., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 5, 980—983

Устанавливается существование и исследуются свойства фундаментальных матриц решений для произвольных линейных параболических в смысле И. Г. Петровского систем. Результаты используются для получения теорем существования и единственности решения задачи Коши, а также для доказательства аналитичности регулярных решений рассматриваемых систем по пространственным координатам в случае, когда коэффициенты аналитичны по этим координатам. Тем самым обобщаются полученные автором ранее аналогичные предположения для систем первого порядка по t (РЖМат, 1956, 8844). Доказательства в статье не приведены.

Д. М. Эйдус

8067 К. Уравнения в частных производных. Трикоми (Equazioni a derivate parziali. Tricomi Francesco G. Roma, Ed. Cremonese, 1957, xii, 395 p., 4500 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 679, 674 (итал.)

См. РЖМат, 1959, 1242К.

8068 К. Краевые задачи математической физики. Введение в их общую теорию. Гарнир (Les problèmes aux limites de la physique mathématique Introluction à leur étude générale. Garnir H. G. Basel-Stuttgart, Birkhuäser, 1958, 234 p., ill.) (франц.)

Книга посвящена исследованию смешанной задачи для уравнения

$$\left(a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} + c - \Delta \right) u = m(x, t)$$

($a, b, c = \text{const}$, $a \geqslant 0$, при $a = 0$, $b \geqslant 0$, Δ — оператор Лапласа) при краевых условиях $u|_s = 0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = 0$.

Книга разбита на четыре части:

Часть 1 „Теория функциональных гильбертовых пространств“ (стр. 11—55) содержит краткий очерк теории операторов в гильбертовом пространстве. Начиная с определения нормы оператора, эрмитова ограниченного оператора, доказательства равенства верхней грани билинейной формы (Ag, f) и нормы оператора A и т. п., автор далее излагает менее традиционные вопросы, касающиеся операторов, зависящих от параметров. Особенно подробно разбирается вопрос об операторах и функционалах, аналитически зависящих от параметра $z = x + yi$.

Часть 2 „Задача Дирихле — Неймана для метагармонического оператора“ (стр. 56—150) посвящена изучению задач Дирихле и Неймана для оператора $-\Delta + z$ при комплексном z. Сначала определяется элементарное решение для оператора $(-\Delta + z)$. Приводятся различные его интегральные представления, изучены его свойства как функции параметра z. Далее определяется обобщенное решение (слабое решение, по терминологии автора) и доказывается, что для метагармонического оператора оно совпадает с классическим.

Задача Дирихле ставится как задача о нахождении функции u из $W_2^{(1)}(\Omega)$ (пространство $W_2^{(1)}$ С. Л. Соболева автор обозначает через $V(\Omega)$) такой, что Δu существует в обобщенном смысле и принадлежит L_2, и в обобщенном смысле равна нулю на границе, и

$$(-\Delta + z)\, u = f.$$

Аналогично ставится задача Неймана. Доказывается разрешимость задач Дирихле и Неймана. Функция Грина определяется как ядро обратного оператора. Особое внимание автор уделяет изучению функций Грина как функции параметра z. В конце главы вводится пространство L_2^α функций f, для которых $f_a = e^{-a|x-a|} f \in L_2$ (a фиксировано) и изучаются задачи Дирихле и Неймана порядка α, под которыми подразумевается отыскание функции $u \in L_2^\alpha(\Omega)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2^\alpha,\ \Delta u \in L_2^\alpha,\ (-\Delta + z)u = f, f \in L_2^\alpha$$

и удовлетворяются однородные краевые условия.

Часть 3 „Операция J^α" посвящена изучению преобразований Меллина и Лапласа в теории обобщенных функций. Эти операции обобщаются таким образом, что любая регулярная в правой полуплоскости комплексного переменного p функция, возрастающая не быстрее полинома, имеет преобразование Меллина.

Часть 4 „Задача Дирихле — Неймана для операторов волнового и диффузии" (стр. 168—230) посвящена смешанной задаче.

Сначала рассматривается случай волнового оператора, точнее оператора

$$\square_{abc} u = \left(a\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b\frac{\partial}{\partial t} + c - \Delta\right)u, \quad a > 0.$$

Решение уравнения $\square_{abc} u = m(x, t)$ определяется как обобщенная функция, определенная на финитных функциях $\varphi(t) \in C^\infty$, причем $(u(x, t), \varphi) = u_\varphi$ принадлежит W_2^1, удовлетворяет в обобщенном смысле однородным краевым условиям, имеет квадратично интегрируемый обобщенный оператор Лапласа и удовлетворяет некоторому интегральному тождеству. Решение ищется в виде обобщенного интеграла Меллина. Используя результаты части 2, автор доказывает корректность смешанной задачи в такой постановке. Вторая половина четвертой части посвящена исследованию смешанной задачи для оператора $\square_{abc}$ в случае $a = 0$, $b > 0$, т. е. в случае уравнения теплопроводности.

Книга написана четким и простым языком. От читателя не требуется никаких специальных знаний. В первой и второй части имеется большое число упражнений. В конце книги приведена обширная библиография.

В. М. Бабич

8069 Д. Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики. Вашарин А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

8070 Д. Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. Жданович В. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Минск, 1959

8071 Д. Дифференциальные уравнения гиперболического типа и классы почти периодических функций. Гюнцлер (Hyperbolische Differentialgleichungen und Klassen fastperiodischer Funktionen. Günzler Hans.—Diss., Naturwiss. Fak., München, 1958 (1957), 110 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, B, № 21, 1878 (нем.)

8072 Д. Некоторые задачи для уравнений параболического типа с неизвестной границей. Каменомостская С. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

8073 Д. Исследование по теории параболических систем. Эйдельман С. Д. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, Черновцы, 1958

8074 Д. Первая краевая задача для некоторых квазилинейных уравнений в области с вырожденной границей. Крылов А. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

8075. Уравнение движения спутника. Марсикано (Sobre las ecuaciones del movimiento del satélite. Marsicano F. R.), Boll. Unione mat.-ital., 1958, **13**, № 2, 214—216 (исп.)

8076. Интегрирование уравнений движения несимметричного гироскопа. Кротова П. Г., Изв. Сибирск. отд. АН СССР, 1958, № 7, 75—86

Рассматривается классическая задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием силы веса. Автор исследует такие случаи: 1) Эллипсоид инерции тела относительно неподвижной точки — трехосный, $A > B > C$, но величина $n_0 = \sqrt{\frac{(C-B)(C-A)}{AB}}$ иррациональна; центр тяжести тела находится или на одной из главных осей эллипсоида инерции (разбираются отдельно случаи расположения на осях Oz и Oy), или же лежит в одной из главных плоскостей инерции. 2) Предполагается, что начальное движение тела есть вращение вокруг соответствующей главной оси инерции с большой угловой скоростью. В результате вводится некоторый малый параметр. Вводятся некоторые новые переменные как вспомогательные, так и по существу. Затем ищется решение уравнений Эйлера — Пуассона в виде двойной системы рядов по малому параметру.

Для определения коэффициентов рядов получается бесконечное множество последовательных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Автор ищет периодические решения, находит первые два коэффициента каждого ряда и в общих чертах показывает возможность нахождения остальных коэффициентов. Ряды получаются расходящиеся, но, пользуясь одной интересной теоремой Пуанкаре, автор показывает, что данные ряды асимптотически изображают искомое частное решение задачи. Для найденного приближенного решения задачи дается кинематическая трактовка: тело или описывает псевдорегулярную прецессию, или же имеет „дрожание" около определенного положения. В статье не подчеркнуто, почему параметр n_0 должен быть иррациональным.

В. В. Добронравов

8077. Горизонтальные свободные колебания призматической пластинки в теории пластичности. Магирос (Magiros D. G.), Практика тис академиас Афинон, 1956 (1957), **31**, 16—21 (греч.; рез. англ.)

Находится решение нелинейного уравнения в частных производных в связи с задачей горизонтальных свободных колебаний призматической пластинки в теории пластичности. Для простоты закрепим пластинку в обоих ее концах, задача тогда сводится к нахождению решения следующей системы:

$$[f(u'')]'' = \ddot{u},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = u''(0, t) = u''(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),\ \dot{u}(x, 0) = \varphi_2(x).$$

Задавая функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(\ddot{u})$, решение ищем в виде $u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t) \sin mx$.

Функции $v_m(t)$ определяем с помощью бесконечной системы нелинейных уравнений степени r, которые решаются методом последовательных приближений.

Построенное формальное решение при некоторых ограничениях удовлетворяет всем постулатам Адамара и, следовательно, является истинным решением.

Из резюме автора

8078. **Горизонтальные свободные колебания простой призматической пластинки в теории пластичности. Ч. II. Магирос** (Magiros D. G.), Практика тис академиас Афинон, 1956 (1957), **31**, 168—171 (греч.; рез. англ.)

Общая теория, развитая в предыдущей работе (реф. 8077), применяется для некоторого частного случая.

Из резюме автора

8079. **Влияние начального движения сейсмометра и гальванометра на частотную характеристику электромагнитного сейсмографа. Банерджи** (Contribution of the initial motions of the seismometer and galvanometer in the response characteristics of electromagnetic seismographs. Banerjee K. N.), J. Technol., 1958, **3**, № 1, 25—32 (англ.)

8080. **К синтезу структур многосвязного регулирования при наличии элементов с запаздыванием. Мееров М. В.** Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 12, 1098—1108 (рез. англ.)

Решается задача о нахождении такой структуры линейной системы регулирования, которая допускала бы неограниченное увеличение коэффициента усиления, что способствует уменьшению статических и динамических ошибок системы. В отличие от других статей, где рассматривалась та же самая задача, здесь в систему вводятся элементы запаздывания. Е. П. Попов

8081. **О нелинейных дифференциальных уравнениях систем непрямого автоматического регулирования с одним регулирующим органом. Якубович В. А.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 6, 229—231

8082. **Замечание к статье Гофмана «К вычислению квадратичной поверхности регулирования». Ципкин** («Beitrag zur Berechnung der quadratischen Regelfläche» von R. Hofmann. Bemerkund. Cypkin Ja), Regelungstechnik, 1958, **6**, № 10, 376 (нем.)

8083. **Перенос тепла ламинарной свободной конвекцией в ограниченных плоских газовых слоях. Путс** (Heat transfer by laminar free convection in enclosed plane gas layers. Poots G.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 3, 257—273 (англ.)

Дается численный метод решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих перенос тепла ламинарной свободной конвекцией в ограниченных плоских газовых слоях. Рассматривается газ, заключенный между двумя плоскими параллельными стенками, наклоненными под углом φ к вертикали, и двумя узкими полосками длины d, находящимися на расстоянии l друг от друга. Делаются следующие предположения: 1) перепад температур $T_1 - T_0$ теплой и холодной стенок мал по сравнению с температурой T_0 холодной стенки, 2) вязкость, плотность и теплопроводность постоянны, 3) газ несжимаем, и потерями тепла за счет вязкости можно пренебречь, 4) движение двумерно.

Следуя Бэтчелору, автор записывает систему основных уравнений в следующей форме:

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\Delta^2\psi = A\left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \sin\varphi\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\Delta\psi)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\right],$$

с граничными условиями

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\ \vartheta = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\ \vartheta = 1 \text{ при } y = 1 \text{ и } 0 \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ \vartheta = y \text{ (случай I) или } \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0 \text{ (случай II)}$$

при $x = 0, \alpha$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$,

здесь $\vartheta = \dfrac{T - T_0}{T_1 - T_0}$, ψ — функция тока, определяемая уравнениями $u = \dfrac{k}{d}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\dfrac{k}{d}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, d — приведенная длина для координат x и y, σ — число Прандтля,

$$A = \frac{(T_1 - T_0)\,gd^3}{T_0\,k\,v}$$

число Релея.

Решения этой системы ищутся в виде двойных рядов ортогональных функций. С помощью этих рядов система сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений, которая решается методом итераций. Эти численные решения протабулированы для случая $\alpha = 1$, $\varphi = 0$ и для $A = 5\cdot10^2$; 10^3; $2{,}5\cdot10^3$; $5\cdot10^3$; 10^4; $\alpha = l/d$. Полученные численные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

В заключение автор рассматривает границы применимости метода и сравнивает его с другими, более известными численными методами. Библ. 8 назв.

Ю. Я. Погодин

8084. **К теории Голдштейна о ламинарном отрыве. Стюартсон** (On Goldstein's theory of laminar separation. Stewartson K.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 4, 399—410 (англ.)

Изложив вкратце результаты Голдштейна (Goldstein S., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, **1**, № 43) для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском пограничном слое в области отрыва струи, автор показывает, что теория Голдштейна несовершенна. С целью уточнения этой теории автор берет за исходную формулу следующее разложение:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 2^{3/8}\sum_{r=1}^{\infty} x^{1/4(r+1)}\,\alpha_r,$$

полученное Голдштейном. Здесь x — координата по дуге контура, y — координата по нормали, u — продольная скорость. Доказывается, что разложение функции тока должно содержать члены, имеющие в точке отрыва логарифмическую особенность. Обсуждаются возможности продолжения решения за точкой отрыва и удаления особенности для профиля скорости в точке отрыва.

Д. Е. Долидзе

8085. **Параболоид вращения в дозвуковом потоке. Ван-Дайк** (The paraboloid of revolution in subsonic flow. Van Dyke M. D.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 1, 38—51 (англ.)

Рассчитывается дозвуковой поток позади параболоида вращения методами теории малых возмущений второго порядка, теории тонких тел второго порядка и методом итераций Янцена — Релея для нулевого угла атаки. Одно из возможных применений — устранение недостатков линеаризованной теории малых возмущений, дающей неудовлетворительные результаты вблизи передней части тела, в случае, когда она применяется к крыльям и телам, имеющим закругленную переднюю кромку.

Вначале находится решение по методу Янцена — Релея. Уравнение для потенциала скорости Φ записывается в цилиндрических координатах

$$a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{rr}+\frac{\Phi_r}{r}\right)=\Phi_x^2\Phi_{xx}+2\Phi_x\Phi_r\Phi_{xr}+\Phi_r^2\Phi_{rr},$$

где a — скорость звука. Φ ищется в виде

$$\Phi=U(\varphi_0+M^2\varphi_1+(\gamma+1)M^4\varphi_2+\ldots),$$

где U — скорость однородного набегающего потока, а φ_0, φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi_{0xx}+\varphi_{0rr}+\frac{\varphi_{0r}}{r}=0,$$

$$\varphi_{1xx}+\varphi_{1rr}+\frac{\varphi_{1r}}{r}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi_{0x}\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_{0r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\varphi_{0x}^2+\varphi_{0r}^2-1\right),$$

$$\varphi_{2xx}+\varphi_{2rr}+\frac{\varphi_{2r}}{r}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\varphi_{0x}\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_{0r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\varphi_{0x}^2+\varphi_{0r}^2-1\right)^2.$$

Уравнение параболоида вращения берется в виде $r=2\delta\sqrt{x}$. После перехода к параболическим координатам определяется φ_0, а затем с помощью преобразования Ханкеля находятся φ_1 и φ_2.

Скорости на поверхности обтекаемого тела определяются из формулы

$$\frac{u}{U}=\frac{\Phi_x}{U}=\frac{z}{1+z^2}\left[z-\frac{1}{2}M^2I(z)-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma+1}{2}M^4J(z)+\ldots\right],\quad z=\frac{\sqrt{x}}{\delta}.$$

Для функций $I(z)$ и $J(z)$ получены аналитические выражения и приведена таблица численных значений, а также асимптотические формулы для больших и малых z. Затем получены решения методами теории малых возмущений второго порядка и теории тонких тел второго порядка. Приводятся графики кривых распределения скоростей, рассчитанных различными методами, на поверхности параболоида для набегающего потока с $M=0{,}6$. Формулы теории тонких тел дают неудовлетворительные результаты вблизи передней кромки тела. Приводится приближенная формула для исправления дефектов в решении теории тонких тел для скоростей на поверхности передней кромки тела.

Реферируемая работа примыкает к более ранним работам автора. См. РЖМех, 1957, 258, 2781, 8745. Библ. 19 назв. А. Ф. Сидоров

8086. Определение «конвергенты», встречающей тело у отверстия стока. Перейра-Гомис (Détermination d'un «convergent» ayant un corps à l'ouverture de sortie. Pereira Gomes A.), Portug. math., 1953, 12, № 1-2, 49—56 (франц.)

„Конвергентой" автор называет линию тока, на которой точки входа и выхода сливаются.

Ставится задача: Известна „конвергента", заданная уравнением $\psi_1(x,r)=C$, где $\psi_1(x,r)$ — функция тока, имеющая форму контура $OABS$ криволинейной трапеции, опирающейся на ось Ox. Вытекающий из точки A поток стекает с вращением вокруг оси Ox. Требуется найти форму контура новой „конвергенты", встречающей округлое тело в точке C стока жидкости, расположенной между точками Q и S оси Ox. Поставленная задача решается аналитически. Полученные формулы позволяют произвести все необходимые расчеты.

Ю. Ф. Харкеевич

8087. Исследование слабозакрученных струй. Устименко Б. П. В сб.: Исслед. физ. основ рабочего процесса топок и печей. Алма-Ата, АН КазССР, 1957, 64—85

Дается решение задачи о распространении ламинарной струи несжимаемой вязкой жидкости в спутном однородном потоке. Частный случай подобной задачи рассматривался ранее (Бушмарин О. Н., Тр. Ленингр. политехн. ин-т, 1953, № 5). Система линеаризованных уравнений имеет вид:

$$u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\rho w^2}{y},$$

$$u_0\frac{\partial w}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{w}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial(yu_1)}{\partial x}+\frac{\partial(yv)}{\partial y}=0$$

при граничных условиях:

$$v=w=0,\quad\frac{\partial u_1}{\partial y}=0\quad\text{при } y=0,$$

$$u_1=w=0,\quad\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=0\quad\text{при } y=\infty.$$

Здесь u_0 — аксиальная скорость спутного потока, u_1 — избыточная скорость струи, причем принимается, что $u_1\ll u_0$; v и w — соответственно радиальная и тангенциальная составляющие скорости струи.

Начальные условия заменены интегральными условиями

$$u_0\int_0^\infty y\,u_1\,dy=\frac{\Delta k_0}{2\pi\varphi},\quad\int_0^\infty u_0\,y^2\,w\,dy=\frac{L_0}{2\pi\varphi},$$

обычными для теории пограничного слоя и получающимися из теорем об изменении количества движения и момента количества движения.

Решение системы ищется в автомодельной форме

$$u_1=\frac{1}{x^\alpha}\frac{F'(\varphi)}{\varphi},\quad w=\frac{1}{x^\gamma}H(\varphi),\quad\frac{p}{\rho}=\frac{1}{x^\delta}P(\varphi).$$

Для функций $F'(\varphi)$, $H(\varphi)$, $P(\varphi)$ и φ найдены соответствующие выражения.

Приводятся также приближенные решения задач о свободной и полуограниченной струе, создаваемой кольцевым источником (кольцевая щель, образованная двумя соосными круговыми цилиндрами). Библ. 11 назв

В. П. Пилатовский

8088. Обобщение метода линейных интегральных операторов Бергмана на диабатическое течение. Кшивоблоцкий, Хассан (Generalization of Bergman's linear integral operator method to diabatic flow. Krzywoblocki M. Z. v, Hassan H. A.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 2, 47—65 (англ.)

Рассматривается плоское диабатическое течение сжимаемого газа в дозвуковой области. Под диабатическим понимается течение идеального газа, не обладающего вязкостью и теплопроводностью при наличии притока тепла. Авторы ограничиваются случаем безвихревого течения.

В плоскости годографа (q,θ), где $qe^{i\theta}=u+iv$, u,v — составляющие скорости, все функции зависят, как обычно, только от q. Уравнение Чаплыгина имеет в этом случае вид:

$$\psi_{\theta\theta} + \frac{1}{h^2}\frac{\rho}{q}\left(\frac{q}{\rho}\psi_q\right)_q = 0, \qquad (1)$$

где ψ—функция тока, $h^2 = \frac{1-M^2}{q^2} - (\gamma-1)\frac{M^2}{q^2}\frac{dQ}{d_q}$, M—число Маха, Q—полное количество тепла, приобретаемое частицей при ее движении вдоль линии тока, ρ—плотность.

Вводя независимые переменные θ, λ, где $\lambda = -\int_q^{q_*} h^2\, dq$ (q_*—критическая скорость: $h^2(q_*) = 0$) и $\overline{\psi} = (\rho^{-1}qh)\psi$, можно представить уравнение (1) в виде

$$\Delta\overline{\psi} + f(\lambda)\overline{\psi} = 0, \qquad (2)$$

где $f(\lambda) = -(\rho^{-1}qh)^{-1/2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[(\rho^{-1}qh)^{1/2}\right]$.

Формально совпадая с аналогичным уравнением для случая изэнтропического течения, уравнение (2) отличается от него тем, что $f(\lambda)$ зависит от распределения тепла.

К решению (2) применен метод Бергмана. Для исследования изэнтропического течения он использовался, например, Мизесом и Шиффером (Mises R. v., Schiffer M. Advances in Appl. Mechanics, Acad. Press, N. Y., 1 (1948), pp. 240—270).

В соответствии с этим методом

$$\overline{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\lambda,\theta)G_n(\lambda), \qquad (3)$$

где $G_0 = 1$, $G_{n+1}'' = G_n + f(\lambda)G_n$, g_n—гармонические функции λ и θ, удовлетворяющие условиям $2\frac{\partial g_{n+1}}{\partial\lambda} = -g_n$ (g_0 произвольна). Обозначая $\xi = \lambda + i\theta$, $g_0(\lambda, \theta) = \mathrm{Re}\{\varphi_0(\xi)\}$,

$$U(t,\lambda,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n-1)!}(\xi-t)^{n-1}G_n(\lambda), \qquad (4)$$

из (3) можно получить следующее выражение для $\overline{\psi}(\lambda,\theta)$:

$$\overline{\psi}(\lambda,\theta) = g_0(\lambda,\theta) + \mathrm{Re}\left\{\int_0^{\xi}\varphi_0(t)U(t,\lambda,\theta)\,dt\right\},$$

справедливое в области равномерной сходимости ряда (4).

Показано, что в случае, когда

$$f(\lambda) \leqslant F = \frac{c}{(a-\lambda)^2} \qquad (a<0),$$

эта область определяется соотношением

$$\left|\frac{\xi-t}{2(a-\lambda)}\right| \leqslant \delta < 1.$$

Здесь c—подходящим образом подобранная постоянная. Что касается ряда (3), область его сходимости по крайней мере та же, что в изэнтропическом случае (см. упомянутую выше статью). В заключение обсуждены возможные пути численного расчета и трудности, возникающие при этом в связи с диабатичностью движения.

Н. Н. Кузнецов

8089. Пример околозвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. Бийбосунов И., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 3, 311—319

На основании результатов Ф. И. Франкля (Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, вып. 1.—РЖМех, 1958, 9627), указавшего способ построения примера плоского околозвукового течения газа без учета вязкости и теплопроводности с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения, приводится численное построение такого примера. Считая скачок уплотнения слабым и пренебрегая переменностью энтропии и вихрями за скачком, автор рассматривает в плоскости годографа скорости течения частное решение системы уравнений С. В. Фальковича

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -C\frac{\partial\psi}{\partial\eta};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = C\eta\frac{\partial\psi}{\partial\theta};\quad C = \left(\frac{\chi+1}{2}\right)^{(1/(\chi-1)}(\chi+1)^{1/2} = \mathrm{const}\ (1$$

(здесь θ—угол наклона скорости, η—функция скорости введенная Ф. И. Франклем, φ—потенциал скорости, ψ—функция тока), содержащее малый параметр ε и при $\varepsilon\to 0$ переходящее в решение системы (1), найденное Ф. И. Франклем (РЖМех, 1956, 4273) и дающее вышеуказанный пример.

Частное решение системы (1) имеет вид:

$$\psi = \eta_1^4[\alpha f(-9\theta^2/4\eta^3) + \beta g(-9\theta^2/4\eta^3)],$$

$$\varphi = (\mp\eta)^{3/2}[\alpha f^0(-9\theta^2/4\eta^3) + \beta g^0(-9\theta^2/4\eta^3)],$$

где $f(z)$, $g(z)$, $f^0(z)$, $g^0(z)$—выражаются через различные гипергеометрические функции с различными постоянными α и β в части плоскости (θ,η), лежащей вне области, ограниченной характеристиками системы (1), исходящими из начала координат, и внутри этой области. Постоянные α и β определяются из условия непрерывности φ и ψ на упомянутых характеристиках и на скачке уплотнения, который в плоскости (θ,η) изображается в виде двух кривых: $3\theta_1/2(-\eta_1)^{3/2} = k_1$; $3\theta_2/2\eta_2^{3/2} = k_2$ соответственно на сверхзвуковой стороне и на дозвуковой стороне. При решении системы алгебраических уравнений для определения α, β, k_1, k_2 и $k = \eta_2/\eta_1$ левые части этих уравнений разлагаются в ряд по степеням ε и отбрасываются члены, содержащие ε в степени выше первой. Для численных расчетов принимается $\varepsilon = -0{,}1$, так что подводящая линия тока, проходящая через конец скачка, лежит полностью в дозвуковой области. В физической плоскости течения построены параметрические уравнения, приведены графики и таблицы для линии скачка уплотнения, звуковой линии и нулевой линии тока, проходящей через конец скачка.

И. Л. Кароль

8090. Баллистическая задача Лагранжа для безоткатных орудий (H/L, R. C. L.) и ракет с твердым топливом. Капур (Lagrange's ballistic problem for unorthodox (H/L, R. C. L.) guns and solidfuel rockets. Kapur J. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 1, 31—39 (англ.)

Получено распределение давления $P(x)$ внутри камеры сгорания для безоткатных орудий и ракет с твердым топливом. Решение получено в случае, когда скорость зависит от x линейно, а заряд сгорает постепенно, превращаясь в идеальный газ.

Рассмотрен случай безоткатных орудий, имеющих две камеры, соединенные соплом, причем считается, что в первой камере газ адиабатически и изотермически заторможен. Задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho[\mu(t)x + \nu(t)], \qquad (1)$$

где

$$\mu(t) = \frac{1}{y^2}\left[y\frac{d^2y}{dt^2} - v_0\frac{dy}{dt} + v^2{}_0\right],$$

$$\nu(t) = \frac{v_0}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{v_0^2}{y},$$

а $\rho(t)$ находится из уравнения

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dz}{dt} - \psi\frac{df}{dt}; \qquad (2)$$

здесь y — координата дна снаряда, N — часть газа, находящаяся во второй камере, f — часть заряда, не охваченная горением, ψ — безразмерный параметр, характеризующий истечение газа через сопло.

Решение (2) при условии $f = 1$ при $z = 0$, $N = 0$ получено в виде

$$\rho(t) = \frac{c\psi(1-f)}{A\cdot y},$$

где c — масса заряда, A — площадь поперечного сечения. Решение (1) получено в виде

$$P = P_B - \rho\left[\frac{1}{2}\mu x^2 + \nu x\right],$$

где $P_B = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_0$ есть давление в критическом сечении сопла. Для безоткатных орудий с одной камерой и ракет функция распределения давления также является параболой. Решение является приближенным, так как не учитывается влияние поверхности горения на распределение скорости и давления.

В случае, если заряд сгорает мгновенно и отсутствует истечение через сопло, среднее давление $\overline{P} = \frac{1}{y}\int_0^y P dx$ совпадает со средним давлением, полученным для откатных орудий при аналогичных предположениях относительно скорости, т. е. степень точности полученного решения такая же, как и для откатных орудий. В работе имеются опечатки (в формулах (34), (35), (36)).

В. Ф. Куропатенко

8091. Гидравлическая задача, возникшая при сооружении одной гидроэлектростанции. Букович (Eine hydraulische Aufgabe beim Bau eines Kraftwerkes. Bukovics Erich), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 17—25 (нем.)

См. РЖМех, 1958, 6638.

8092. Нелинейная теория упругости и устойчивость «в большом». Болотин В. В., В сб.: Расчёты на прочность. Вып. 3. М., Машгиз, 1958, 310—354

Систематическое изложение и обзор результатов по теории упругой устойчивости „в большом" в связи с нелинейной теорией упругости, с одной стороны, и теорией бифуркаций Пуанкаре, — с другой. Заглавия разделов: Некоторые сведения из теории конечных деформаций; Нелинейная теория упругости и проблема устойчивости „в малом"; Общие уравнения теории устойчивости в „большом"; Сведение задачи к системам алгебраических уравнений; О механической модели, описывающей потерю устойчивости „в большом; Классификация случаев потерь устойчивости; Устойчивость „в большом" и теория бифуркаций Пуанкаре; Влияние начальных отклонений; Рассмотрение высших приближений. Библ. 24 назв.

Г. С. Шапиро

8093. Об общем решении пространственной задачи теории упругости. Теодореску (Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité. Tedorescu Petre P.), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 5. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 155—167 (франц.)

Уравнениям статики сплошной среды и зависимостям Бельтрами можно удовлетворить, выражая нормальные напряжения через три бигармонических функции напряжений F_x, F_y, F_z

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (F = F_x + F_y + F_z).$$

Касательные напряжения представляются через эти три функции и три плоских гармонических функции $F_{xy}(x, y)$, $F_{yz}(y, z)$, $F_{zx}(z, x)$ соотношениями

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{3}{2(2+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint \Delta F dy dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta\left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z}dy + \frac{\partial F_z}{\partial y}dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}(F_{xy} - F_{zx}).$$

Даны выражения перемещений через введенные функции и показано, что, используя представление бигармонической функции суммой гармонической и гармонической, умноженной на линейную функцию координат, можно выразить напряжения через четыре гармонические функции.

А. И. Лурье

8094. Об одной форме решений уравнений пространственной теории упругости в перемещениях. Соболев В. Х. В сб.: Тр. научн. конференции Сталинского пед. ин-та. Вып. 1. Кемеровск. кн. изд-во, 1956, 280—291

См. РЖМех, 1958, 944.

8095. Колебания упругой полуплоскости. Бородачев Н. М., Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 5, 291—300

Динамическая задача теории упругости для полуплоскости решается путем совместного применения интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Решение выражается в квадратурах через две вспомогательные функции, которые находятся из граничных условий. Приведен пример определения этих функций для граничных условий частного вида. Исследование условий применимости полученных выражений не проводится, поэтому результаты работы имеют формальный характер.

Н. Н. Лебедев

8096. Об определении напряжений в цилиндрических валах с кольцевой выточкой. Положий, Скоробогатько (До визначення напруг в циліндричних валах з кільцевою виточкою. Положій Г. М., Скоробогатько А. А.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 534—535 (укр.)

Показано, что для практически важных случаев кольцевых выточек гиперболической формы с помощью ранее предложенного метода (РЖМат, 1957, 8599) получаются вполне удовлетворительные приближенные значения максимальных напряжений.

Г. Н. Савин

8097. О кручении круглого цилиндрического вала с конической частью. Абрамян Б. Л., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 5, 679—683

Решается задача о кручении круглого вала переменного сечения, состоящего из двух участков — конического и цилиндрического, моментами, приложенными к торцам, и силами, распределенными по цилиндрической поверхности (коническая поверхность считается свободной от нагрузки).

В конической части вала за функцию перемещений $\Psi_1(r, z)$ принимается решение А. Фёппля для кручения конуса. В цилиндрической части функция $\Psi_2(r, z)$ задается в известной форме разложения в ряд по функциям Бесселя действительного и мнимого аргумента. Коэффициенты последнего ряда определяются интегральным условием равновесия, условием на боковой поверхности цилиндра и условиями сопряжения конического и цилиндрического участков, записываемыми в форме

$$\Psi_1(r,b) = \Psi_2(r, b), \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right)_{z=b} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right)_{z=b}.$$

Следует отметить произвольность выбора границы между конической и цилиндрической частями вала.
К. В. Соляник-Красса

8098. Изгиб с одним узловым диаметром круглой пластинки конусного профиля. Борисенко (Згин з одним вузловим діаметром круглої пластинки конусного профілю. Борисенко Д. М.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 225—230 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки конического профиля под действием переменной нагрузки $q(x, \theta) = q_0(1 - x)\cos\theta$. Приводится выражение для определения величины прогиба $w(x, \theta)$. Решение задачи дано в виде ряда, содержащего необходимое число произвольных постоянных интегрирования для удовлетворения любым граничным условиям. Г. Н. Савин

8099. Колебания свободной пластинки и пластинки на упругом основании под действием динамической нагрузки. Соколов Ф. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 6, 114—117

Рассматривается задача о колебаниях неограниченной пластинки под действием внезапно приложенной нагрузки, равномерно распределенной по площади круга заданного радиуса a. Решение данной задачи и соответствующей задачи для пластинки, лежащей на упругом основании, строится методами операционного исчисления, причем детально исследуется случай нагрузки, не зависящей от времени. Для значений прогиба и изгибающего момента в центре пластинки получаются простые замкнутые выражения. Найденные результаты используются для решения одной динамической задачи теории оболочек.

В статье имеется ряд опечаток, наиболее важной из которых является набор символа $I_n(x)$ вместо $J_n(x)$ для функций Бесселя. Н. Н. Лебедев

8100. Поперечные волны в упругих пластинах. Букуолд (Transverse waves in elastic plates. Buchwald V. T.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 4, 498—508 (англ.)

Изучаются гармонические колебания пластин, поверхности которых свободны от напряжений и параллельны плоскости (x, y). Рассматривается тот случай, когда вектор смещения лежит в плоскости пластины. Пусть u и v — компоненты вектора смещения, тогда $\psi = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ удовлетворяет уравнению

$$c_1^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

и краевым условиям $\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right|_{z = \pm h} = 0.$

Решение ищется в виде

$$\psi = \Psi(z)\, e^{i(px - nt)}. \qquad (1)$$

В этом случае фазовую скорость $n\,p$ и групповую скорость $dn\,dp$ легко найти в явном виде.

Рассматривается также случай „двойной пластины", т. е. случай, когда пластина из одного материала, занимающая область $0 \leqslant z \leqslant h$, „склеена" вдоль $z = 0$ с пластиной из другого материала, занимающей область $-h \leqslant z \leqslant 0$. В этом случае тоже можно искать решение в виде (1), но для групповой и фазовой скоростей получается трансцендентное уравнение. Рассматривается также случай, ранее изученный Лявом, когда нижняя пластина заменяется полупространством.

В работе проведено вычисление корней этих трансцендентных уравнений, результаты вычислений представлены в виде графиков. В. М. Бабич

8101. Решение задачи устойчивости прямоугольных пластинок методом начальных параметров. Сафронов, Банковская (Розв'язання задачі стійкості прямокутних пластинок методом початкових параметрів. Сафронов Ю. В., Банковська Н. В.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 1, 61—69 (укр.; рез. русск., англ.)

Методом начальных параметров решены задачи: 1) об устойчивости пластины, сжатой ступенчатой нагрузкой; 2) об устойчивости пластины, подкрепленной поперечными и продольными упругоосседающими балками, при следующих граничных условиях: два противоположных края пластины принимаются свободно опертыми, а два другие — закрепленными произвольно. Определение критического значения распределенной сжимающей нагрузки сводится к решению трансцендентного уравнения в виде определителя второго порядка. Приводятся числовые примеры. Г. Н. Савин

8102. Некоторые задачи динамики круглых пластин и пологих сферических оболочек. Малкина Р. Л., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 3, 50—59

Решение задачи о симметричных относительно центра колебаниях круглой плиты, находящейся под действием нагрузки $F(r, t)$, представляется рядом по собственным формам колебаний. Приведены формулы для вычисления определенных интегралов, входящих в выражения коэффициентов этого ряда (аналогичные формулам Релея, относящихся к прямолинейным стержням). Рассмотрен частный случай нагрузки, изменяющейся во времени по синусоидальному закону и внезапно прикладываемой в центре силы, остающейся далее постоянной по величине. Указывается, что полученные формулы переносятся на случай пологой сферической оболочки.
А. И. Лурье

8103. К теории пологих оболочек. Мишонов М., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 5, 691—695

Изучаются уравнения технической теории пологих оболочек, предложенные В. З. Власовым

$$\Delta\Delta\varphi + Eh\,\Delta_k w = 0; \qquad (1)$$

$$D\Delta\Delta w - \Delta_k \varphi = Z. \qquad (2)$$

Вначале устанавливается, что предложенное В. З. Власовым представление функций φ, w:

$$\varphi = -Eh\,\Delta_k W; \quad w = \Delta\Delta W, \qquad (3)$$

заменяющее уравнение (1), не всегда может быть использовано в случае сферической оболочки. Поэтому вместо (3) автор предлагает использовать для сферической оболочки представление

$$\Delta\varphi = -\frac{Eh}{R} W, \quad \Delta w = \Delta W. \qquad (4)$$

Затем уравнения (1), (2) Власова обобщены на случай произвольной нагрузки (Власов при выводе уравнений (1), (2) учитывал только поперечную нагрузку Z). При этом получена следующая система:

$$\Delta\Delta\varphi + Eh\,\Delta_k w = \int\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,dx + \int\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,dy - \nu\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \qquad (5)$$

$$D\Delta\Delta w - \Delta_k \varphi = Z - k_x \int X\,dx - k_y \int Y\,dy. \qquad (6)$$

В (5), (6) X, Y — компоненты тангенциальной нагрузки. Рассмотрены некоторые приложения уравнений (5), (6).

Примечания референта. I. Можно показать, что случай сферической оболочки является единственным исключением, когда представления (3) Власова применимы не при любой нагрузке. Для всех других типов оболочек представления (3) могут быть использованы при любой нагрузке II. Представление (4) автора для сферической оболочки может быть использовано при любой нагрузке. И. И. Ворович

8104. Об изопериметрических неравенствах в теории пластичности. Шуман (On isoperimetric inequalities in plasticity. Schumann Walter), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 3, 309—314 (англ.)

Дана оценка снизу несущей способности тонких, идеально пластических, свободно опертых и равномерно нагруженных пластинок произвольной формы и связности, а именно показано, что

$$P \geqslant 6\pi M_0, \qquad (1)$$

где P—полная предельная нагрузка, M_0—предельный изгибающий момент. Доказательство основывается на известной теореме о предельном равновесии, дающей нижнюю оценку несущей способности идеально-пластичных конструкций, а также на использовании методов решения изопериметрических задач (Polya G., Szegö G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton, 1951). Неравенство (1) доказано для материала, подчиняющегося условию текучести Треска. Поскольку условие Треска представляется в виде шестиугольника, вписанного в эллипс Мизеса, неравенство (1) сохраняет силу и для условия Мизеса. Г. С. Шапиро

8105. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности. Ивлев Д. Д., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 4, 480—486

На поверхности разрыва трехмерного поля напряжений идеально-пластического тела, подчиняющегося условию текучести Треска, выведены соотношения, обобщающие известные зависимости В. Прагера для плоской задачи. Предполагается, что поля напряжений соответствуют разным ребрам призмы, изображающей в пространстве главных напряжений условие текучести Треска. В качестве примера построено разрывное поле напряжений для четырехгранной пирамиды. Показано, что эта пирамида должна быть правильной; для случая, когда две противоположные грани свободны от нагрузки, найдена простая формула для нормального постоянного давления, действующего на двух остальных гранях.

Г. С. Шапиро

8106. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импеданцами граней. Малюжинец Г. Д., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 3, 436—439

В клиновидной области с заданными импеданцами граней рассматривается двумерное волновое поле

$$\Delta p + k^2 p = 0,\ r > 0,\ -\Phi < \varphi < \Phi, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \pm ik \sin\theta_{\pm}\, p = 0 \quad (\varphi = \pm\Phi), \qquad (2)$$

где $\sin\theta_{\pm} = \frac{z_0}{z_{\pm}}$, $z_0 = \rho c$—волновое сопротивление среды, $z_{\pm}$—нормальные импеданцы граней $\varphi = \pm\Phi$. Исследуется дифракция плоской волны $p_0 = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}$ на данном поглощающем клине. Точное решение задачи представлено в виде контурного интеграла

$$p(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-ikr\cos\alpha}\, s(\alpha + \varphi)\, d\alpha, \qquad (3)$$

где функция $s(\alpha + \varphi)$ определяется из условий регулярности и граничных условий (2). После определения функции s интеграл (3) вычисляется при больших kr с помощью метода перевала. Отмечается появление двух поверхностных волн, возбуждаемых падающей волной, и указывается на ряд их особенностей.

Д. П. Костомаров

8107. Представление источника тока в проводящем объеме с помощью мультиполей. Е, Мартинек, Бомонт (Multipole representations of current generators in a volume conductor. Yeh G. C. K., Martinek J., Beaumont H. de), Bull. Math. Biophys., 1958, **20**, № 3, 203—216 (англ.)

Пусть дан проводящий шар радиуса a, заключенный в непроводящую оболочку, и пусть внутри этого шара в области $0 \leqslant r < a_0 < a$ имеются источники тока, распределенные с плотностью $\rho(x, y, z)$, причем

$$\iiint \rho(xyz)\, dxdydz = 0.$$

Рассматривается представление потенциала в области $a_0 \leqslant r \leqslant a$ в виде суперпозиции потенциалов мультиполей:

$$\varphi(x, y, z) = D_x\left[\varphi_0^{(x)} + \varphi_1^{(x)}\right] + D_y\left[\varphi_0^{(y)} + \varphi_1^{(y)}\right] + D_z\left[\varphi_0^{(z)} + \varphi_1^{(z)}\right] + \ldots,$$

где

$$\varphi_0^{(x)} = x/r^3,\ \varphi_1^{(x)} = 2x/a^3 \text{ и т. д.}$$

Обсуждается вопрос, связанный с определением коэффициентов D_x, D_y, D_z и т. д. по измерению потенциала в некотором числе точек на ограничивающей сфере $r = a$. Д. П. Костомаров

8108. Потенциал равномерно заряженного диска. Дюран (Potentiel d'un disque uniformément chargé. Durand Emile), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 7, 887—889 (франц.)

Вычисляется электрический потенциал, создаваемый в пространстве равномерно заряженным диском. Потенциал выражается через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

Примечание референта. Аналогичное рассмотрение для ньютоновского потенциала диска с равномерно распределенной массой проведено ранее Цоллером (РЖМат, 1957, 3211). М. И. Клиот-Дашинский

8109. О нелинейной задаче определения температуры в пластинке, нагреваемой электричеством. Гербер (Sur un problème non linéaire posé par la détermination de la température dans une plaque chauffée électriquement. Gerber Robert), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 8, 708—710 (франц.)

В области D, заключенной между прямой $y = 0$ и кривой Γ ($y = y(x)$, $-\infty < x < +\infty$; причем $y = e$ при $|x| > A$; $0 < y \leqslant B$ при $|x| \leqslant A$ (e, A, B — постоянные)), рассматривается система двух уравнений

$$\Delta u = 0,\ \Delta\Theta + \frac{\sigma}{\lambda}(\operatorname{grad} u)^2 = 0$$

с граничными условиями:

$$\partial u/\partial y = 0 \text{ на } y = 0 \text{ и } \Gamma,$$

$$\partial u/\partial x = i_0/\sigma \text{ для } x = \pm\infty,\ \Theta = 0 \text{ на } y = 0,$$

$$\partial\Theta/\partial u = 0 \text{ на } \Gamma,$$

где σ, λ, i_0 — постоянные.

Задача заключается в определении значений функции Θ на кривой Γ. Указывается, что с помощью конформного отображения области D на полосу легко показать, что на кривой Γ функция Θ принимает постоянное значение, равное $\Theta_0 = i_0^2 e^2/2\lambda\sigma$.

Затем рассматривается задача, в которой последнее условие заменено на $\partial\Theta/\partial u = -C$. В этом случае функция $\Theta(x, y)$ представляется в виде

$$\Theta(x, y) = \Theta_1(x, y) + t(x, y),$$

где $\Theta_1(x, y)$ — решение предыдущей задачи. Для $t(xy)$ получена мажорантная оценка

$$|t(xy)| \leqslant \frac{C}{\cos\alpha_\mu}\, y,$$

где α_μ — максимальное значение угла касательной к

кривой $y(x)$ с осью Ox. Далее автор дает физическое истолкование рассматриваемых задач. Е. И. Ким

8110. О взаимосвязанной трансформации полей температуры и влажности в приземном слое атмосферы. Ермилов С. Н., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1958, **18**, 231—244

Изменения температуры и влажности взаимосвязаны, и задача их определения сведена к интегрированию следующей системы уравнений для отклонений температуры и влажности от начального распределения соответственно ϑ и $\varkappa$:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} = k_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{1-\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + f(t, x, z),$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} + u\frac{\partial \varkappa}{\partial x} = k_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{1-\varepsilon}\frac{\partial \varkappa}{\partial z}\right) + v(t, x, z),$$

при однородных начальных условиях, известных вертикальных распределениях температуры и влажности в натекающем потоке (при $x = 0$), ограниченности функций и их производных на бесконечности (при $z \to \infty$) и следующих краевых условиях на поверхности Земли $z = 0$, даваемых уравнением теплового баланса с условием равенства температур на подстилающей поверхности:

$$\varphi(x, t) - \varphi_1(x, t) - \Phi(x, t) + \mu\vartheta(x, t) = R(x, t),$$

$$\vartheta(x, t, 0) = \vartheta_1(x, t, 0).$$

Здесь

$$\varphi(x, t) = \rho c_p k_0 z^{1-\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

$$\Phi(x, t) = -\rho r_k k_0 z^{1-\varepsilon}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

φ_1, ϑ_1, R, f, v, μ — известные функции, u, k_0, ε, $\rho|_{z=0}$, c_p, r_k — постоянные.

Автором (Тр. ЛГМИ, 1958, вып. 8) получены изображения Лапласа ϑ и $\varkappa$ в форме интегралов с подынтегральными функциями, включающими неизвестные функции φ и Φ. Эти функции определяются из вычисленных выше пограничных данных для $z = 0$ и связи между температурой и влажностью на подстилающей поверхности $z = 0$, что приводит к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (аналогичному для обоих функций):

$$\int_0^x F(\sigma, \nu)\,d\nu - m\int_0^x F(\sigma, \nu)(x-\nu)^\beta\,d\nu = \delta T(\sigma, x),$$

где

$$F(\sigma, \nu) = (x-\nu)^{\beta-1} e^{-\sigma\frac{x-\nu}{u}}\widetilde{\varphi}(\sigma, x),$$

$\widetilde{\varphi}$ — изображение Лапласа функции φ, T — известная функция, m — параметр, δ, β — постоянные, σ — комплексная переменная в формуле преобразования Лапласа.

Решение интегрального уравнения находится в виде бесконечного ряда, расположенного по целым положительным степеням m, и последовательные приближения F_m отыскиваются приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях m. Для частного случая постоянного R доказывается равномерная сходимость найденного ряда. Для получения оригиналов необходимо принять определенные зависимости первоначальных функций от t, x, z. При некоторых частных видах распределения влажности и температуры в натекающем потоке, автор получил совпадение расчетных температур с опытными. Б. Н. Трубников

8111. Метод сферических гармоник для проблемы переноса нейтронов в цилиндрической геометрии. Дейвисон (Spherical-harmonics method for neutron-transport problems in cylindrical geometry. Davison B.), Canad. J. Phys., 1957, **35**, № 5, 576—593 (англ.)
См. РЖФиз, 1958, 22433.

8112 К. Техника регулирования. Современные теории и их приложение (Regelungstechnik. Moderne Theorien und ihre Verwendbarkeit. (Bericht über die Tagung. Heidelberg, 25.—29. Sept. 1956, veranstaltet VDI/VDE—Fachgruppe Regelungstechnik). Hrsg. Müller Gerd. München, R. Oldenbourg, 1957, XV, 483 S., ill.) (нем.)

8113 Д. Малые колебания осесимметрично нагруженных оболочек вращения. Зимин В. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1958

См. также: 7633 К, 7922, 7930, 7977, 7980, 8123, 8151, 8152, 8170, 8520—8528, 8530, 8551, 8558, 8575 К

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

8114. О периодичности решения некоторого нелинейного интегрального уравнения. Хельман (On the periodicity of the solution of a certain nonlinear integral equation. Hellman Olavi), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 2, 219—226 (англ.)

Пусть $F(t)$ — периодическая функция с периодом T в $(0, +\infty)$, принадлежащая пространству ограниченных измеримых функций

$$M(0, T),\ G(t) \in L(0, \infty),\quad S(t) \in L(-\infty, +\infty)$$

и

$$\left(\int_0^\infty |G(u)|\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |S(\lambda)|\,d\lambda\right) < 1.$$

Доказывается, что если $E(t)$ — решение уравнения

$$E(t) = F(t) - c\int_0^t G(u)du - \int_0^t G(t-\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda)\frac{e^{i\lambda E(\tau)}-1}{i\lambda}\,d\lambda,$$

где

$$c = \text{const},\ \left(c + \int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda)\frac{e^{i\lambda x(t)}-1}{i\lambda}\,d\lambda\right) \in L\quad (0, \infty)$$

при $x(t) \in L(0, T)$, то $E(nT + u)$ сходится равномерно к периодической функции $v(u)$ с периодом T, когда натуральное $n \to \infty$, причем $v(t)$ является решением уравнения

$$v(u) = F(u) - c\int_0^\infty G(u)\,du - \int_0^\infty G(\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda)\frac{e^{i\lambda v(u-\tau)}-1}{i\lambda}\,d\lambda. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) является единственным и оно может быть найдено методом последовательных приближений, исходя из начального приближения $v_0 \in M(0, T)$. М. М. Вайнберг

8115. Современное состояние теории нелинейных интегральных уравнений. Немыцкий В. В., Вайн-

берг М. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3. М., АН СССР, 1958, 140—152

8116. Об одном применении нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Гусейнов А. И., Тр. ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1953, **6**, 14—24 (рез. азерб.)

Рассматривается система нелинейных интегральных уравнений вида

$$u_i(x) = \lambda f_i(x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где f_i — заданные функции, λ — параметр, $v_i = \int_a^b \frac{k_i(x, s)\, u_i(s)}{s - x}\, ds$, причем $k_i(x, s)$ — заданные функции, $u_i(x)$ — искомые функции, а интеграл понимается в смысле главного значения. Решение системы ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|u_i(x)| < \frac{L}{|x-a|^{\alpha}\,|x-b|^{\beta}}, \qquad (2)$$

$$|u_i(x+\Delta x) - u_i(x)| < \frac{L}{|x-a|^{\alpha}\,|x+\Delta x-b|^{\beta}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|\,|x+\Delta x-b|}\right)^{\varepsilon}. \qquad (3)$$

Методом последовательных приближений доказано существование и единственность решения системы (1) для достаточно малых значений параметра λ, если в промежутке (a, b) функции $k_i(x, s)$ и $f_i(x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ удовлетворяют некоторым условиям.

Дано применение системы (1) к задаче о движении тонкого проницаемого профиля. Э. С. Цитланадзе

8117. Асимптотическое разложение в теории переноса нейтронов. Йёргенс (An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. Jörgens Konrad), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 2, 219—242 (англ.)

Плотность нейтронов в веществе $\psi(x, v, t)$, зависящая от точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, скоростей $v = (v_1, v_2, v_3)$ и времени t, удовлетворяет линейному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\partial\psi/\partial t = A\psi, \quad x \in D, \quad v \in V, \quad 0 < t < \infty,$$

где

$$A\psi \equiv -\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} v_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \sigma(x, v)\,\psi + K\psi, \quad K\psi = \int_V K(x, v, v')\,\psi(x, v', t)\, dv'.$$

Функция ψ должна удовлетворять начальному условию

$$\psi(x, v, 0) = \psi_0(x, v)$$

и граничному условию, выражающему отсутствие падающего потока нейтронов на границу D' области D. Например, в случае выпуклой области D с кусочно-гладкой границей D' это условие можно записать в виде

$$\psi(x, v, t) = 0, \quad x \in D', \quad (v, n_x) < 0,$$

где n_x — внешняя нормаль в точке x поверхности D'.

Предполагается: $\sigma(x, v)$ измерима, неотрицательна и ограничена; D и V — произвольные множества с незначительными ограничениями; оператор K ограничен в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ — комплекснозначных функций, квадрат модуля которых суммируем на $D \times V$; $\psi_0 \in \mathfrak{A}$ — области определения оператора A.

С помощью теории полугрупп операторов доказывается существование однопараметрического семейства разрешающих операторов $\mathfrak{E}(t)$, для которой A является инфинитезимальным оператором. Это есть обобщение соответствующих результатов Ленера и Уинга (РЖМат, 1958, 515, 5800), установленных для пластины при изотропном рассеянии в рамках односкоростной теории.

При дополнительных предположениях: D и V ограничены, V не содержит скоростей, близких к нулевым, $K(x, v, v')$ интегрируема и ограничена на $D \times V \times V$ (неупругое рассеяние), — доказывается полная непрерывность в $\mathfrak{H}$ операторов $\mathfrak{E}(t)$ при $t \geqslant t_0 > 0$, где t_0 оценивается через данные задачи. В случае многогруппового приближения также устанавливается полная непрерывность операторов $\mathfrak{E}(t)$.

С помощью этих результатов устанавливается, что спектр оператора A дискретный ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots$), расположен в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \|K\| - \inf\sigma(x, v)$, конечен в каждой полосе $\beta_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta_2$; каждое подпространство $\mathfrak{A}_j$, порожденное собственными и присоединенными элементами оператора A, соответствующими собственному значению λ_j, конечномерно. Пусть P_j есть оператор проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{A}_j$.

Доказывается теорема 5,2: Для любых k и $\varepsilon > 0$ существуют числа $C_k(\varepsilon)$ и $T_k(\varepsilon)$ такие, что

$$\| c(t) - \sum_{j=1}^{k} (t)\, P_j \| \leqslant c_k(\varepsilon) \exp[(\operatorname{Re}\lambda_{k+1} + \varepsilon)\, t]$$

при $t > T_k(\varepsilon)$.

Далее, выводятся некоторые достаточные условия, обеспечивающие существование собственных значений у оператора A. В заключение устанавливается справедливость аналогичных результатов в случае достаточно гладкой границы D' и кусочно-непрерывной функции $\sigma(x, v)$, если исходную задачу рассматривать в банаховом пространстве B-кусочно-непрерывных на $D \times V$ функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, с нормой

$$\|f\|_B = \sup_{(x, v) \in D \times V} |f(x, v)|.$$

В. С. Владимиров

8118. Интегральные уравнения для систем регулирования с запаздыванием. Блох З. Ш., Научн. докл. высш. школы. Электромехан. и автоматика, 1958, № 2, 54—58

Исследуется один способ построения переходных процессов в системе автоматического регулирования, содержащий звенья с запаздываниями. В. И. Зубов

См. также: 7977, 8006, 8018, 8040, 8051, 8053, 8063.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

8119. Изопериметрическое свойство гиперсферы в классе тел с конечной поверхностью. Де-Джорджи (Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita. De Giorgi Ennio), Atti Accad. nac. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, Sez. 1, **5**, № 2, 33—44 (итал.)

Устанавливается изопериметрическое свойство гиперсферы в обычной форме по отношению к любому измеримому множеству. Причем под объемом множества понимается мера по Лебегу, а поверхность определяется следующим образом: пусть E — измеримое множество в n-мерном евклидовом пространстве S_n и $\lambda > 0$. Полагаем

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n \lambda^n}} \int_E e^{-\frac{|x-\xi|}{\lambda}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Тогда по определению периметр E имеет вид:

$$p(E) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \psi(x, \lambda)| \, dx_1, \ldots, dx_n.$$

Одно из основных средств доказательства по-прежнему состоит в симметрировании по Штейнеру.

А. В. Погорелов

Примечание редакции. Во введении к работе, написанном Каччополи и Пиконе, говорится, что работа автора кладет начало исследованию важного нового класса изопериметрических вариационных задач.

8120. **Некоторые проблемы физики, изучаемые новым вариационным методом. I, II. Торио-Баладрон** (Algunos problemas físicos estudia dos por un nuevo método variacional. I, II. Torio Baladron Francisco), Rev. geofís., 1957, **16**, № 62, 179—190; 1958, **17**, № 65, 55—71 (исп.)

Пусть $w = f(z)$ — аналитическая функция,

$$w = u + iv, \; z = x + iy, \; dS^2 = du^2 + dv^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \; dS^2 = f'(z) f'(\bar{z}) (dx^2 + dy^2),$$

$$\text{тогда} \int dS = \int \sqrt{f'(z) f'(\bar{z})} \, ds.$$

Следовательно, экстремали интеграла, стоящего в правой стороне, суть линии, в которые преобразуются прямые $v = mu + n$ плоскости (u, v) посредством преобразования $w = f(z)$.

Рассмотрены функции $w = az + bz^{-1}$, $w = z^n$, $w = \sqrt{z}$, $w = {}^1/_3 z^3 - z + k$, $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ (a, b, c, d — действительные), $w = e^{z^n}$, $w = \arcsin z$, $w = \operatorname{arcth} z$ и соответствующие функционалы, экстремали которых легко получаются при помощи указанных функций.

Имеется в виду дать различные приложения к физике.

Л. Я. Цлаф

8121. **О вариационных уравнениях нелинейной теории пологих оболочек. Галимов К. З.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 65—70

Нелинейные уравнения теории пологих оболочек предлагается интегрировать методом Бубнова — Галеркина, преобразовав так функционал, чтобы члены высшего порядка малости входили в контурный интеграл. Для этого уравнения равновесия и условия совместности выражаются через функцию усилий и прогибов, а затем функционал, выражающий работу неуравновешанных сил на возможных перемещениях, преобразуется с помощью уравнений равновесия и тождеств из теории поверхностей на основании формулы Остроградского — Грина. Для некоторых условий закрепления выделенный контурный интеграл обращается в нуль.

А. С. Аржаных

8122. **Применение вариационного принципа возможных изменений напряженного состояния к нелинейной теории пологих оболочек. Галимов К. З.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 3—11

Расширенное изложение содержания предыдущей заметки (реф. 6896). И. С. Аржаных

8123. **О вариационных уравнениях теории ползучести. Задоян М. А.**, Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, **26**, № 5, 263—268 (рез. арм.)

Для идеально упругого тела, обладающего свойством ползучести (например, пластмасса), на основе зависимостей между компонентами деформации и напряжений с помощью принципа возможных перемещений устанавливаются следующие предложения: вариационный принцип о минимуме полной энергии тела, начало Кастилиано, вариационное уравнение Рейснера и формулы Клапейрона. А. С. Аржаных

См. также: 7944, 8471, 8530, 8552

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

8124. **Средние значения с точки зрения группировки и функциональных преобразований. Андреоли** (Aspetto gruppale e funzionale delle medie. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 1, 12—30 (итал.)

Приводится ряд общих соображений относительно процесса нахождения различных средних для конечных последовательностей действительных чисел. В качестве необходимого условия отмечается, что всякое среднее должно лежать между наименьшим и наибольшим из чисел такой последовательности. Произвольное монотонное в рассматриваемой области функциональное преобразование числовой оси переводит данное среднее в другое — так, среднее арифметическое может быть переведено в среднее геометрическое, среднее квадратическое или среднее гармоническое посредством преобразований $x = \log t$, $x = t^2$, $x = {}^1/_t$ (такие средние, получаемые функциональными преобразованиями из среднего арифметического, автор называет простыми). При этом, если одно функциональное преобразование более выпукло чем другое, то соответствующее среднее будет больше другого. Далее, средние разделяются на симметричные (в частности, все простые), т. е. не зависящие от порядка чисел последовательности, и несимметричные, как, например, взвешенное среднее арифметическое. С помощью применения функционального преобразования понятие веса распространяется от среднего арифметического к другим простым средним. Отмечается, что посредством предельного перехода понятие взвешенного среднего можно распространить и на бесконечные последовательности чисел. Приводятся еще некоторые соображения подобного же рода. М. К. Бокштейн

8125. **Об определении $\ln a$. Лидер** (On the definition of $\ln a$. Leader S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 8, Part 1, 622—623 (англ.)

8126. **Экспоненциальная функция. Ферис** (Exponential function. Fearns W. J.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 225 (англ.)

8127. Число компонент некоторых графиков. Уц (The number of components of certain graphs. Utz W. R.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 6, 419—420 (англ.)

Рассматривается вопрос о числе компонент графика функции

$$y^s = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}, \qquad (1)$$

где s, α_1, α_2, . . . , α_n — положительные целые числа, а $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ — действительные числа. Если s нечетно или $n = 1$, то график связен, т. е. имеет одну компоненту. Доказывается, что при четном s и $n > 1$ график функции (1) имеет

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)$$

компонент, где для всех положительных целых p

$$g(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Указывается на возможность обобщения теоремы на случай функции

$$y^s = G(x)(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n},$$

где s — положительное целое число, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые числа (не обязательно положительные), а $G(x)$ определена и сохраняет знак для всех действительных x.

Ф. Я. Ветухновский

8128. О функциях $i^n\operatorname{erfc} x$. Берлянд О. С., Соколовская Л. А., Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 11, 121—124 (рез. англ.)

Функции $i^n\operatorname{erfc} x$ являются решениями дифференциального уравнения

$$y'' + 2xy' - 2ny = 0.$$

Авторы выводят асимптотическое представление для

$$i^0\operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^7} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{m+1}\frac{2(m-1)!}{2^{2(m-1)}x^{2m-1}(m-1)!} + \ldots\right)$$

и обсуждают его применимость для вычислений.

В. В. Немыцкий

8129. К теореме Шварца — Стилтьеса о среднем значении. Сас (On a mean-value theorem of Schwarz—Stieltjes. Szász Paul), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 46—50 (англ.)

Пусть $f(x)$ — однозначная функция, определенная на $[a, b]$ и имеющая внутри этого интервала все производные до n-го порядка включительно. Если $a < a_0 < a_1 < \ldots < a_k < b$, а натуральные числа $m_0, m_1, \ldots, m_k$ таковы, что $m_0 + m_1 + \ldots + m_k = n + 1$, то коэффициент при x^n в интерполяционном полиноме Эрмита $H(x)$ порядка $\leqslant n$, удовлетворяющем условиям $H^{(\nu)}(a_i) = f^{(\nu)}(a_i)$ $(\nu = 0,1,\ldots,m_i-1;\ i = 0,1,\ldots,k)$, как известно, равен $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, где $a_0 < \xi < a_k$.

Автор устанавливает, что в том случае, когда точки a_0 и a_k стремятся к некоторому значению α внутри интервала (a, b), где существует отличная от нуля производная $f^{(n+1)}(\alpha)$, при условии $\left|\frac{a_0-\alpha}{a_k-a_0}\right| \leqslant L$, $\left|\frac{a_k-\alpha}{a_k-a_0}\right| \leqslant L$, ($L$ — константа),

$$\frac{1}{a_k-a_0}\left(\xi - \frac{m_0a_0+\ldots+m_ka_k}{m_0+\ldots+m_k}\right) \to 0.$$

Если производная $f^{(n)}(x)$ монотонна в (a, b), а отношение $\varphi(u, v) = \frac{f^{(n)}(u)-f^{(n)}(v)}{u-v}$ в интервале (a_0, a_k) ограничено, то в обозначениях $\mu = \inf_{u,\,v\in(a_0,\,a_k)} |\varphi(u, v)|$, $M = \sup_{u,\,v\in(a_0,\,a_k)} |\varphi(u, v)|$, при условии $M \neq 0$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{a_k-a_0}\left|\xi - \frac{m_0a_0+\ldots+m_ka_k}{m_0+\ldots+m_k}\right| \leqslant 1-\mu/M,$$

которое может обратиться в равенство тогда и только тогда, когда $\mu = M$.

Приведенные утверждения содержат в себе результаты, полученные ранее Rothe для интерполяционных многочленов Лагранжа (Rothe R., Math. Z., 1921, **9**, 300—325).

А. Ф. Тиман

8130. Об одной задаче Нельдера и Хаммерсли. Дворецкий (On a problem of Nelder and Hammersley. Dvoretzky A.), Bull. Res. Council Israel, 1957, **A6**, № 2, 115—118 (англ.)

Теорема 1. Пусть при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ определена вещественная, неотрицательная, симметрическая и дифференцируемая функция $\varphi(x, y)$ такая, что $\lim_{x^2+y^2\to\infty}\varphi(x, y) = 0$, причем существует функция $g(x)$, для которой $g(x)\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}$ является выпуклой функцией от x при любом y. Тогда функция распределения $F(x)$, сообщающая интегралу

$$I(F) = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x, y)\,dF(x)\,dF(y)$$

максимальное значение, является ступенчатой функцией, имеющей не более двух точек разрыва. В случае двух точек разрыва одна есть $x = 0$.

Теорема 2. Если $\lim_{x^2+y^2\to\infty}\varphi(x, y) = -\infty$ и если существует функция $g(x)$ такая, что $g(x)\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}$ является относительно x полиномом m-й степени, то функция $F(x)$, для которой $I(F)$ = максимуму, будет ступенчатой функцией, имеющей не более, чем $[m/2]+1$ точек разрыва. Если m четное и если $F(x)$ имеет $m/2+1$ разрывов то один разрыв должен быть при $x = 0$.

Ю. Л. Рабинович

8131. Асимптотическое разложение многократных интегралов и метод стационарной фазы. Джонс, Клайн (Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationary phase. Jones Douglas S., Kline Morris), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 1, 1—28 (англ.)

Решение многих проблем теории дифракции света получается в виде интеграла

$$J = \iint_D g(x, y)\,e^{ikf(x,\,y)}\,dxdy, \qquad (1)$$

где $g(x, y)$, $f(x, y)$ — действительные функции, k — действительное число. Обычно найти значение интеграла в явном виде невозможно, а потому отыскивается разложение его для больших значений k в асимптотические ряды по степеням $1/k$.

Различными авторами было изучено асимптотическое разложение интеграла при предположении аналитичности внутри и на границе области D функций $g(x, y)$ и $f(x, y)$ (РЖМат, 1956, 2299) и при предположении существования лишь конечного числа производных у $f(x, y)$, $g(x, y)$ (РЖМат, 1957, 2470).

В работе дается новый метод получения асимптотического разложения, основанный на хорошо изученном асимптотическом разложении интегралов $\int_a^B h(t)\, e^{ikg(t)}\, dt$.

Метод авторов, хотя и не является более общим, чем метод Фока, но имеет по сравнению с ним следующие преимущества: во-первых, вычисления при его употреблении более просты и, во-вторых, он применим при асимптотическом разложении кратных интегралов выше второго измерения.

Предполагается, что функции $f(x, y), g(x, y)$ имеют производные любого порядка всюду внутри и на границе D, граница области кусочно бесконечно дифференцируема и если $\Phi(x, y) = 0$ — уравнение какого-либо ее куска, то Φ'_x и Φ'_y не равны одновременно нулю ни в какой точке границы.

Асимптотическое разложение интеграла (1) выводится из представления его в виде

$$J = \int_{m-\varepsilon}^{M-\varepsilon} e^{ikt}\, h(t)\, dt,$$

где

$$h(t) = \iint_D g(x, y)\, \delta\{t - f(x, y)\}\, dxdy,$$

M и m — соответственно верхняя и нижняя грани $f(x, y)$ в D, δ — известная функция Дирака.

Б. М. Гагаев

8132. Остаточный член в лемме Ватсона. Джефрис (The remainder in Watson's lemma. Jeffreys Harold), Proc. Roy. Soc., 1958, **A248**, № 1252, 88—92 (англ.)

Рассматривается интеграл $I = \int_0^\infty e^{-tx} x^m f(x)\, dx$, где $m > -1$, $f(0) \neq 0$, $f(x)$ интегрируема в любом конечном отрезке действительной оси и аналитична в окрестности $x = 0$, $|t|$ велико и $|\arg t| \leqslant \pi/2 - \delta < \pi/2$. Пусть интеграл сходится для некоторого t, а следовательно, и для всех больших значений $\mathrm{Re}\,(t)$. Тогда

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + R_n, \text{ где } u_k = \frac{(m+k)!}{k!\, t^{m+k+1}} f^{(k)}(0),$$

$$R_n = \int_0^\infty e^{-tx} x^m dx \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\, du.$$

Если $x_0 = re^{i\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ — ближайшая к точке $x = 0$ особая точка $f(x)$, в окрестности которой

$$f(x) \cong \frac{M}{(x_0 - x)^p},$$

то при достаточно большом n

$$u_n \cong \frac{(m+n)!}{n!\, t^{m+n+1}} Mp(p+1) \ldots (p+n-1)\, x_0^{-p-n},$$

$$R_n \cong \frac{N(m+n)!}{n!\, t^{m+n+1}} \frac{r^{-p-n} e^{-(p+n)i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} \left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right],$$

где $N = Mp(p+1) \ldots (p+n-1)$. В этом случае $\frac{R_n}{u_n} \cong \frac{1}{1 - e^{-i\alpha}}$. Наилучшее приближение достигается при значении $n = [rt - p - m + 2/3]$, обращающем u_n в минимум.

Ю. Л. Рабинович

8133 К. Дилогарифмы и связанные с ними функции. Левин (Dilogarithms and associated functions. Lewin Leonard. London, Macdonald, 1958, xvi, 353 pp., ill., 65 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 449, 7 (англ.)

8134 К. Элементы математического анализа. 6-е изд. Бонферрони (Elementi di analisi matematica. 6-a ed. Bonferroni Carlo Emilio. Padova, Ed. tip., Casa ed. dott. A. Milani, 1957, xvi, 619 p., 3000 L.,—Litogr.), Bibliogr. ital., 1957. (1958), **91**, № 680, 833 (итал.)

8135 К. Математический анализ. 3-е изд. Делаше (L'analyse mathématique. 3-e éd. Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1958, 120 p., ill., 177 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 23, 615 (франц.)

8136 К. Лекции по математическому анализу. Сансоне (Lezioni di analisis matematica. Redatte per uso degli studenti. Vol. 2. 8 ed. Sansone Giovanni. Padova Ed. CEDAM, 1954, XIII, 529 p., ill., 3500 L.—Litogr.) (итал.)

Перевод из Zbl. Math., 1955, **55**, № 6—10, 278

8137 К. Математический анализ в заданиях. Ч. 2. Изд. 2. Крысицкий, Влодарский (Analiza matematyczna w zadaniach. Cz. 2. Wyd. 2. Krysicki Włodzimierz, Włodarski Lech. Warszawa, PWN, 1958, 431 s., il., 30 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 14, 183 (польск.)

8138 К. Упражнения и дополнительные вопросы математического анализа. Часть II. Трикоми (Esercizi e complementi di analisi matematica. Parte II. A cura del Tino Zeuli. Tricomi Francesco. 2. ed. Padova, Ed. CEDAM, 1953, XII, 487 p., ill., 3200 L.—Litogr.) (итал.)

Перевод из Zbl. Math., 1955, **52**, № 1—5, 45

8139 К. Сборник задач по математическому анализу. (Учебн. пособие для пед. ин-тов). 2 изд. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. М., Учпедгиз, 1957, 195 стр., илл., 5 р. 45 к.

8140 К. Дифференциальное и интегральное исчисление; учебное пособие в виде вопросов и ответов. 99 вопросов и ответов в виде определений, доказательств и полностью решенных примеров, а также дифференциальное и интегральное исчисление для студентов при повторении и подготовке к экзаменам. Хемнициус (Differential- und Integralrechnung. In Frage und Antwort. 99 Fragen und Antworten in Form von Definitionen, Beweisen und vollst. durchgerechneten Beisp. aus d. Differential- und Integralrechng zur Wiederholg und Prüfungsvorbereitg f. Studierende. Chemnitius F. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1957, XIV, 158 S., ill., 9.20 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 11, 753 (нем.)

8141 К. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление с приложениями в различных областях. 7-е изд. Бет (Inleiding tot de differentiaalen integraalrekening. Met toepassingen op verschillende gebieden. 7e dr. Beth H. J. E. Groningen, P. Noordhoff, 1958, vii, 423 blz., 15.60 fl.), Nieuwe uitgaven Nederl., 1958, **20**, № 4, 49 (голл.)

8142 К. Сборник задач и теорем по дифференциальному и интегральному исчислению. Ч. II. Интегральное исчисление. 2-е перераб. изд. Брадистилов (Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане. Ч. II. Интегрално смятане. 2. прераб. изд. Брадистилов Георги. София, Наука и изкуство, 1958, 464 с., ил., 14 лв.), Бълг. книгопис, 1958, **62**, № 6, 6 (болг.)

8143 К. Упражнения по инженерной математике. А. VII. Интегрирование функций многих переменных. Байчаи (Müszaki matematikai gyakorlatok. A. VII. Többváltozos függvények integralása. Bajcsay Pál. Budapest, Tankönyvkiadó, 1953, 105 l., ill., 14.50 Ft.) (венг.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

8144. Непрерывные и интегральные методы суммирования типа метода Бореля. Влодарский (Continuous and integral methods of summability of Borel's kind. Włodarski L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 70 (англ.)

8145. Вторая теорема совместимости для абсолютной суммируемости по Риссу. Прасад (The second theorem of consistency for absolute Riesz summability. Prasad B. N.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 64—65 (англ.)

8146. Об остаточном члене в тауберовой теореме. Ганелиус (On the remainder in a Tauberian theorem. Ganelius Tord. Kungl. Fysiog. Sällsk. i Lund Förh. 1954, (1955), 24, № 20, 6 pp. (англ.)

Пусть $\alpha(\lambda)$ — действительная функция ограниченной вариации, определенная для $\lambda \geqslant \lambda_0$ так, что 1) $\alpha(\lambda_0) = 0$, 2) $\alpha(\lambda) + K(\lambda - \lambda_0)^{\nu}$ — неубывающая и 3) $\int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda t} d\alpha(\lambda) = O[\exp(-ct^{-\varepsilon})]$ для $t \to +0$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$, K, c и ν — положительные константы и $\nu \geqslant 2\varepsilon/(1+\varepsilon)$. Тогда, если $\gamma \geqslant 1$,

$$\int_{\lambda_0}^{x} \left(\frac{x-\lambda}{x-\lambda_0}\right)^{\gamma-1} d\alpha(\lambda) = O(x^{\nu - \gamma\varepsilon/(1+\varepsilon)}) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Эта теорема доказывается при помощи методов Фрёйда (Freud G., Acta math. Acad. sci. hung., 1951, 2, 299—308). Важное приложение теоремы дается в работе Гординга (реф. 8044). E. Hille

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 147.

8147. О множителях суммируемости для двойных рядов. Кангро Г., Tartu ülikooli toimetised. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, вып. 46, 3—42 (рез. эст.)

Излагается теория множителей суммируемости для двойных рядов. Автор использует метод, разработанный (для простых рядов) в основном Пейеримхоффом (Peyerimhoff A., Math. Z., 1951, 55, 23—54; РЖМат, 1953, 800 и др.).

Главные результаты статьи были ранее опубликованы автором (реф. 8148). Библ. 20 назв. М. П. Щеглов

8148. О распространении метода Пейеримхоффа на двойные ряды. Кангро Г., Докл. АН СССР, 1956, 107, № 5, 629—632

В работе Пейеримхоффа (Peyerimhoff A., Math. Z. 1951, 55, 23—54) дан метод нахождения так называемых множителей суммируемости для некоторого класса матричных методов суммирования простых рядов. В данной работе метод Пейеримхоффа распространяется на методы суммирования двойных рядов с помощью некоторых четырехмерных матриц. Без доказательств приводятся две теоремы общего характера, устанавливающие необходимые и достаточные условия для того, чтобы данные числа были бы множителями суммируемости или сходимости определенного рода. Приводятся результаты применения этих теорем к методам суммирования (двойных рядов) Чезаро и взвешенных средних арифметических.

В. М. Даревский

8149. Дельта-функция Дирака и суммирование некоторых рядов бесселевых функций. Спигел (The Dirac delta function and the summation of certain Bessel series. Spiegel Murray R.), J. Math. and Phys., 1958, 36, № 4, 378—380 (англ.)

Выводятся, при помощи разложения дельта-функции в ряд Фурье, формулы для сумм вида

$$A_k = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi k m) J_0(mx), \quad B_k = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi k m) Y_0(mx).$$

Фактически метод автора заключается в использовании формулы Пуассона для преобразования Фурье и не требует использования дельта-функции. Н. Я. Виленкин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8150. Некоторые свойства функции Λ_0 Хеймана. Фемпл (Some properties of Heuman's function Λ_0. Fempl S.), J. Math. and Phys., 1958, 37, № 2, 137—142 (англ.)

Выводится ряд соотношений, связанных с нормальным эллиптическим интегралом третьего рода

$$\Lambda_0(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{k'^2 \sin\beta \cos\beta \, \Delta'\beta}{k'^2 \cos^2\beta + k^2 \cos^2\psi \Delta\psi} d\psi,$$

где $\Delta\theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}$, $\Delta'\theta = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\theta}$, $0 \leqslant k \leqslant 1$, $k^2 + k'^2 = 1$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — значения углов, заключенных в интервале $(0, \pi/2)$ и удовлетворяющих рекуррентному соотношению $\cos\beta_{\nu+1} = \cos\beta_1 \cos\beta_\nu - \sin\beta_1 \sin\beta_\nu \, \Delta'\beta_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m-1$). Тогда имеет место формула умножения

$$m\Lambda_0(\alpha, \beta) = \Lambda_0(\alpha, \beta_m) + 2k'^2 \pi^{-1} F(\alpha) \sin\beta_1 \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin\beta_\nu \sin\beta_{\nu+1},$$

где $F(\alpha)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

На основании этой формулы получается ряд равенств, выражающих различные специальные значения функции $\Lambda_0(\alpha, \beta)$.

Так, например, если $\operatorname{tg}^2\beta = k^{-1}$, то $\Lambda_0(\alpha, \beta) = 1/2 + k'^2 \pi^{-1} F(\alpha) \sin^2\beta$. Если β_1 определяется равенством $\sin\beta_1 = 1/2\left(1 - \sqrt{1+q} + \sqrt{2 - q + 2\sqrt{1 - q - q^2}}\right)$, где $q^3 = \frac{4k^2}{k'^4}$, кроме того, если $\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta = k^{-1}$, то $\Lambda_0(\alpha, \beta) = \frac{2}{3} + \frac{k'^2 F(\alpha)}{3\pi\Delta'\beta_1} \sin^2\beta (2 - \sin\beta)$. А. К. Харадзе

8151. Номограммы и формулы для определения нулей уравнений, содержащих функции Бесселя. Керкем (Graphs and formulas for zeros of cross product Bessel functions. Kirkham Don), J. Math. and Phys., 1958, 36, № 4, 371—377 (англ.)

Построены номограммы для определения корней уравнений

$$J_n(x) Y_n(kx) - J_n(kx) Y_n(x) = 0, \quad (1)$$

$$J'_n(x) Y'_n(kx) - J'_n(kx) Y'_n(x) = 0, \quad (2)$$

$$J'_n(x) Y_n(kx) - J_n(kx) Y'_n(x) = 0, \quad (3)$$

$$J_n(x) Y'_n(kx) - J'_n(kx) Y_n(x) = 0, \quad (4)$$

встречающихся во многих задачах математической физики.

Полученные номограммы позволяют находить приближенные значения нескольких первых корней рассматриваемых уравнений для любых положительных k ($k \neq 1$) и $n = 0, 1, 2, 3$ (для уравнения (2) также $n = 4$).

Н. Н. Лебедев

8152. Некоторые разрывные интегралы, содержащие функции Бесселя. Пинни (Some discontinuous Bessel integrals. Pinney Edmund), J. Math. and Phys., 1958, 36, № 4, 362—370 (англ.)

Исследуются некоторые интегралы с функциями Бесселя, представляющие разрывные функции, равные тождественно нулю на заданной совокупности равных и равноотстоящих интервалов. Типовым примером может служить интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isy} J_n(bs)\, p(s)\, ds,$$

где $p(s)$ — произвольная непрерывная периодическая (с периодом 2π) функция, для которой рассматриваемый интеграл сходится, n — целое неотрицательное число. Получены формулы, дающие значения данного и родственных ему интегралов в виде конечных сумм, содержащих функции Чебышева. Результаты работы могут найти применение для улучшения сходимости разложений по собственным функциям и решения некоторых краевых задач математической физики. Н. Н. Лебедев

8153. **О нулях одной функции, содержащей функции Бесселя. Гриффит** (On the zeros of a certain function involving Bessel functions. Griffith James L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1957, **91**, № 4, 190—196 (англ.)

В статье исследуются нули функции

$$w(z) = zH^{(1)}_{\nu+1}(z) - CH^{(1)}_{\nu}(z), \quad -\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2, \ \nu \geqslant 0,$$

где C — вещественная постоянная, $H^{(1)}_{\nu}(z)$ — функция Ганкеля 1-го рода. С помощью методов теории функций устанавливается ряд теорем о распределении нулей $w(z)$ на плоскости комплексного переменного. Аналогичные результаты получены для функции

$$w^*(z) = zK_{\nu+1}(z) - CK_{\nu}(z), \quad -\pi < \arg z < \pi, \ \nu \geqslant 0,$$

содержащей модифицированные цилиндрические функции. Н. Н. Лебедев

8154. **Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах. Березин Ф. А., Карпелевич Ф. И.**, Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 9—12

Вычисляются радиальные части операторов Лапласа и зональные сферические функции для комплексных пространств Грассмана $\mathfrak{M}^+_{n,k}$ $(n \geqslant 2k)$ и связанных с ними симметрических пространств $\mathfrak{M}^-_{n,k}$ и $\mathfrak{M}^0_{n,k}$. Для пространства $\mathfrak{M}^+_{n,k}$ радиальная часть $\mathring{\Delta}$ оператора Лапласа имеет вид:

$$\mathring{\Delta} = \frac{1}{j(t)} P(L_1, \ldots, L_k) j(t), \text{ где } j(t) = \prod_{p<q} (\sin^2 t_p - \sin^2 t_q),$$

$$L_p = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t_p^2} + \frac{1}{2}[\operatorname{ctg} 2t_p + (n-2k)\operatorname{ctg} t_p]\frac{\partial}{\partial t_p},$$

$P(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольный симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_k$, а $t_1, \ldots, t_k$ — координаты, в которых преобразования группы Вейля сводятся к перестановкам координат и изменению их знаков. Для зональной сферической функции дается выражение

$$\varphi = \frac{d(r_1, \ldots, r_k)}{j(t)} \lambda(r_1, \ldots, r_k),$$

где $d(r_1, \ldots, r_k) = \det \| J^m_{r_j}(x_i) \|$, $m = n - 2k$, $x_i = \sin^2 t_i$,

$$J^m_r = F(m + r + 1, -r, m + 1; x),$$

$$\lambda(r_1, \ldots, r_k) = \frac{1}{\prod\limits_{i<j}(\rho_i - \rho_j)} \prod_{s=1}^{k-1} s!(m+s)^{k-s}, \ \rho_i = -r_i(m+1+r_i).$$

Числа $r_1, \ldots, r_k$ связаны с гомоморфизмом $\Delta \to \lambda(\Delta)$, задающим оператор Лапласа, и старшим весом представления, к которому принадлежит φ. Аналогичные формулы получены для симметрического пространства $\mathfrak{M}^-_{n,k}$, двойственного к $\mathfrak{M}^+_{n,k}$ по Картану, и пространства $\mathfrak{M}^0_{n,k}$ в известном смысле предельного для $\mathfrak{M}^+_{n,k}$ и $\mathfrak{M}^-_{n,k}$. Н. Я. Виленкин

8155. **Некоторые ортогональные функции, связанные с полиномиальными тождествами. Робертс** (Some orthogonal functions connected with polynomial identities. Roberts J. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 364—370 (англ.)

Рассматриваются тождества вида

$$\sum_{j=0}^{N} c_j P(x + j) = 0,$$

где $P(x)$ — многочлен. Например, пусть $b_j(n)$ — коэффициент при b^j в b-ичной записи числа n,

$$v_b(n) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(n)$$

и

$$u_b(n+1) = (-1)^{v_b(n)} \prod_{j=0}^{\infty} \binom{b-1}{b_j(n)}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{b^k - 1} u_b(n+1) P(x+n) = 0$$

для всех многочленов, степень которых меньше, чем $k(b-1)$. Полагая $t_n(x) = u_b(1 + [b^{n+1}x])$, $0 \leqslant x < 1$, $t_n(x+1) = t_n(x)$, автор получает систему функций, напоминающую систему функций Уолша. В частности, эта система функций ортогональна. Н. Я. Виленкин

8156. **Произведение некоторых многочленов, аналогичных многочленам Эрмита. Карлиц** (The product of certain polynomials analogous to the Hermite polynomials. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 723—725 (англ.)

Формулы, аналогичные известным формулам для произведения многочленов Эрмита, выводятся для многочленов, порожденных производящей функцией e^{3xt-t^3}. Н. Я. Виленкин

8157. **Гипергеометрические функции. Нёрлунд** (Hypergeometric functions. Nørlund N. E.), Acta math., 1955, **94**, 289—349 (англ.)

Рассматриваются гипергеометрическое уравнение n-го порядка

$$z^n(1-z)\frac{d^n y}{dz^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu - b_\nu z) z^\nu \frac{d^\nu y}{dz^\nu} = 0 \qquad (1)$$

и гипергеометрические ряды n-го порядка

$$F\left(\begin{matrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1} \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_\nu (\alpha_2)_\nu \ldots (\alpha_n)_\nu}{\nu!\,(\gamma_1)_\nu \ldots (\gamma_{n-1})_\nu} z^\nu,$$

сходящиеся при $|z| < 1$; $(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)$ $(\alpha)_0 = 1$. Особой точке $z = 0$ уравнения (1) принадлежит каноническая фундаментальная система решений

$$y_s(z) = z^{\gamma_s} F\left(\begin{matrix} \alpha_1 + \gamma_s & \alpha_2 + \gamma_s \ldots \alpha_n + \gamma_s \\ \gamma_s - \gamma_1 + 1 & \gamma_s - \gamma_2 + 1 \ldots \gamma_s - \gamma_n + 1 \end{matrix} \middle| z\right)$$

$(s = 1, 2, \ldots, n)$, причем параметры α_s и γ_s определяются тождествами

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x(x-1)\dots(x-\nu+1) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_n),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\, x(x-1)\dots(x-\nu+1) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_n).$$

$$(a_n = b_n = 1).$$

Предполагается, что ни одна из разностей $\alpha_i - \alpha_j$ и $\gamma_i - \gamma_j$ при $i \neq j$ не является целым числом. Особой точке $z = \infty$ принадлежит фундаментальная система

$$\widetilde{y}_s(z) = z^{-\alpha_s} F\left(\begin{matrix}\alpha_s+\gamma_1 & \alpha_s+\gamma_2 \dots \alpha_s+\gamma_n \\ \alpha_s-\alpha_1+1 & \alpha_s-\alpha_2+1 \dots \alpha_s-\alpha_n+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z}\right), \quad (2)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n).$$

Ряды (2) сходятся при $|z| > 1$. Пусть

$$\overset{*}{y}_s(z) = y_s(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_\nu+\gamma_s)}{\Gamma(\gamma_s-\gamma_\nu+1)};$$

$$\overset{*}{\widetilde{y}}_s(z) = \widetilde{y}_s(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_s+\gamma_\nu)}{\Gamma(\alpha_s-\alpha_\nu+1)}.$$

Аналитические продолжения функций $\overset{*}{y}_s(z)$ и $\overset{*}{\widetilde{y}}_s(z)$ связаны соотношениями

$$\overset{*}{y}_s(z) = \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{\widetilde{y}}_j(z)\, \frac{e^{\pi i(\alpha_j+\gamma_s)}}{\sin\pi(\alpha_j+\gamma_s)}\, \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\sin\pi(\alpha_j+\gamma_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n}{}'\sin\pi(\alpha_\nu-\alpha_j)};$$

$$\overset{*}{\widetilde{y}}_s(z) = \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{y}_j(z)\, \frac{e^{\pi i(\alpha_s+\gamma_j)}}{\sin\pi(\alpha_s+\gamma_j)}\, \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\sin\pi(\alpha_\nu+\gamma_j)}{\prod_{\nu=1}^{n}{}'\sin\pi(\gamma_\nu-\gamma_j)}$$

При исследовании особой точки $z = 1$ допускается, что число $\beta_n = n - 1 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)$ — нецелое. Тогда особой точке $z = 1$ принадлежит единственное решение $y = \zeta_n(z)$ уравнения (1) с характеристическим показателем β_n, разлагающееся в круге $|z-1| < 1$ в ряд

$$\zeta_n(z) = z^{\gamma_i}(1-z)^{\beta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c^{(i)}_{\nu,n}}{(\beta_n+1)_\nu}(1-z)^\nu, \quad (3)$$

где $c^{(i)}_{0,n} = 1$. Если $\operatorname{Re}(\beta_n) > \operatorname{Re}(\beta_{n-1}) > -1$, то

$$\zeta_n(z) = \frac{\Gamma(\beta_n+1)\, z^{\gamma_n}}{\Gamma(1-\alpha_n-\gamma_n)\Gamma(\beta_{n-1}+1)} \int_z^1 t^{\alpha_n-1}(t-z)^{-\alpha_n-\gamma_n}\zeta_{n-1}(t)\,dt.$$

Дифференциальное уравнение (1) не меняется, если заменить z на $\frac{1}{z}$ и переставить между собой α и γ. Отсюда следует, что из решения (3), определенного в круге $|z-1| < 1$, можно составить второе решение, определенное в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) < 1/2$ и имеющее вид

$$\widetilde{\zeta}_n(z) = z^{-\alpha_i}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\beta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\widetilde{c}^{(i)}_{\nu,n}}{(\beta_n+1)_\nu}\left(\frac{z-1}{z}\right)^\nu,$$

где $\widetilde{c}^{(i)}_{\nu,n}$ — выражения, получающиеся из $c^{(i)}_{\nu,n}$ перестановкой α и γ. Далее

$$\int_1^\infty z^{x-1}\widetilde{\zeta}_n(z)\,dz = \Gamma(\beta_n+1)\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s-x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)},$$

$$\widetilde{\zeta}_n(z) = \frac{\Gamma(\beta_n+1)}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} z^{-x}\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_s-x)}{\Gamma(1-\gamma_s-x)}\,dx,$$

если $z > 1$, причем $\varkappa < \operatorname{Re}(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \dots, n$, $\operatorname{Re}(\beta_n) > -1$. Условие на β_n можно отбросить, если заменить прямолинейные интегралы контурными и интегрировать вдоль линий, обходящих точку $z = 1$. Для функций $\zeta_n(z)$ и $\widetilde{\zeta}_n(z)$ даются интегральные представления.

Решения $\overset{*}{y}_s(z)$ и $\overset{*}{\widetilde{y}}_s(z)$ представимы в виде интегралов

$$\overset{*}{y}_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa_1-i\infty}^{\varkappa_1+i\infty} \frac{z^x \pi e^{\pi i(\gamma_s-x)}}{\sin\pi(\gamma_s-x)} f(x)\,dx,$$

$$\overset{*}{\widetilde{y}}_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa_2-i\infty}^{\varkappa_2+i\infty} \frac{z^x \pi e^{\pi i(\alpha_s+x)}}{\sin\pi(\alpha_s+x)} \widetilde{f}(x)\,dx,$$

где

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(x+\alpha_\nu)}{\Gamma(x+1-\gamma_\nu)}; \quad \widetilde{f}(x) = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(\gamma_\nu-x)}{\Gamma(1-\alpha_\nu-x)}$$

причем $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ должны удовлетворять условиям $\operatorname{Re}(\alpha_i) - m < \varkappa_1 < \operatorname{Re}(\gamma_s) + m$, при $i = 1, 2, \dots, n$ и любом целом неотрицательном m в предположении, что $\operatorname{Re}(\alpha_i+\gamma_s) > 0$ при всех i и s.

Положив $\overset{*}{y}_s(z) - \overset{*}{y}_r(z) = \frac{\sin\pi(\gamma_r-\gamma_s)}{\pi} y_{r,s}(z)$, мы получим

$$y_{r,s}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty} \frac{\pi^2 z^x f(x)\,dx}{\sin\pi(\gamma_r-x)\sin\pi(\gamma_s-x)}. \quad (4)$$

Интегралы (4) сходятся, если $-2\pi < \arg z < 2\pi$, и представляют решения, регулярные при $z = 1$. Функции $y_{s,1}(z), \dots, y_{s,s-1}(z), y_{s,s+1}(z), \dots, y_{s,n}(z)$ линейно независимы и образуют вместе с $\zeta_n(z)$ фундаментальную систему. Функции $\overset{*}{y}_s(z)$ выражаются через $\widetilde{\zeta}_n$ в виде интегралов

$$y_s^*(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta_n+1)}\int_0^z t^{\gamma_s-1}\zeta_n\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{1-t},$$

откуда следует, что

$$y_{r,s}(z) = \frac{\pi}{\sin\pi(\gamma_r-\gamma_s)}\frac{1}{\Gamma(\beta_n+1)}\int_0^z \frac{t^{\gamma_s}-t^{\gamma_r}}{1-t}\zeta_n\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t}, \quad (5)$$

причем предполагается, что $\mathrm{Re}(\gamma_s) > \mathrm{Re}(\gamma_r) > -\mathrm{Re}(\alpha_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Соотношение (5) приводит к разложению

$$y_{r,s}(z) = Cz^{\gamma_r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma_r-\gamma_s+1)_\nu}{(\nu+1)!}F\left(\begin{matrix}-\nu,\ \alpha_1+\gamma_r,\ \alpha_2+\gamma_r,\ldots\alpha_n+\gamma_r\\ \gamma_r-\gamma_1+1,\ \gamma_r-\gamma_2+1,\ldots\gamma_r-\gamma_n+1\end{matrix}\middle| z\right),$$

сходящемуся при $|z-1|<1$, причем

$$C = \frac{\pi(\gamma_r-\gamma_s)}{\sin\pi(\gamma_r-\gamma_s)}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_i+\gamma_r)}{\Gamma(\gamma_r-\gamma_i+1)}.$$

Если $\beta_n = p_n$ — целое отрицательное число, то выражение (3) теряет смысл и для этого случая проводится специальное исследование. Ю. Л. Рабинович

8158. Трансцендентные теоремы сложения для гипергеометрической функции Гаусса. Рагаб (Transcendental addition theorems for the hypergeometric function of Gauss. Ragab F. M.), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 1, 141—145 (англ.)

Показано, что контурные интегралы, содержащие произведение гипергеометрических функций Гаусса с параметрами, линейно зависящими от переменной интегрирования, могут быть в определенных случаях выражены в замкнутой форме через гипергеометрическую функцию. Полученные формулы можно интерпретировать как трансцендентные теоремы сложения для гипергеометрических функций, рассматриваемых как функции своих параметров. Аналогичные результаты найдены для вырожденных гипергеометрических функций. Н. Н. Лебедев

8159. Интегральные представления типа Лапласа для некоторых гипергеометрических функций трех переменных. Саран (Integral representations of Laplace type for certain hypergeometric functions of three variables. Saran Shanti), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 1-3, 133—143 (итал.)

Для гипергеометрических функций трех переменных F_E, F_F, F_G, F_K, F_M, F_N, F_P, F_R, F_S, F_T, введенных автором и рассмотренных им в предыдущих работах (РЖМат, 1955, 854; 1956, 5962, 7430), даются интегральные представления типа Лапласа как в виде простых, так и двойных интегралов. Так, например, функция F_E, определяемая рядом

$$F_E(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_2; c_1, c_2, c_3; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1, m+n+p)(b_1, m)(b_2, n+p)}{(1, m)(1, n)(1, p)(c_1, m)(c_2, n)(c_3, p)}x^m y^n z^p,$$

имеет следующее интегральное представление

$$F_E = \frac{1}{\Gamma(a_1)}\int_0^\infty e^{-t}t^{a_1-1}{}_1F_1(b_1; c_1; xt)\,\Psi_2(b_2; c_2, c_3; yt, zt)\,dt,$$

$$\mathrm{Re}(x+y+z+2\sqrt{yz}) < 1, \quad \mathrm{Re}(a_1) > 0,$$

где ${}_1F_1$ — общепринятое обозначение вырожденной гипергеометрической функции одной переменной, а Ψ_2 означает одну из вырожденных функций от двух переменных (РЖМат, 1955, 3285 К).

Точно также функция F_S, определяемая рядом

$$F_S(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_1, c_1; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1, m)(a_2, n+p)(b_1, m)(b_2, n)(b_3, p)}{(1, m)(1, n)(1, p)(c_1, m+n+p)}x^m y^n z^p,$$

представляется следующим интегралом:

$$F_S = \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p+t)}t^{a_1-1}p^{a_3-1}\times {}_3\Phi(b_1, b_2, b_3; c_1; xt, yp, zp)\,dp\,dt$$

$\mathrm{Re}(x) < 1$, $\mathrm{Re}(y+z) < 1$, $\mathrm{Re}(a_1) > 0$, $\mathrm{Re}(a_2) > 0$,

где

$${}_3\Phi(a_1, a_2, a_3; c_1; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1, m)(a_2, n)(a_3, p)}{(1, m)(1, n)(1, p)(c_1, m+n+p)}x^m y^n z^p.$$

А. К. Харадзе

8160. О функции Рамануджана. Омар Али Сиддики (On a function of Ramanujan. Omar Ali Siddiqi.), Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A46**, № 5, 371—376 (англ.)

Доказано, что

$$(-1)^n\left[\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right]_{t=1+0} \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{|n-1}t^{n-1}e^{-nt}$

при $t \geqslant 1$ — функция Рамануджана. При $t \geqslant n$ доказано, что $(-1)^r d^r\varphi/dt^r > 0$, если $r = 1, 2, \ldots, n$.

Н. Я. Виленкин

8161. Асимптотические разложения чисел Стирлинга первого рода. Мозер, Уайман (Asymptotic development of the Stirling numbers of the first kind. Moser L., Wyman M.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 133—146 (англ.)

Числа Стирлинга первого рода S_n^m определяются как коэффициенты при степенях x в выражении

$$(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{m=1}^{n}S_n^m x^m, \quad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Автором выводятся различные асимптотические формулы для S_n^m, применимые при различных предположениях.

Например, при фиксированном m и $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула Жордана

$$|S_n^m| \sim \frac{(n-1)!}{(m-1)!}(\log n + \gamma)^{m-1}.$$

Если $h(n) \leqslant m \leqslant n - O(n^\alpha)$, где $0<\alpha<1$, $\lim_{n\to\infty}h(n) = \infty$, то имеет место асимптотическая формула

$$S_n^m \sim \frac{(-1)^{n+m}\Gamma(n+R)}{(2\pi H)^{1/2}R^m\Gamma(R)}\left(1 + \frac{3c_4}{H^2} - \frac{15c_3^2}{2H^3} + \ldots\right),$$

где R — корень уравнения

$$\sum_{h=0}^{n-1}\frac{R}{R+h}=m,$$

$$H=m-\sum_{h=0}^{n-1}\frac{R}{(R+h)^2};\quad c_3=\frac{H}{2}-\frac{m}{3}+\frac{1}{3}\sum_{h=0}^{n-1}\frac{R}{(R+h)^3};$$

$$c_4=\frac{1}{24}\left[6m-11H+36c_3-6\sum_{h=0}^{n-1}\frac{R^4}{(R+h)^4}\right]$$

Кроме того, имеет место асимптотическая формула

$$S_n^m\sim\frac{(-1)^{n+m}n!\,u^m}{m!\,(1-e^{-u})^n\,(2\pi m K_1)^{1/2}}\left\{1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{K_3}{8K_1^2}-\frac{5K_2^2}{24K_1^3}\right)\frac{1}{m}+\ldots\right\},\qquad(1)$$

где $u=u\left(\frac{n}{m}\right)$ — корень уравнения

$$\frac{e^u-1}{u}=\frac{n}{m}=N,\quad K_1=N(e^u-N),$$

$$K_2=N[2N^2-(3N+1)e^u+e^{2u}],$$

$$K_3=N[-6N^3+(12N^2+4N+1)e^u-(11N+6)e^{2u}+6e^{3u}].$$

Формула (1) применима, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{\log n}=\infty$, причем $m\leqslant n-O(n^\alpha)$, где $0<\alpha<1$. Ю. Л. Рабинович

8162 К. Функции математической физики. Кампе де Ферье (Fonctions de la physique mathématique. Éd. Kampé de Fériet J. (Formulaire mathém. usage physiciens et ingrs, № 9). Paris, Centre Nat. Rech. Scient., 1957, 99 p.) (франц.)

Книга содержит формулы, касающиеся специальных функций, встречающихся в различных вопросах физики и техники. Она состоит из следующих глав: 1. Гипергеометрическая функция (Кампе де Ферье) 2. Обобщенные гипергеометрические функции (Кампе де Ферье); 3. Ортогональные функции (Фогель (Vogel Th.)); 4. Ортогональные полиномы (Петьо (Pétiau G.)); 5. Полиномы Якоби (Петьо); 6. Полиномы и функции Лежандра (Петьо); 7. Сферические функции (Петьо); 8. Полиномы Чебышева (Петьо); 9. Полиномы Эрмита (Кампе де Ферье); 10. Полиномы Лагерра (Петьо). 11. Цилиндрические функции (Петьо); 12. Функции Матье (Кембелл (Campbell R.)); 13. Указания к числовым таблицам (Петьо). Введение к книге написано Кампе де Ферье.

Каждая глава содержит краткий исторический обзор, основные формулы, касающиеся данного класса функций и его связей с другими специальными функциями, и краткую библиографию. Глава 3 посвящена общей теории ортогональных функций, связям с краевыми задачами, пространством Гильберта и т. д. Н. Я. Виленкин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8163. О двойственных себе функциях. Нарасимха-Рао (On self-reciprocal functions. 2. Narasimha Rao V. V. L.), Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1957, A26, № 2, 134—137 (англ.)

Если

$$f(x)=\int_0^\infty J_\mu(xy)\,f(y)\sqrt{xy}\,dy,$$

то $f(x)$ называется двойственной себе функцией относительно преобразования Ханкеля порядка μ. Говорят также, что $f(x)$ — R_μ-функция. Автор доказывает равенство

$$\int_0^\infty J_1(yt)\,F(t)\sqrt{yt}\,dt=\frac{c}{\sqrt{y}},\qquad(1)$$

где $F(t)=\dfrac{J_{\mu_1}(a_1t)\,J_{\mu_2}(a_2t)\ldots J_{\mu_k}(a_nt)}{t^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k}\sqrt{t}}$,

а c — некоторая постоянная. Так как $\frac{1}{\sqrt{x}}$ есть R_1-функция, то функция $F(t)$ является R_1-функцией в обобщенном смысле. В частности, при $\mu=0$, $n=1$ мы получаем, что $\dfrac{J_0(a_1t)}{\sqrt{t}}$ — R_1-функция.

Переходя к пределу при $n\to\infty$, мы получим, что функция $F(t)=\dfrac{J_{\mu_1}(a_1t)\ldots J_{\mu_n}(a_1t)\ldots}{\sqrt{t}\;t^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+\ldots}}$, в которой $a_\nu>0$ и ряды $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+\ldots$ сходятся, является R_1-функцией.

Ю. Л. Рабинович

8164. Обращение преобразований Стилтьеса. Голдберг (An inversion of the Stieltjes transform. Goldberg Richard R.), Pacif. J. Math., 1958, № 8, 2, 213—217 (англ.)

Преобразование Стилтьеса

$$G(x)=\int_0^\infty\frac{\psi(t)\,t\,dt}{x^2+t^2}$$

приводится к виду обобщенного преобразования Ламберта, для которого и производится обращение. Доказывается, что если

$$\int_0^\infty t^{-1}|\psi(t)|\,dt<\infty\quad\text{и}\quad\int_0^1 t^{-1}|\psi(t)\log t|\,dt<\infty,$$

то

$$H(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{G(0)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kG\left(\frac{k\pi}{x}\right)\right]$$

существует для всех положительных x и

$$H(x)=\int_0^\infty\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(2k-1)xt}\psi(t)\,dt.$$

Кроме того, почти везде $(0<t<\infty)$

$$\lim\frac{(-1)}{p!}\left(\frac{p}{t}\right)^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{2n-1}(2n-1)^pH^{(p)}\left[\frac{(2n-1)\,p}{t}\right]=$$

$$=\psi(t),$$

где μ_n — числа Мёбиуса.

Аналогичная теорема устанавливается для преобразования Стилтьеса $F(x)=\int_0^\infty(x+t)^{-1}\varphi(t)\,dt$.

Л. Я. Цлаф

8165. К формуле Пуассона. Майнра (On Poisson's formulae. Mainra V. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 4, 163—176 (англ.)

Устанавливается ряд формул суммирования, использующих преобразования Мейера, Лапласа и Бхатнагара. Последнее определяется соотношением

$$\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(x) = \sqrt{x}\int_0^\infty J_\mu(t)\,J_\nu(x/t)\,\frac{dt}{t},$$

$$F(x) = \int_0^\infty \widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(xy)\,f(y)\,dy.$$

В качестве примера приводим теорему: Пусть $x^{-k}f(x) \subset L(0,\infty)$, $F_{\mu,\nu}(x)$ есть $\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(x)$ трансформация функции $f(x)$, тогда

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}F_{\mu,\nu}((2r-1)x) =$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\int_0^\infty f((2r-1)\pi t)\,G(xt)\,dt$$

где

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}+\frac{2}{2}s\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)}x^{-s}ds$$

$$\left(\begin{matrix}-\mu-\frac{1}{2}\\ -\nu-\frac{1}{2}\end{matrix} < k < -\frac{1}{2}\right)$$

в предположении, что указанные выше ряды сходящиеся.

Л. Я. Цлаф

8166. Обращение одного интегрального преобразования. Поллард, Уайдом (Inversion of an integral transform. Pollard Harry, Widom Harold), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 598—602 (англ.)

Рассматривается преобразование

$$f(x) = \int_0^\infty k(y)\,\varphi(x+y)\,dy,$$

где $k \in L(0,\infty)$; $k \not\equiv 0$ в окрестности нуля, преобразование Лапласа для $k(x)$ не имеет нулей в замкнутой правой полуплоскости, $\varphi \in L_p(0,\infty)$ для p из $[1,2]$.

Доказывается, что:

$$1)\ \varphi(x) = \lim_{\delta\to 0+}^{(p)}\ \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x+y)\,dy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(y-\delta)-\varepsilon|t|}}{\hat{k}(-t)}\,dt;$$

$$2)\ \varphi(x) = \lim_{\delta\to 0+}\ \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x+y)\,dy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-i\delta t}}{i\delta t}\,\frac{e^{ity-\varepsilon|t|}}{\hat{k}(-t)}\,dt,$$

почти для всех x и во всех точках непрерывности справа функции φ. Выше использовано обозначение: $\hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}g(x)\,dx$.

Л. Я. Цлаф

8167. Интегральные преобразования с ядрами, зависящими от разности, в которых ядро, оригинал и изображение являются функциями одного и того же типа. Еккель (Integraltransformationen mit Differenzkern, bei denen Kern-, Objekt- und Bildfunktion zum gleichen Typus gehören. Jaeckel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 9-10. 401—403 (нем.)

Преобразование Гаусса

$$Y(x) = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} H\exp\{-H^2(x-\xi)^2\}y(\xi)d\xi,$$

в котором $y(\xi)=\pi^{-1/2}h_2\exp\{-h_2^2(x-\alpha)^2\}$ принимает вид $Y(x) = \pi^{-1/2}h_2\exp\{-h_2^2(x-\alpha)^2\}$, где $h_2^{-2}=H^{-2}+h_1^{-2}$ (H, h_1, h_2 — некоторые параметры). Определяются также функции $K(x)$, удовлетворяющие более общему уравнению $h_2K[h_2(x-\alpha)]=\int_{-\infty}^{\infty} HK[H(x-\xi)]h_1K[h_1(\xi-\alpha)]d\xi$ при тех или иных условиях, накладываемых на $K(x)$, H, h_1, h_2.

А. П. Прудников

8168. Об одном применении дискретного преобразования Лапласа. Бахрах М. Г., Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 5, 279—282

Дается с помощью дискретного преобразования Лапласа решение одной задачи, рассмотренной А. О. Гельфондом (Исчисление конечных разностей, М., Гостехиздат, 1951).

А. И. Лурье

8169 К. Символические операторы. Дальтон (Symbolic operators. Dalton John P. Johannesburg, Witwatersrand Univ. Press, 1954, XVI, 194 pp., 1 £ 10 sh.) (англ.)

Давно известно, а в последнее время с особой ясностью доказано Микусинским (Mikusiński J., Studia math., 1950, **11**, 41—70), что операционное исчисление Хевисайда в той мере, в какой оно относится к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, можно обосновать чисто алгебраически, не прибегая к преобразованию Лапласа. В теории Микусинского упомянутое исчисление применяется также к дифференциальным уравнениям в частных производных посредством введения соответствующего определения сходимости.

Автор настоящей книги ставит в элементарной форме задачи, обосновывающие исчисление Хевисайда, и доказывает его справедливость для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторого узкого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Известные затруднения, связанные с тем, что исчисление Хевисайда относится к случаю нулевых начальных условий, автор преодолевает введением, наряду с оператором $\frac{d}{dt} = D$, оператора $\int_0^t(\cdot)dt = Q$, и учитывая то обстоя-

тельство, что обратный оператор Q^{-1} не совпадает с D, тогда как в исчислении Хевисайда D и Q^{-1} совпадают. Сначала к обыкновенному дифференциальному уравнению $F(D)x(t) \equiv \sum_{r=0}^{n} a_r D^{n-r} x(t) = f(t)$ применяется n раз оператор Q, при котором исчезают производные и удовлетворяются начальные условия: $\sum_{r=0}^{n} a_r Q^r x = \sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s + Q^n f$ (γ_s — некоторая комбинация начальных данных). Если

$$F(\lambda) = \prod_{r=1}^{n} (\lambda - \lambda_r), \text{ то}$$

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \lambda^r = \prod_{r=1}^{n} (1 - \lambda_r \lambda),$$

а также получается новое уравнение

$$\prod_{r=1}^{n} (1 - \lambda_r Q) x = \sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s + Q^n f.$$

Если ввести операторы $\omega_r = (1 - \lambda_r Q)^{-1}$ (определяемый легко в явном виде) и $\Omega_r = Q\omega_r$, то в качестве решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями получается выражение

$$x(t) = \omega_1 \dots \omega_n \sum_{s=0}^{n-1} Q^s \gamma_s + \Omega_1 \dots \Omega_n f(t).$$

При помощи предельного перехода исчисление переносится на некоторые типы дифференциальных уравнений в частных производных. Специальная глава книги посвящена операторам с нецелыми показателями и на примерах показывается их применимость. G. Doetsch.

Перевод из Zbl. Math., 1955, 56, № 1-5, 115

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

8170. Применение гипергеометрических функций в теории пластин. Коваленко (Застосування гіпергеометричних функцій в теорії пластин. Коваленко А. Д.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 51—68 (укр.; рез. русск.)

Показано, что задачи о симметричном и несимметричном растяжении и изгибе круглой пластины переменной жесткости, при определенном выборе закона ее изменения, приводят к уравнениям, интегрируемым в гипергеометрических функциях. В частном случае симметричной деформации решение представляется через гипергеометрическую функцию Гаусса $F(a, b, c, x)$, и применение формул теории этой функции позволяет получить удобные для вычислений выражения для усилий, перемещений и изгибающих моментов. Автором введены и частично изучены гипергеометрические функции второго рода $\Phi(a, b, c, x)$, использование которых упрощает запись формул аналитического продолжения в логарифмическом случае.

В работе исследованы также некоторые задачи изгиба и растяжения круглой пластины, разрешимые с помощью вырожденных гипергеометрических функций.

Н. Н. Лебедев

8171. Применение преобразования Лапласа к многоосному матричному методу. Такэути (Application of Laplace transform to poly-axis matrix method. Takeuchi T. J.), Токё дэнки дайгаку кэнкю хококу, Res. Repts Tokyo Electr. Engng Coll., 1957, № 5, 13—22 (англ.; рез. японск.)

8172. Решение задач переходных процессов с помощью операционного исчисления. Упрощенная обработка для электрических цепей. Ч. 2. Говард (Solving transient problems by the operational calculus. Simplified treatment for electrical circuits. Part 2. Howard P. R.), Electr. Times, 1958, **134**, № 3485, 304—306 (англ.)

8173 К. Очерк теории аппроксимации и ее применения в электротехнике. Гольде, Норек, Пашковский (Zarys teorii aproksymacji i jej zastosowań w elektrotechnice. Golde Wiktor, Norek Czesław, Paszkowski Stefan. Warszawa, PWN, 1958, VI, 161 s., il., 40 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 28, 366 (польск.)

См. также: 7737, 7845, 7883, 7892, 7957, 7977, 8051, 8059, 8068 К, 8181, 8186

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

8174. Применения одной теоремы Марцинкевича. Уэйсс (Applications of a theorem of Marcinkiewicz. Weiss G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 91 (англ.)

8175. Топологические векторные пространства. Шарль (Espaces vectoriels topologiques. Charles B. Ann. Univ. Sarav., 1954 (1955), **3**, 360—371) (франц.)

Хорошо написанное изложение различных тем из теории топологических линейных пространств. Новых результатов нет. J. L. Kelley

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1111

8176. Функциональное пополнение и его применения. Стампаккья (Complétion fonctionnelle et applications. Stampacchia G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 90 (франц.)

8177. Пополнения топологических векторных пространств. Робертсон (Completions of topological vector spaces. Robertson Wendy), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 30, 242—257 (англ.)

Пусть E и F — топологические векторные пространства, $\hat{E}$, $\hat{F}$ — их пополнения, t — линейное непрерывное отображение E в F. Исследуется свойство (*): если φ — фильтр Коши в E и $t(\varphi)$ сходится к точке $\in t(E)$, то φ сходится к точке $\in E$. Основной результат (теорема 1): $\hat{t}^{-1}(0) = t^{-1}(0)$ тогда и только тогда, когда t обладает свойством (*). Показывается, что векторное пространство полно относительно топологии, мажорирующей другую топологию, в которой пространство полно, в том и только в том случае, когда тождественное отображение, рассматриваемое как непрерывное относительно этих топологий, удовлетворяет условию (*). Топологическое векторное пространство называется ультрабочечным, если его топология мажорирует любую топологию, обладающую фундаментальной системой окрестностей нуля, замкнутых в исходной топологии. Устанавливаются некоторые свойства ультрабочечных пространств, аналогичные свойствам бочечных пространств, а также, что

класс локально выпуклых ультрабочечных пространств существенно уже класса бочечных пространств. Автор доказывает следующее усиление теоремы об открытых отображениях (теорема 6): Пусть а) E — метризуемое векторное пространство, пространство F отделимо и ультрабочечно, либо b) E и F — отделимые локально выпуклые пространства, $\hat{E}$ совершенно полно, F бочечно. Если t — непрерывное отображение пространства E на пространство F и выполняется условие (*), то в обоих случаях t открыто. Отметим пример предкомпактного множества, расположенного в $l^{1/2}$, абсолютно выпуклая оболочка которого не предкомпактна. А. С. Дынин

8178. Линейная размерность топологических векторных пространств. Колмогоров (Dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques. Kolmogorov A.), Sémin. Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, **10**. Paris, 1958, 165-01 (франц.)

Пусть значения функции $d = d(E)$, где E — векторное топологическое пространство, принадлежат частично упорядоченному множеству D. Указывается, что для того чтобы иметь аналогию с обычной размерностью, кроме условия: $d(E_1) \leqslant d(E_2)$, если E_1 изоморфно подпространству пространства E_2, — естественно потребовать: $d(E_1) \leqslant d(E_2)$, если существует линейный непрерывный оператор T такой, что $TE_2 = E_1$. Указано, что может быть полезным следующее определение размерностной функции: $d_a(E)$ есть класс функций $\varphi(\varepsilon)$, определенных для $\varepsilon > 0$, таких, что для всякого компакта $K \subset E$ и произвольной окрестности нуля U существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\varepsilon < \varepsilon_0$ найдутся n точек $x_1, \ldots, x_n$ $(n \leqslant \varphi(\varepsilon))$ пространства E, обладающих тем свойством, что:

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant n} (\varepsilon U + x_m).$$

Множество $D = \{d_a(E)\}$ частично упорядочено по включению. По поводу более подробного изложения относящихся сюда результатов см. реф. 8179 Е. А. Горин

8179. О линейной размерности топологических векторных пространств. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 2, 239—241

Топологические векторные пространства одной и той же конечной размерности n изоморфны между собой; при этом размерность $d(E)$ пространства E удовлетворяет требованиям: а) если E изоморфно замкнутому линейному подпространству пространства E', то $d(E) \leqslant d(E')$; б) если E' можно линейно и непрерывно отобразить на E, то $d(E) \leqslant d(E')$. Банах в известной монографии дал обобщение понятия размерности для бесконечномерных векторных пространств, исходя из желания сохранить свойство а). В заметке вводится линейная размерность $\delta(E)$ путем определения смысла неравенства

$$\delta(E) \leqslant \delta(E'), \qquad (1)$$

как функция, задаваемая с точностью до сохраняющего порядок взаимно однозначного соответствия отображения частично упорядоченного множества ее значений Δ на новое частично упорядоченное множество Δ'. По определению, (1) означает, что существует замкнутое линейное подпространство E'' пространства E', отобразимое линейно и непрерывно на пространство E.

Теорема 5. Любая функция $d(E)$, удовлетворяющая условиям а) и б), представима в виде $d(E) = f[\delta(E)]$, причем из $\delta(E) \leqslant \delta(E')$ вытекает $d(E) \leqslant d(E')$. Среди таких функций $d(E)$ рассматривается одна $d_a(E)$, которая называется „аппроксимативной размерностью“ и определяется следующим образом. Каждому пространству E типа F поставим в соответствие класс $\Phi(E)$ функций $\varphi(\varepsilon)$, определенных для $\varepsilon > 0$ при помощи условия: $\varphi(\varepsilon) \in \Phi(E)$, если для любого компакта $K \subset E$ и любой окрестности U нуля в E существует такое ε_0, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно найти $N \leqslant \varphi(\varepsilon)$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ пространства E так, что $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} (x_k + \varepsilon U)$; два пространства E и E' имеют одну и ту же аппроксимативную размерность $d_a(E) = d_a(E')$, если $\Phi(E) = \Phi(E')$; по определению, имеет место неравенство $d_a(E) < d_a(E')$, если $\Phi(E) \supset \Phi(E')$. Аппроксимативная размерность тесно связана с понятиями ε-энтропии и ε-емкости метрических пространств. В теоремах 6—9 дается описание классов $\Phi(E)$ для конкретных пространств. Для банаховых пространств класс $\Phi(E)$ пуст, но для ядерных пространств (таких, например, как A_n^G — пространство аналитических функций от n комплексных переменных в области $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, где G_k — ограниченные конечносвязные области на комплексной плоскости) $d_a(E)$ является содержательным понятием. Так, получается следующий результат, который автор рассматривает как наиболее интересный в заметке (теоремы 3а и 4): Размерность $\delta(A_n^G) = \alpha_n$ не зависит от выбора областей G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$; если $n < n'$, то $\alpha_n < \alpha_{n'}$.

Опечатки: вместо „пространств не зависит“ должно быть „пространств B_n^∞ не зависит“ и вместо „$\lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^q \log \varphi(\varepsilon)) = 0$“ должно быть „$\lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon^q \log \varphi(\varepsilon)) = \infty$“.

Примечания референта: 1. Определения линейной размерности и аппроксимативной размерности содержатся в заметке автора (реф. 8178). 2. Характеристика метрических совершенных пространств, аналогичная аппроксимативной размерности, дается в заметке А. Пельчинского (РЖМат, 1958, 7891), в которой при помощи этой характеристики показано, что не существует универсального совершенного пространства.

Б. С. Митягин

8180. О системах норм в счетно-нормированном пространстве. Горин Е. А., Митягин Б. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 179—184

Пусть Φ — счетно-нормированное пространство с согласованными нормами $\|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2 \leqslant \ldots$. Через Φ_0 обозначается совокупность элементов $\varphi \in \Phi$, для которых существует $\|\varphi\|_0 = \sup_p \|\varphi\|_p$. Совокупность Φ_0 есть подпространство, полное относительно нормы $\|\varphi\|_0$. Оно зависит от выбора норм $\|\varphi\|_p$: если Φ совершенно, то в нем имеются системы норм $\|\varphi\|_p'$, $\|\varphi\|_p''$, эквивалентные исходной системе $\|\varphi\|_p$ такие, что соответствующее Φ_0' плотно в Φ, а Φ_0'' состоит из одного нуля. Соответственно для любого элемента $f \neq 0$ из сопряженного пространства мы имеем $\lim \|f\|_p' > 0$, $\lim \|f\|_p'' = 0$. Если Φ — счетно-нормированное кольцо $(\|\varphi\psi\|_p \leqslant \|\varphi\|_p \|\psi\|_p)$, то Φ_0 всегда содержится в совокупности элементов $\varphi \in \Phi$ таких, что $(\varphi - \lambda e)^{-1}$ определена и ограничена при $\lambda \to \infty$. А. Г. Костюченко

8181. Об одном методе решения некоторых функциональных уравнений. Феньё (Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen. Fenyö I.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3-4, 383—396 (нем.; рез. русск.)

Ряд авторов исследовали функциональные уравнения вида:

$$f(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\, Y_\nu(y), \qquad (1)$$

$$f(\alpha x + \beta y + \gamma) = X(x) + Y(y), \qquad (2)$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\, g(y), \qquad (3)$$

$$f(xy) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\, Y_\nu(y). \qquad (4)$$

Здесь f, g, X_ν, Y_ν, X, Y — искомые функции; $-\infty < x, y < \infty$; α, β, γ, n фиксированы. Эти уравнения исследовались либо в предположении достаточной гладкости искомых функций, либо в некоторых случаях показывалось (как, например, для уравнения $f(x+y) = f(x)f(y)$), что, налагая даже более слабые ограничения на искомые решения, мы автоматически получим гладкие решения. В реферируемой работе автор исследует уравнения (1) — (4), предполагая неизвестные функции обобщенными функциями типа Л. Шварца (в начале работы вводятся естественные определения, позволяющие записать эти уравнения в терминах обобщенных функций). В случае уравнений (1) — (3) доказывается, что всякое обобщенное решение является обычной бесконечно дифференцируемой функцией и поэтому сводится к ранее исследованным решениям. Аналогичная картина справедлива и для уравнения (4), если искать его решения в классе обобщенных функций, носитель которых не пересекается с осями Ox и Oy. Метод получения этих результатов заключается в составлении для искомых функций обыкновенных дифференциальных уравнений и использования того обстоятельства, что обобщенные решения таких уравнений являются обычными.

Ю. М. Березанский

8182. Пространство Банаха распределений. II. Лав (A Banach space of distributions (II). Love E. R.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 288—306 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 6919. В пространстве L интегрируемых на интервале $(0, c)$, $c > 0$, функций вводится норма по формуле

$$\|f\| = \int_0^c dx \left| \int_0^x f(t)(x-t)^k dt \right|,$$

k — целое положительное число. Пополнение L по этой норме обозначается S, а элементы этого банахова пространства называются s-функциями. В пространстве S вводится интегрирование и дифференцирование. Вначале доказывается теорема (обобщающая соответствующую теорему первой части): Каждая интегрируемая функция как элемент пространства S, имеет $(k+1)$-ю производную в смысле s-функций. Вместе с результатами предыдущей части это дает полное описание пространства S как совокупности производных порядка $\leqslant (k+1)$ от интегрируемых функций. Далее в работе определено произведение s-функции, имеющей p производных в смысле s-функций на обычную функцию, имеющую $(k-p)$ производных, удовлетворяющих условию Липшица. В определенных предположениях доказана ассоциативность и дистрибутивность введенного умножения, установлены формулы типа $(F\varphi)' = F'\varphi + F\varphi'$ и приведена оценка $\|F\varphi\|$ через $\|F\|$. Отдельно рассмотрены произведения δ-функции и ее производных на обычные функции. Работа существенно новых результатов не содержит.

Е. А. Горин

8183. О спектральном разложении формально симметрических операторов по собственным операторам. Фояш (Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs formellement symétriques. Foiaş Ciprian), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 22, 3147—3149 (франц.)

Пусть E — ядерное пространство, E^* — сопряженное с ним, $(x \mid y)$ — непрерывная эрмитова форма в E, H — пополнение E по норме $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$. Тогда $E \subset H \subset E^*$. Пусть далее A — непрерывный симметрический ($(Ax \mid y) = (x \mid Ay)$) оператор в E. Если $\|x\|_1$ — одна из полунорм, определяющих топологию в E, E_1 — пополнение E по этой норме и вложение E_1 в H ядерно, то каждому гипермаксимальному расширению A в H соответствует мера $\sigma(\lambda)$ на $(-\infty, \infty)$ и семейство непрерывных операторов χ_λ из E_1 в E_1^*, определенных для σ-почти всех λ, так что 1) $\langle \chi_\lambda x, y \rangle$ σ-интегрируема $(x, y \in E_1)$; 2) $(x \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \chi_\lambda x, y \rangle d\sigma(\lambda)$, $(x, y \in E_1)$; 3) $\overline{\langle \chi_\lambda x, y \rangle} = \langle \chi_\lambda y, x \rangle$, $\langle \chi_\lambda x, x \rangle \geqslant 0$; 4) $(Ax \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \langle \chi_\lambda x, y \rangle d\sigma(\lambda)$ $(x, y \in E)$; 5) $A\chi_\lambda = \chi_\lambda A = \lambda \chi_\lambda$.

В отличие от теоремы Гельфанда и Костюченко (РЖМат, 1956, 3924) полученное разложение является в некотором смысле единственным. В качестве примера получается разложение линейного дифференциального оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве D Шварца (в обозначении Шварца: рукописное D) по собственным ядрам. В работе имеются опечатки. Доказательства не приводятся.

Ю. Л. Шмульян

8184. Один тип гомоморфизмов отделимых локально выпуклых пространств. Депри (Un type d'homomorphismes d'espaces localement convexes séparés. Deprit André), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1958, Sér. 1, **72**, № 1, 5—13 (франц.)

Линейное непрерывное преобразование u одного отделимого локально выпуклого пространства E в другое F называется τ-гомоморфизмом, если оно обладает следующими свойствами: а) ядро u допускает топологическое дополнение в E; б) образ u допускает топологическое дополнение в F; в) u является гомоморфизмом E в F. Доказывается, что при добавлении к τ-гомоморфизму линейного непрерывного конечномерного преобразования, а также при умножении τ-гомоморфизма слева на α-гомоморфизм или справа на β-гомоморфизм получается τ-гомоморфизм (понятия α- и β-гомоморфизмов введены в предыдущей работе автора (РЖМат, 1959, 560). Исследуется преобразование, сопряженное к τ-гомоморфизму.

Примечание референта. Предложение 4, утверждающее, что сумма τ-гомоморфизма и линейного компактного преобразования является τ-гомоморфизмом, ошибочно. Как показал М. А. Гольдман (РЖМат, 1956, 581), если u — гомоморфизм одного банахова пространства в другое, обладающий тем свойством, что ядро u и фактор-пространство по образу u бесконечномерны, то существует такое линейное компактное преобразование v, что $u + v$ не является гомоморфизмом.

А. С. Маркус

8185. Отзывы о работе «Вклад в изучение алгебры линейных непрерывных отображений отделимого локально выпуклого пространства», представленной Андре Депри. Симонар, Годо, Лепаж (Rapport sur le mémoire: Contribution à l'étude de l'algèbre des applications linéaires continues d'un espace localement convexe séparé, présenté par André Deprit. Simonart Fernand, Godeaux Lucien, Lepage Th.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 5, 411—412. Discuss., 412 (франц.)

Докторская диссертация А. Депри, тема которой указана в заголовке, состоит из двух разделов. В первом разделе изучаются линейные непрерывные открытые отображения, ядро которых конечномерно, а образ замкнут и имеет конечную дополнительную размерность. Во втором разделе строятся элементы спектральной теории линейных непрерывных отображений для некоторых классов локально выпуклых пространств (в частности, рассматриваются бочечные квазиполные пространства).

А. С. Маркус

8186. Об одном классе бесконечных матриц. Маттьюс (A class of infinite matrices. Matthews G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 4, 457—459; Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 457—459 (англ.)

Доказывается теорема: Для всякого условно сходящегося ряда $\sum v_n$ найдется такой условно сходящийся ряд $\sum u_n$, что ряд

$$\sum (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$$

расходится. При доказательстве используются свойства бесконечных матриц (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots)$, где $a_{ij} = a_{i-j}$ при $i \geqslant j$ и $a_{ij} = 0$ при $i < j$ (a_ν — комплексные числа). Автор отмечает, что другое доказательство этой теоремы дано Шуром (Schur J., J. reine und angew. Math., 1921, 151, 100, 101). А. А. Нудельман

8187. Коммутируемость и антикоммутируемость. Числа Дирака и Хафнера. Андреоли (Commutazione ed anticommutazione. Numeri di Dirac e di Hafner. Andreoli Giulio), Ricerca, 1957, 8, genn.-giugno, 3—24 (итал.)

Изучается коммутируемость и антикоммутируемость конечных и бесконечных матриц, главным образом таких, у которых ненулевые элементы расположены лишь на диагонали, соседней с главной. Выписываются условия коммутируемости и антикоммутируемости, приводится ряд следствий. При этом используется введенное Кайаньелло понятие перманента, являющегося аналогом определителя, для которого в выражении определителя все знаки „минус" заменяются знаками „плюс" (например, вместо $ac - bd$ берется $ac + bd$). В. И. Соболев

8188. Обобщенные потенциальные операторы. Котляр (Generalized potential operators. Cotlar M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 78—79 (англ.)

8189. Замечание относительно мультипликативных линейных функционалов. Мрувка (A remark concerning the multiplicative linear functionals. Mrówka S.), Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 5, 309—311, XXIII (англ.; рез. русск.)

Обобщаются результаты Бялыницкого-Бирули и Желязко (РЖМат, 1958, 10007) на случай произвольного поля K (у указанных авторов это поле предполагалось бесконечным). Ю. М. Березанский

8190. О линейной размерности пространств L_p и l_t. Кадец М. И., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 95—98

Доказывается, что при $1 \leqslant p < q < 2$ в пространстве L_p имеется подпространство E_q, изоморфное l_q, причем для E_q не существует дополнительного подпространства в L_p. Л. В. Флоринская

8191. Об одной задаче на максимум в линейном нормированном пространстве. Дзядык (Про одну задачу на максимум в лінійному нормованому просторі. Дзядик В. К.), Наук. зап. Луцький пед. ін-т, 1958, 6, 75—80 (укр.)

Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов вещественного банахова пространства, а $\{c_n\}$ — последовательность положительных чисел, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Доказывается равенство

$$\max_{|a_n| < c_n} \left\| \sum_1^\infty a_n x_n \right\| = \max_{|a_n| = c_n} \left\| \sum_1^\infty a_n x_n \right\| .$$

С. И. Зуховицкий

8192. Теорема об открытых отображениях и полнота. Птак (Completeness and the open mapping theorem. Pták Vlastimil), Bull. Soc. math. France, 1958, 86, № 1, 41—74 (англ.)

Как сообщает автор во введении, работа посвящена углублению и расширению результатов, полученных им ранее (РЖМат, 1955, 4542). Несколько изменена терминология: B-полные пространства автор называет теперь B_r-полными, а наследственно-полные — B-полными. Из новых результатов отметим пример, показывающий, что непрерывное линейное взаимно однозначное отображение B-полного пространства на B-полное не всегда взаимно непрерывно, а также обобщение теоремы о замкнутом графике (теорема 3. 8). В. Н. Никольский

8193. Замечания о банаховых пространствах и базисах. Гелбаум (Notes on Banach spaces and bases. Gelbaum Bernard R.), Anais Acad. brasil. cienc., 1958, 30, № 1, 29—36 (англ.)

Пусть E — банахово пространство, а $\{x_n, X_n\}$ — биортогональная система в E ($x_n \in E$, $X_n \in E^*$, $X_i(x_j) = \delta_{ij}$). Всюду в дальнейшем замкнутая линейная оболочка элементов $\{x_n\}$ обозначается символом $[x_i \mid 1 \leqslant i < \infty]$. Статья состоит из четырех частей.

1. В первой части дается некоторое уточнение теоремы Банаха о том, что в каждом банаховом пространстве E бесконечной размерности существует подпространство E_1 бесконечной размерности, которое имеет базис.

2. Доказывается ряд предложений о базисах в некотором замкнутом подпространстве $M \subset E$ и в фактор-пространстве $\overline{E} = T(E) = E/M$. Например,

Теорема 1 (2). Пусть $\{x_n, X_n\}$ — базис в E и пусть $n_1, n_2, \ldots$ — последовательность целых чисел, а $M = [x_{n_i} \mid 1 \leqslant i < \infty]$. Если $m_1, m_2, \ldots$, — последовательность целых чисел, дополняющая $\{n_i\}_1^\infty$ до последовательности чисел натурального ряда, то: а) $\{x_{n_j}\}$ — базис для M; б) $\{T(x_{m_j}) = y_j\}$ — базис для $\overline{E} = T(E) = E/M$.

3. Здесь вводятся понятия псевдобазиса и квазибазиса и исследуется связь между ними.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\} \subset E$, $x_n \neq 0$, называется псевдобазисом, если для каждого $x \in E$ найдется последовательность чисел $\{a_n\}$ такая, что $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$.

Определение 2. $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, называется квазибазисом, если имеется последовательность линейных функционалов $\{X_n\} \subset E^*$ такая, что для каждого $x \in E$, $x = \sum_{n=1}^\infty X_n(x) x_n$. Ясно, что каждый квазибазис есть псевдобазис. Легко также показать, что каждое сепарабельное банахово пространство E бесконечной размерности имеет всюду плотный линейно независимый псевдобазис. Основным же результатом здесь является

Теорема 2 (3). Пусть $\{x_n\}$ — псевдобазис в E и пусть E_1 есть множество последовательностей чисел $\{a_n\}$ таких, что $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ существует. Если $\{a_n\} = A \in E_1$, то пусть $\|A\| = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m a_n x_n \right\| \right\}$. Обозначим через N_1 множество всех тех $\{a_n\}$, для которых $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n = 0$. Тогда E_1 — банахово пространство и N_1 — замкнутое подпространство в E_1. $\{x_n\}$ — квазибазис тогда и только тогда, когда $E_1 = M_1 + N_1$, где M_1 — замкнутое линейное подпространство в E_1 и $M_1 \cap N_1 = 0$.

4. Рассматривается задача: Пусть $\{x_n, X_n\}$ — биортогональная последовательность в E, а $\{a_n\}$ — последовательность чисел; $\rho_n = \sum_{m=1}^n a_m x_m$. Какие имеются соотношения между $\{x_n\}$ и $\{\rho_n\}$? Результаты исследования суммирует

Теорема 1 (4). а) Множество различных ρ_n минимально; б) $[x_n \mid 1 \leqslant n < \infty] = [\rho_n \mid 1 \leqslant n < \infty]$ тогда и только тогда, если все $a_n \neq 0$; в) Пусть все $a_n \neq 0$, а $\{x_n, X_n\}$ — базис для $[x_n \mid 1 \leqslant n < \infty]$. Последовательность линей-

ных функционалов $\{P_n=\left(\frac{X_n}{a_n}-\frac{X_{n+1}}{a_{n+1}}\right)\}$ такова, что $P_n(\rho_m)=\delta_{nm}$ и $\{P_n\}$ — тотальна относительно M (т. е. из того, что $x\in M$ и $P_n(x)=0$ для всех n, следует, что $x=0$) в том и только в том случае, если последовательность $\{\rho_n\}$ не имеет слабо предельной точки в M; г) Если $\{x_n; X_n\}$ — базис в M, $\|x_n\|=1$, и если все $a_n\neq 0$, то $\{\rho_n; P_n\}$ — базис в M тогда и только тогда, когда $\|\rho_n/a_{n+1}\|$ — ограниченная функция от n.

Ю. А. Казьмин

8194. О подпространствах пространства с безусловным базисом. Бессага, Пелчинский (On subspaces of a space with an absolute basis. Bessaga C., Pełczyński A.), Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 5, 313—315, XXIV (англ.; рез. русск.)

Рассматривается пространство Банаха X с безусловным базисом. Через Y обозначается подпространство пространства X. Сформулированы 3 теоремы, устанавливающие эквивалентность некоторых свойств подпространства Y. Доказательства не приводятся, вместо них даются ссылки на другие работы авторов. Полученные теоремы содержат обобщение результатов Джеймса (см., например, РЖМат, 1957, 609).

В. Н. Никольский

8195. О безусловных базисах в пространствах L_p ($p>1$). Гапошкин В. Ф., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 179—184

Базис $\{f_k\}$ в некотором банаховом пространстве называется безусловным, если он остается базисом при любом изменении порядка его элементов. Характеристическое свойство безусловных базисов в $L_2[a, b]$ было указано Н. К. Бари (Уч. зап. МГУ, 1951, **4**, вып. 148, 69 — 106) и И. М. Гельфандом (Уч. зап. МГУ, 1951, **4**, вып. 148, 224 — 225). В реферируемой работе найдено характеристическое свойство безусловных базисов в $L_p[a; b]$, $p>1$. Пусть $\{f_k\}$ — замкнутая минимальная система в $L_p[a; b]$, а $\{\psi_k\}$ — сопряженная к ней система в $L_{p'}[a; b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, т. е.

$$(f_i, \psi_k)=\delta_{ik},\ \delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq k\\ 1 & \text{при } i=k.\end{cases}$$

Вводится следующее пространство числовых последовательностей $A_p\{f_k\}$: последовательность $\alpha=(a_1, a_2, \ldots)\in A_p\{f_k\}$, если $\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k^2(x)\right]^{p/2}dx<\infty$. Показывается, что пространство $A_p\{f_k\}$ с нормой

$$\|\alpha\|=\left\{\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 f_k^2(x)\right)^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$

является банаховым.

Определение 1. Система $\{f_k\}$ обладает свойством (A), если для любой функции $f\in L_p$ последовательность $\{(f, \psi_k)\}\equiv\alpha\in A_p\{f_k\}$.

Определение 2. Система $\{f_k\}$ обладает свойством (B), если для произвольной последовательности $\{a_k\}\in A_p\{f_k\}$ найдется функция $f\in L_p$ такая, что $(f, \psi_k)=a_k$.

Теорема 1. Пусть $\{f_k\}$ — замкнутая минимальная система в $L_p[a; b]$, $p>1$, а $\{\psi_k\}$ — ее сопряженная система. Система $\{f_k\}$ является безусловным базисом в $L_p[a; b]$ тогда и только тогда, когда она обладает свойствами (A) и (B). При этом, если

$$f\in L_p,\ f\sim\sum_{k=1}^{\infty}(f, \psi_k)f_k,$$

то существуют такие постоянные m и M, не зависящие от f, что $0<m\leqslant M<\infty$ и

$$m\left\{\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}(f; \psi_k)^2 f_k^2(x)\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}\leqslant\|f\|\leqslant$$
$$\leqslant M\left\{\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}(f; \psi_k)^2 f_k^2(x)\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}.$$

С помощью теоремы 1 затем устанавливается следующий интересный факт.

Теорема 2. Никакая нормированная в L_p равномерно ограниченная система не является безусловным базисом в $L_p[a, b]$, $1<p\neq 2$, $-\infty<a<b<+\infty$.

Ю. А. Казьмин

8196. О базисе в сопряженном пространстве. Гуревич Л. А., Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т, 1958, вып. 6, 42—43

Пусть $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ — биортогональная система в банаховом пространстве E, т. е. $f_i(e_k)=\delta_{ik}$, где $\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq k\\ 1 & \text{при } i=k\end{cases}$. Через $E^{(1)}$ обозначим замкнутую линейную оболочку системы $\{f_i\}$ в сопряженном пространстве E^*.

Теорема. Система $\{f_i\}$ образует базис в $E^{(1)}$. Теорема, как частный случай, содержит известное предложение С. Банаха: Если E регулярно, то из того, что система $\{e_i\}$ — базис в E, следует, что $\{f_i\}$ образует базис в E^*. Из теоремы, полученной автором, вытекает также следующий результат Карлина: Если $\{f_i\}$ — базис в E^*, то (e_i) — базис в E (Karlin, Duke Math. J., 1948, № 4, 15). Ставится вопрос: не вытекает ли регулярность пространства E из того, что $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ состоит из базисов в E и E^*. Построением соответствующего примера на этот вопрос дается отрицательный ответ.

Ю. А. Казьмин

8197. Об условии равномерной ограниченности одного типа скалярно-векторного преобразования. Сюй (Concerning the condition of uniform boundedness for a type of scalar-to-vector transformations. Hsu L. C.), J. Indian Math. Soc., 1957, **21**, № 3-4, 115—126 (англ.)

Рассматривается преобразов ание, определенное равенством

$$U\lambda\varphi=\int_0^{\infty}\varphi(t)\,dx(t, \lambda)\quad(\lambda>0;\ \varphi(t)\in\mathfrak{S}),$$

где $\mathfrak{S}$ — класс ограниченных кусочно-непрерывных функций, а $x(t)=x(t, \lambda)$ — абстрактная функция со значениями в пространстве Банаха X, сильно непрерывная и имеющая ограниченную сильную вариацию. В дальнейшем X предполагается конечномерным. Преобразование $U\lambda$ называется преобразованием Тёплица, если для каждой $\varphi(t)\in\mathfrak{S}$, для которой существует $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)$, выполняется равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}U_\lambda\varphi=(\lim_{t\to\infty}\varphi(t))\,\bar{x},$$

где $\bar{x}\in X$ — фиксированный элемент, отличный от нуля. U_λ называется преобразованием Шура, если $\lim\limits_{\lambda\to\infty}U_\lambda\varphi$ существует для каждого $\varphi\in\mathfrak{S}$. Доказан необходимый и достаточный критерий того, что U_λ — преобразование Тёплица. То же сделано для преобразования Шура.

М. И. Кадец

8198. Об одном обобщении теоремы Ф. Рисса и о спектральном разложении эрмитовых операторов. Ги (Sur une extension d'un théorème de F. Riesz et la décomposition spectrale des opérateurs Hermitiens. Guy Roland), Rend. mat. e applic., 1958, **17**, № 1-2, 192—209 (франц.)

Пусть C — левый (или правый) A-модуль относительно кольца L (B) эндоморфизмов комплексного банахова

пространства B, образованный сильно непрерывными абстрактными функциями, определенными на отрезке вещественной оси, со значениями в $L(B)$. Найдена общая форма ограниченного линейного отображения C в $L(B)$ в виде интеграла Стилтьеса.

Приложения: установлена общая форма эволюционного уравнения физической системы; дано новое доказательство теоремы о спектральном разложении ограниченного эрмитова оператора. М. И. Кадец

8199. **Гомоморфизмы нормированных алгебр. Юд** (Homomorphisms on normed algebras. Yood Bertram), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 2, 373—381 (англ.)

Нормированная алгебра B (нормированное кольцо, по терминологии, принятой в СССР) называется Q-алгеброй, если совокупность всех квазирегулярных элементов открыта в B. Это условие эквивалентно каждому из следующих условий: 1) $\rho(x) \leqslant \| x \|$, 2) $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$ для всех $x \in B$, где $\rho(x)$—спектральный радиус элемента x. Пусть B_1 и B — две вещественные Q-алгебры, необязательно полные и T—кольцевой гомоморфизм (или антигомоморфизм) алгебры B_1 в алгебру B. В статье изучаются топологические свойства операции T. В частности, доказаны утверждения: 1) Если B есть алгебра $G(R)$ всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве R, $\rho(TA) \leqslant \rho(A)$, $A \in B_1$, и образ $T(B_1)$ содержит все конечномерные операторы (т. е. операторы с конечномерной областью значений), то отображение T непрерывно. 2) Если B примитивна и содержит минимальные односторонние идеалы, а образ $T(B_1)$ пересекается хотя бы с одним минимальным идеалом, то отображение T замкнуто (и является также алгебраическим гомоморфизмом, т. е. вещественно однородно). Важным свойством некоторых Q-алгебр является „свойство спектрального расширения": неизменность спектрального радиуса $\rho(x)$, $x \in B_1$, при любом возможном алгебраическом вложении $B_1 \subset B_2$. Доказывается, что этим свойством обладает всякая замкнутая подалгебра в $G(R)$, содержащая все конечномерные операторы, а также всякая аннуляторная алгебра. Д. П. Желобенко

8200. **Элементарное доказательство одной основной теоремы в теории банаховых алгебр. Рикарт** (An elementary proof of a fundamental theorem in the theory of Banach Algebras. Rickart C. E.), Michigan Math. J., 1958, **5**, № 1, 75—78 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$—комплексная нормированная алгебра (нормированное кольцо) с нормой $\| x \|$, удовлетворяющей условию: $\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$ для любых $x, y \in \mathfrak{A}$. Коммутативность и существование единицы не предполагаются. Элемент $x \in \mathfrak{A}$ называется квазирегулярным, если существует $y \in \mathfrak{A}$ такой, что $x + y - xy = x + y - yx = 0$. По определению (следуя Хиллу), спектр $\sigma(x)$ элемента x состоит: во-первых, из всех комплексных чисел $\lambda \neq 0$, для которых $\frac{x}{\lambda}$ не является квазирегулярным, и, во-вторых, числа 0 при условии, что в $\mathfrak{A}$ не существует ненулевого идемпотента e и элемента y таких, что: $ex = xe = x$, $xy = yx = e$. В работе доказана теорема: Пусть x—элемент произвольной нормированной комплексной алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда существует комплексное число $\lambda \in \sigma(x)$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \leqslant | \lambda | .$$

По ходу доказательства, не использующего теории функций комплексного переменного, довольно остроумно применяются свойства корней из единицы. При помощи указанной теоремы для полной нормированной алгебры получена известная формула Гельфанда спектрального радиуса. Работа в основном носит методический характер. Е. А. Горин

8201. **О построениях Винера—Питта и Шрейдера. Вильямсон** (On constructions of Wiener—Pitt and Sreider. Williamson J. H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 91 (англ.)

8202. **Теорема локализации для мультипликативных линейных функционалов. Семадени** (A localization theorem for multiplicative linear functionals. Semadeni Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 5, 289—292, XXII (англ.; рез. русск.)

Пусть T—вполне регулярное хаусдорфово пространство, в котором выделен фиксированный σ-идеал множеств R, т. е. совокупность множеств из T, замкнутая относительно счетного объединения и перехода к подмножествам. Предполагается, что R не содержит открытых (непустых) множеств. Рассматривается подпространство Y пространства всех вещественных ограниченных функций на T с равномерной нормой, содержащее 1 и замкнутое относительно взятия sup конечного числа функций. Объединим в один класс все функции из Y, совпадающие вне множеств из R; после естественного введения нормы совокупность Y/R таких классов превращается в линейное нормированное пространство, к которому применима теорема М. Г. и С. Г. Крейна—Какутани (Крейн М. Г. и Крейн С. Г., Докл. АН СССР, 1940, **27**, № 5, 427—431; Kakutani S., Ann. Math., 1941, **42**, № 4, 994—1024). На основании этой теоремы Y/R изоморфно $C(Q)$, где Q—некоторый компакт, и поэтому является нормированным кольцом. Автор формулирует (без доказательства) 11 теорем относительно мультипликативных функционалов в этом кольце, основная из которых, грубо говоря, заключается в том, что в случае, когда T—компакт, каждый такой функционал локализован в некоторой точке $t \in T$, т. е. при его вычислении играют роль только значения функции вблизи t.

Ю. М. Березанский

8203. **Тауберова теорема для нормированных колец вектор-функций на группе. Хаусснер** (The Tauberian theorem for group algebras of vector-valued functions. Hausner Alvin), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1603—1610 (англ.)

Пусть G—локально компактная коммутативная топологическая группа и X—коммутативное нормированное кольцо. Рассматривается банахово пространство $B = B(G, X)$ всех суммируемых (относительно меры Хара) функций, определенных на G со значениями в X. Если в B определить умножение как свертку, то оно становится коммутативным нормированным кольцом. Через $\mathfrak{M}(X)$ обозначается пространство всех регулярных максимальных идеалов кольца X, через φ_M—естественный гомоморфизм кольца X в кольцо комплексных чисел, определяемый идеалом $M \in \mathfrak{M}(X)$.

Теорема. Пусть полупростое регулярное кольцо X таково, что совокупность таких элементов $x \in X$, что функции $\varphi_M(x)$ имеют компактный носитель в $\mathfrak{M}(X)$, плотна в X. Тогда каждый замкнутый идеал в $B(G, X)$ допускает расширение до регулярного максимального идеала. В доказательстве теоремы используется тот известный факт, что в условиях теоремы каждый замкнутый идеал в X содержится в некотором максимальном идеале $M \in \mathfrak{M}(X)$ (см., например, РЖМат, 1955, 353). Существенную роль играет также преобразование Фурье функций $f \in B$. Под этим подразумевается выражение

$$\hat{f}_L(M, \hat{a}) = \int_G \varphi_M f(a)(a, \hat{a}) da,$$

где $M \in \mathfrak{M}(X)$, а $\hat{a}$ — элемент группы характеров $\hat{G}$ группы G. Устанавливается следующий результат.

Лемма 1. При фиксированных $M\in\mathfrak{M}(X)$ и $\hat{a}\in\hat{G}$ преобразование Фурье является линейным непрерывным мультипликативным ненулевым функционалом в B. И, наоборот, если μ—функционал указанного вида, то $\mu(f)=\hat{f}(M,\hat{a})$ при некоторых M и $\hat{a}$. Г. П. Акилов

8204. **Миноризация и преобразование Фурье.** Рубел (Minorization and Fourier transforms. Rubel L. A.), Abstr. Short commuus Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 87—88 (англ.)

8205. **О теоремах Кавада и Венделя.** Вильямсон (On theorems of Kawada and Wendel. Williamson J. H.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, **11**, № 2, 71—77 (англ.)

G—локально компактная группа, L_1— совокупность функций, суммируемых на G относительно левоинвариантной меры Хара. Пусть μ—конечная мера на G. Для $f\in L_1$ положим $(\mu*f)(x)=\int f(y^{-1}x)d\mu(y)$. Рассматривается предложение (*): Если для каждой функции f из L_1 из неравенства $(\mu*f)(x)\geqslant 0$ следует $f(x)\geqslant 0$, то мера μ сосредоточена в одной точке. (Оба неравенства предполагаются справедливыми почти во всех точках G относительно меры Хара). Доказывается, что предложение (*) справедливо в следующих трех случаях: группа G абелева, компактна, дискретна. Приведен пример группы (не унимодулярной), для которой (*) несправедливо. Автор высказывает предположение, что предложение (*) имеет место для унимодулярных групп и только для них. Если дополнительно предположить что отображение $f\to\mu*f$ отображает L_1 на себя, то предложение (*) справедливо для любой группы G (Kawada Y., Math. Jap., 1948, **1**, 1—5). Г. И. Кац

8206. **О характеристике гильбертовых пространств.** Лю Лян-шэнь (Lau Leung-s um), Шусюэ цзиньчжань, Shuxue jinzhan, 1958, **4**, № 3, 462—464 (кит.)

Пусть B — банахово пространство и B^* — сопряженное пространство. Пространства B и B^* называются сопряженно-изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если элементам x и $y\in B$ соответствуют элементы f_x и $f_y\in B^*$, то 1) элементу $x-y$ соответствует элемент f_x-f_y; 2) элементу ax соответствует элемент $\bar{a}f_x$; 3) $\|x\|=\|f_x\|$.

Доказывается следующая теорема: Для того чтобы комплексное банахово пространство было гильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) B и B^* сопряженно-изоморфны; 2) $\|x\|^2=f_x(x)$ для любого элемента $x\in B$, где f_x — элемент пространства B^*, соответствующий элементу $x\in B$. В случае, когда B является вещественным банаховым пространством, условие 1) означает, что $B=B^*$. Теорема представляет собой упрощение результата Лорха (Lorch E. R., Ann. Math., 1945, **46**, 468—473). Ши Чжун-цы

8207. **Пространства, инвариантные относительно сдвигов.** Лакс (Translation-invariant spaces. Lax P. D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 83 (англ.)

8208. **О некоторых свойствах характеристических чисел вполне непрерывного линейного оператора в пространстве вектор-функций.** Кирпотина Н. В., Сб. студ. научн. работ по естеств.-матем. циклу. Моск. обл. пед. ин-т, 1958, 3, 13—17

Доказываются некоторые утверждения о спектре операторов, действующих в прямой сумме двух гильбертовых пространств. В статье имеется большое количество опечаток и неточностей. Ю. Л. Далецкий

8209. **О (C)-свойстве функций.** Курепа (On the (C)-property of functions. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 1, 33—38 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Пусть $\Phi(t)$ — функция вещественного аргумента t, значениями которой являются операторы в гильбертовом пространстве R. Функция $\Phi(t)$ называется измеримой на замкнутом конечном интервале δ вещественной оси, если при любых f и g, принадлежащих R, скалярная функция $(\Phi(t)f, g)$ измерима по Лебегу на этом интервале. $\Phi(t)$ обладает (C)-свойством в δ, если для произвольного $\varepsilon>0$ существует совершенное множество $P\subseteq\delta$ с лебеговой мерой, отличающейся от меры δ не больше, чем на ε такое, что на этом множестве $\Phi(t)$ слабо непрерывна (т. е. все скалярные функции вида $(\Phi(t)f, g)$ непрерывны). На случай сепарабельного пространства обобщается известный результат Лузина, именно доказывается, что (C)-свойство эквивалентно измеримости. Для несепарабельного пространства R строится пример измеримой операторной функции $\Phi(t)$, не обладающей (C)-свойством. Ю. Л. Далецкий

8210. **О конечномерных возмущениях самосопряженных операторов.** Като (On finite-dimensional perturbations of self-adioint operators. Kato Tosio), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 2, 239—249 (англ.)

Пусть H — некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть $\{E(\lambda)\}$ — его спектральное семейство. Элемент $x\in\mathfrak{H}$ называется абсолютно непрерывным, если функция $(E(\lambda)x, x)$ абсолютно непрерывна по λ. Элемент x называется сингулярным, если функция $(E(\lambda)x, x)$ сингулярна. Множества $\mathfrak{H}_a$ и $\mathfrak{H}_s$ абсолютно непрерывных и соответственно сингулярных элементов оказываются инвариантными подпространствами оператора H; при этом все пространство $\mathfrak{H}$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_a\oplus\mathfrak{H}_s$. В случае, если $\mathfrak{H}_s=0$, оператор H называется абсолютно непрерывным, если же $\mathfrak{H}_a=0$, то оператор называется сингулярным. В реферируемой работе самосопряженный оператор H_0 возмущается самосопряженным конечномерным оператором V. Исследуются спектральные свойства возмущенного оператора $H_1=H_0+V$. Устанавливается следующая

Теорема. Существуют подпространства $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ (соответствующие операторы проектирования обозначаются через P_0 и P_1) и подпространство $\mathfrak{M}_{01}\subset\mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}_1$ такие, что 1) подпространство $\mathfrak{M}_{01}$ приводит и оператор H_0 и оператор H_1; на указанном подпространстве инвариантные части обоих операторов совпадают; 2) подпространство $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}_{01}$ (и тем более $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}_1$) сепарабельно. Спектр соответствующих частей операторов H_0 и H_1 имеет кратность, не превосходящую ранга оператора V; 3) подпространство $\mathfrak{M}_0$ приводит оператор H_0, а $\mathfrak{M}_1$—оператор H_1; соответствующие части операторов H_0 и H_1 унитарно эквивалентны; 4) части операторов H_0 и H_1 на подпространстве $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}_0$ и соответственно $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}_1$ — сингулярны; 5) части операторов H_0 и H_1 на подпространствах $\mathfrak{M}_0\ominus\mathfrak{M}_{01}$ и $\mathfrak{M}_1\ominus\mathfrak{M}_{01}$ соответственно абсолютно непрерывны.

Доказывается далее, что среди унитарных операторов U, трансформирующих оператор H_0P_0 в H_1P_1, выделяются следующие два оператора, определяемые формулой

$$U_{\pm}=\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itH_1)\exp(-itH_0)P_0.$$

Сходимость понимается здесь в смысле сильной сходимости операторов. Работа по своему содержанию примыкает к статье Фридрихса (Friedrichs K., Communs Pure and Appl. Math., 1948, **1**, 361—406), в которой рассмотрены аналогичные вопросы при условии, что возмущение осуществляется интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условию Гёльдера.

В. Б. Лидский

8211. **Возмущение непрерывного спектра операторами, имеющими след. Като** (Perturbation of continuous spectra by trace class operators. Kato Tosio), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 5, 260—264 (англ.)

Результаты автора, относящиеся к непрерывному спектру оператора H_0+V (реф. 8210), обобщаются на случ й, когда возмущение производится самосопряженным оператором V, имеющим след. В. Б. Лидский

8212. **Заметка о спектральном разложении самосопряженных операторов. Лю Лян-шэнь** (Lau Leung-sum), Шусюэ цзиньчжань, 1958, 4, № 2, 277—281 (кит.)

Показывается, что для любого неограниченного самосопряженного оператора A, область определения которого обозначается через D_A, существует два положительных самосопряженных оператора A^+ и A^- таких, что $A = A^+ - A^-$, причем $D_{A^+} = D_{A^-} = D_A$. Отсюда с помощью теоремы Фридрихса о спектральном разложении положительных самосопряженных операторов можно по-другому доказать существование спектрального разложения общих самосопряженных операторов. Ши Чжун-цы

8213. **Об одном семействе неспектральных операторов, удовлетворяющих спектральной теореме. Краббе** (A family of non-spectral operators which satisfy the spectral theorem. Krabbe G. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 82—83 (англ.)

8214. **Пространства, двойственные C^*-алгебрам. Фелл** (Dual spaces of C^*-algebras. Fell J. M. G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 79 (англ.)

8215. **Алгебры линейных операторов в пространстве Гильберта. Арсеньев Г. И.**, Уч. зап. Борисоглебского гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 119—132

Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots$ образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Рассматривается класс D всех линейных ограниченных операторов в H, обладающих тем свойством, что для каждого k подпространство H_k, натянутое на векторы $e_k, e_{k+1}, \ldots$, является инвариантным для любого оператора $A \in D$. В базисе $e_1, e_2, \ldots$ каждому оператору $A \in D$ соответствует треугольная матрица Δ_A и совокупность D образует алгебру с обычным определением алгебраических действий над операторами. Из рассуждений автора вытекает, что для того чтобы оператор $A \in D$ был левым делителем нуля в алгебре D, необходимо и достаточно, чтобы $(Ae_k, e_k) = 0$ хотя бы для одного значения k. Если же $A \in D$ не является делителем нуля, то он отображает каждое H_k взаимно однозначно на себя и, следовательно, $A^{-1} \in D$. Далее автор доказывает, что радикал алгебры D состоит из операторов A, для которых $(Ae_k, e_k) = 0$ для всех k.

Примечание референта. Изложение доказательств неясное. Заметим, что при $A \in D$ оператор A^* обладает возрастающей последовательностью конечномерных инвариантных подпространств $H_1^\perp \subset H_2^\perp \subset \ldots$, $H_k^\perp = H \ominus H_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ В. Э. Лянце

8216. **Распространение $\natural$-отображения на неограниченные операторы. Огасавара, Йосинага** (Extension of $\natural$-application to unbounded operators. Ogasawara Tôzirô, Yoshinaga Kyôichi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 2, 273—299 (англ.)

Рассматриваются кольца M ограниченных операторов, заданных на всем гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащие единицу I, самосопряженные и замкнутые в смысле слабой сходимости операторов. Пусть Ω — гиперстоуновское пространство, спектр центра $M^\natural$ кольца M. Пусть Z — множество непрерывных, неотрицательных, конечно или бесконечнозначных функций, заданных на Ω. Отображение $\natural$, заданное на множестве M^+ положительных операторов из M, преобразующее оператор $A \in M^+$ в функцию $A^\natural \in Z$, называется псевдо-$\natural$-отображением, если: 1) $(A + A_1)^\natural = A^\natural + A_1^\natural$; 2) $(\lambda A)^\natural = \lambda A^\natural$ при $\lambda \geqslant 0$; 3) $(UAU^*)^\natural = UA^\natural U^*$ для любого унитарного оператора $U \in M$; 4) если $A \in M^\natural +$, $B \in M^+$, то $(AB)^\natural = AB^\natural$; при этом $M^\natural$ — центр M. Псевдо-$\natural$-отображение называется нормальным, если оно сохраняет точную верхнюю грань (при естественном упорядочении M^+ и Z). Оно называется точным, если из $A^\natural = 0$ следует $A = 0$. Наконец, оно называется существенным, если для каждого $A \in M^+$, $A \neq 0$, существует $A' \neq 0$ такое, что $0 \leqslant A' \leqslant A$ и $A'^\natural \in C(\Omega)$, где $C(\Omega)$ — кольцо конечнозначных непрерывных функций, заданных на Ω. Нормальное, точное и существенное псевдо-$\natural$-отображение существует на кольце M тогда и только тогда, когда кольцо полуконечно, т. е. каждый не равный нулю проекционный оператор из M содержит конечный проекционный оператор из M. Изучаемые в работе кольца M предполагаются полуконечными. Существенный результат работы состоит в распространении операции $\natural$, заданной первоначально на множестве M^+ ограниченных положительных операторов из M, на множество всех положительных операторов $T\eta M$. Для таких операторов функция $T^\natural$ определяется как точная верхняя грань множества всех функций $A^\natural$, $A \in M^+$, $A \leqslant T$. При этом важную роль играет теорема о точной верхней грани направленного множества $\{T_\delta\}$ положительных операторов $T_\delta \eta M$: Точная верхняя грань T_0 направленного множества $\{T_\delta\}$ существует тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{D}$, состоящее из всех $x \in \mathfrak{H}$, для которых $\| T_\delta^{1/2} x \|$ равномерно (относительно δ) ограничено, плотно в пространстве $\mathfrak{H}$. При выполнении этого условия $\mathfrak{D}_{T_\delta^{1/2}} = \mathfrak{D}$ и $\| T_\delta^{1/2} x - T_0^{1/2} x \| \to 0$ для всех $x \in \mathfrak{D}_{T_\delta^{1/2}}$. (В соответствии с определением авторов, соотношение $S \leqslant T$, где S и T — положительные операторы, означает, что $\mathfrak{D}_{T^{1/2}} \subset \mathfrak{D}_{S^{1/2}}$ и $\| S^{1/2} x \| \leqslant \| T^{1/2} x \|$ для всех $x \in \mathfrak{D}_{T^{1/2}}$). Доказывается, что расширенное псевдо-$\natural$-отображение обладает по-прежнему свойством нормальности, точности и существенности (определения естественным способом обобщаются на случай неограниченных операторов). Расширенное $\natural$-отображение обладает также перечисленными выше свойствами 1) — 4), в которых A и A_1 обозначают теперь произвольные (неограниченные) измеримые положительные операторы ηM, причем сумма и произведение измеримых операторов понимаются в сильном смысле. Измеримыми будут, в частности, положительные операторы $T\eta M$, для которых функция $T^\natural(\omega)$ конечна, за исключением множества значений ω, нигде не плотного на Ω. Множество всех таких операторов T обозначается через $\mathfrak{S}^+$. Инвариантной линейной системой относительно кольца M называется линейное множество $\mathfrak{L}$ измеримых (РЖМат, 1954, 1713) операторов $T\eta M$ таких, что UT, $TU \in \mathfrak{L}$ для любого унитарного оператора $U \in M$. Доказывается, что существует единственная инвариантная линейная система $\mathfrak{S}$, для которой $\mathfrak{S}^+$ является множеством положительных операторов. Отображение $\natural$ единственным образом продолжается из $\mathfrak{S}^+$ на $\mathfrak{S}$ (с сохранением соот-

ветствующих свойств), причем при $T\in\mathfrak{S}T^{\natural}$ является непрерывной, конечной (за исключением нигде не плотного на Ω множества), комплекснозначной функцией. Для произвольной инвариантной системы $\mathfrak{L}$ и числа $\alpha>0$ через $\mathfrak{L}^{\alpha}$ обозначается инвариантная линейная система, порожденная степенями T^{α} всех положительных операторов $T\in\mathfrak{S}$. Доказывается, что множество положительных операторов системы $\mathfrak{S}^{\alpha}$ совпадает с множеством порождающих ее степеней T^{α} всех положительных операторов $T\in\mathfrak{S}$. Имеют место соотношения: $(\mathfrak{S}^{\alpha})^{\beta}=\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$, $\mathfrak{S}^{\alpha}\mathfrak{S}^{\beta}=\mathfrak{S}^{\alpha+\beta}$. Доказывается, что $\mathfrak{S}$ является алгеброй тогда и только тогда, когда M является кольцом типа 1. В качестве примера в работе рассмотрено каноническое $\natural$-отображение H-системы (пространство Эмброза (РЖМат, 1955, 345). Полученные результаты применяются также к построенной Сигалом (РЖМат, 1954, 1713) и развитой авторами теории некоммутативного интегрирования. В. Э. Лянце

8217. Об одном нелинейном операторе в пространствах Орлича. Вайнберг М. М., Studia math., 1958, **17**, № 1, 85—95

Автор обобщает свой результат (РЖМат, 1954, 2230) об операторе Немыцкого, относящийся к пространствам L^{p}, на случай пространств Орлича. Пусть $g(u,x)$ — вещественная функция, определенная при $u\in(-\infty,\infty)$ и $x\in B$ (B — измеримое по Лебегу множество s-мерного евклидова пространства конечной или бесконечной меры), непрерывная по u при почти каждом x и измеримая по x при каждом u. Оператором Немыцкого называется оператор h, $hu=g(u(x),x)$.

Рассматриваются пространства Орлича L^{M}(Orlicz W., Bull. internat Acad. polon., sér. A., 1936, № 3-4, 93—107) в предположении, что функции $M(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию: $M(2u)\leqslant CM(u)$, $C=\text{const}$, при $u\geqslant u_0$ (если $\text{mes}B=\infty$, то $u_0=0$). Как известно, в этом случае пространство L^{M} совпадает с классом L_M функций $u(x)$, для которых) $\int_B M[\,|u(x)|\,]dx<\infty$.

Доказывается следующая теорема: Для того чтобы оператор Немыцкого действовал из L_M в L_{M_1} или чтобы он был непрерывным оператором из L_M в L_{M_1}, необходимо и достаточно, чтобы $|g(u,x)|\leqslant a(x)+M_1^{-1}(bM(|u|))$, где $a(x)\in L_{M_1}$, M_1^{-1} — функция, обратная к M_1, $b>0$.

Доказательство необходимости не использует Δ_2-условия. И. В. Шрагин

8218. Аксиоматическая характеризация некоторых колец действительных функций. Завадовский (Axiomatic characterization of some rings of real functions. Zawadowski W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 6, 355—360, XXIX—XXX (англ.; рез. русск.)

Рассматриваются абстрактные кольца двух родов. В коммутативном кольце R определено соотношение $a\geqslant 0(a\in R)$, причем выполняются следующие аксиомы: 1 α. $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ влечет за собой $ab\geqslant 0$ и $a+b\geqslant 0$. 2 α. Если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, а также, если a или b — грубый элемент, то $a+b$ тоже грубый ($a\in R$ называют грубым, если из $a\geqslant 0$ и $ax\geqslant 0$ следует $x\geqslant 0$ для всякого $x\in R$); 3α. $a^2\geqslant 0$ для всякого a. 4α. Если b — грубый элемент и $b+na\geqslant 0$ для $n=1,2,\ldots$, то $a\geqslant 0$. 5α. $a\geqslant 0$ и $-a\geqslant 0$ влечет за собой $a=0$. Соотношение $a\leqslant b$ означает, что $b-a\geqslant 0$. Кольцо R, удовлетворяющее всем аксиомам 1α — 5α и содержащее по крайней мере один грубый элемент, называют действительным кольцом типа α. Коммутативное кольцо R с единицей, в котором определено соотношение $a\geqslant 0$ ($a\in R$), называют действительным кольцом типа β, если 1β. $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ влечет за собой $ab\geqslant 0$, $a+b\geqslant 0$, а также $a^{-1}\geqslant 0$, если только a^{-1} существует; 2β. Если $a\geqslant 0$, то элемент $1+a$ имеет обратный; 3β. $a^2\geqslant 0$ для всякого a. 4β. Если $1+na\geqslant 0$ для $n=1,2,\ldots$, то $a\geqslant 0$. 5β. $a\geqslant 0$ и $-a\geqslant 0$ влечет за собой $a=0$. Далее показывается, что кольцо типа α расширяется однозначно до кольца типа β.

Теорема 3. Если R — кольцо типа β, состоящее только из ограниченных элементов (элемент $x\in R$ называется ограниченным, если $x\leqslant n\cdot 1$ при некотором натуральном n), а Φ — множество всех положительных гомоморфизмов кольца R на поле действительных чисел, то соответствие $F(a)=F_a(\varphi)=\varphi(a)$, $\varphi\in\Phi$, $a\in R$, где $F_a(\varphi)$ есть функция, определенная на Φ, есть изоморфизм между кольцом R и кольцом ограниченных функций на Φ, причем $a\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(a)\geqslant 0$ для любого $\varphi\in\Phi$.

Если теперь R — кольцо типа β, содержащее и неограниченные элементы, а R_0 — подкольцо ограниченных элементов кольца R, то любой элемент $a\in R$ может быть представлен в виде $a=bs^{-1}$, где b, $s\in R_0$ и s — грубый элемент. Пусть подкольцо R_0 есть кольцо действительных функций, определенных на некотором множестве T, причем $b\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $b(t)\geqslant 0$ для каждого $t\in T$. Положим $D_a=\cup_{a=bs^{-1}}\{t\in T: b,s\in R_0, s\geqslant 0, s(t)\neq 0\}$, где $a\in R$ и все s грубые. Тогда для $a\in R$ определим на D_a функцию $a(t)=b(t)/s(t)$, где $t\in D_a$, $a=bs^{-1}$, $s\geqslant 0$ и $s(t)\neq 0$.

Теорема 4. 1) $D_{ab}\cap D_{a+b}\supset D_a\cap D_b$ и $(a+b)t=a(t)+b(t)$, $(ab)t=a(t)b(t)$ на $D_a\cap D_b$; 2) если для некоторого $b\in R$ $a(t)\geqslant 0$ на $D_a\cap D_b$, то $a(t)\geqslant 0$ на D_a; 3) если $a(t)=0$ на D_a, то $a=0$. Семейство $\mathfrak{R}$ действительных функций, определенных на подмножествах некоторого множества T($a\in\mathfrak{R}$ определено на $D_a\subset T$) называется действительным кольцом функций, если: 1) a, $b\in\mathfrak{R}$ соответствуют некоторые функции ab, $a+b$, $-a\in\mathfrak{R}$, где $D_{ab}\cap D_{a+b}\supset D_a\cap D_b$, $D_{-a}=D_a$ и $(ab)t=a(t)b(t)$, $(a+b)t=a(t)+b(t)$ на $D_a\cap D_b$, $(-a)t=-a(t)$ на D_a; 2) если для некоторого $b\in\mathfrak{R}$ $a(t)\geqslant 0$ на $D_a\cap D_b$, то $a(t)\geqslant 0$ на D_a; 3) если $a,b\in\mathfrak{R}$, $D_a\subset D_b$ и $a(t)=b(t)$ на D_a, то $D_a=D_b$. Из теорем 3 и 4 вытекает одна из двух основных теорем: Всякое кольцо R типа α изоморфно кольцу действительных функций $\mathfrak{R}$, причем неотрицательным элементам соответствуют неотрицательные функции. Кольцо типа β, которое состоит только из ограниченных элементов, называют нормальным, если для любых двух элементов x, $y\geqslant 0$ таких, что их сумма $x+y$ имеет обратный, существуют такие элементы u, $v\geqslant 0$, что $x+u$ и $y+v$ имеют обратные и $uv=0$. Произвольное кольцо типа β называют нормальным, если подкольцо его ограниченных элементов нормальное.

Теорема 5. Пространство Φ, рассматриваемое в теореме 3, с топологией, заданной при помощи системы окрестностей $U(\varphi_0)=\{\varphi:|(\varphi-\varphi_0)a_i|<\varepsilon, i=1,2,\ldots,n\}$, есть бикомпактное хаусдорфово пространство, и при этом все функции $F_a(\varphi)=\varphi(a)$ непрерывны. Пусть рассматриваемое выше множество T — бикомпактное хаусдорфово пространство и все функции $a\in\mathfrak{R}$ непрерывны на D_a. Если R — нормальное кольцо, то (теорема 7) множество D_a есть всюду плотное открытое подмножество T. Семейство $\mathfrak{R}$ действительных функций, определенных на всюду плотных открытых подмножествах в T, называют действительным кольцом максимально непрерывных функций, если 1) $a,b\in\mathfrak{R}$ соответствуют ab, $a+b$, $-a\in\mathfrak{R}$ такие, что $(ab)t=a(t)b(t)$, $(a+b)t=a(t)+b(t)$ на $D_a\cap D_b$, $(-a)t=-a(t)$ на D_a; 2) всякая функция из $\mathfrak{R}$ максимальна в том смысле, что ни одна из функций $a\in\mathfrak{R}$ не может быть распространена по непрерывности на большее открытое подмножество, чем его собственная область D_a. Из теорем 5 и 7 следует вторая основная теорема: Всякое нормальное кольцо типа β, R, изоморфно кольцу $\mathfrak{R}$ максимально непрерывных функций, при этом $a\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $F(a)$ есть неотрицательная функция. Г. И. Домрачёва

8219. О линейных функционалах в линейных полуупорядоченных пространствах с применением к представлению функционалов в виде интегралов. Семадени

(Sur les fonctionnelles linéaires dans des espaces vectoriels semiordonnés avec application à représentation des fonctionnelles par des intégrales. S e m a d e n i Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 7, 457—462, XXXVII (франц.; рез. русск.)

Обобщаются результаты Г. М. Фихтенгольца, относящиеся к линейным функционалам, непрерывным в обобщенном смысле (Фихтенгольц Г. М., Матем. сб., 1938, 4, №1, 193—214). Автор рассматривает KB-линеалы, в которых определена сходимость $x_n \underset{l}{\to} x$, причем предполагается, что

1) если $x_n \underset{l}{\to} x_0$, $y_{nl} \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, то $x_n + \lambda_n y_n \underset{l}{\to} x_0 + \lambda_0 y_0$,

2) если $x_n \geqslant 0 (n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \underset{l}{\to} x_0$, то $x_0 \geqslant 0$,

3) если $x_n \underset{l}{\to} 0$, $0 \leqslant y_n \leqslant x_n$, то $y_n \underset{l}{\to} 0$,

4) если $\| x_n \| \to 0$, то $x_n \underset{l}{\to} 0$,

5) если $x_n \underset{l}{\to} 0$, то $| x_n | \underset{l}{\to} 0$.

Затем вводится сходимость, являющаяся обобщением бинормной сходимости: $x_n \underset{\nu}{\to} x$, если $x_n \underset{l}{\to} x$ и $\sup_n \| x_n \| < \infty$. Через Ξ обозначается пространство, сопряженное к KB-линеалу $\langle X, \| \| \rangle$, т. е. множество линейных функционалов, определенных на X и непрерывных по норме $\| \|$. Известно, что Ξ есть KB-линеал (полный, как нормированное пространство) и в то же время K-пространство. Ξ_l, Ξ_ν — множества соответственно (l)-линейных и (ν)-линейных функционалов, определенных на KB-линеале X. Очевидно, $\Xi_\nu \subset \Xi_l \subset \Xi$. Доказывается, что множества Ξ_l и Ξ_ν — подструктуры пространства Ξ и Ξ_ν замкнуто, т. е. 1) если $\xi, \eta_i \in \Xi_l$, то $\xi \vee \eta_i \in \Xi_l, \xi \wedge \eta_i \in \Xi_l$, 2) если $\xi, \eta_i \in \Xi_\nu$, то $\xi \vee \eta_i \in \Xi_\nu$ и $\xi \wedge \eta_i \in \Xi_\nu$, 3) если $\xi_n \in \Xi_\nu$ $(n = 1, 2 \ldots)$, $\lim \| \xi_n - \xi_0 \| = 0$, то $\xi_0 \in \Xi_\nu$. Далее рассматривается: тело $\mathfrak{A}$ подмножеств данного множества E (алгебра Буля), σ-идеал $R \subset \mathfrak{A}$, X_0 — множество всех линейных комбинаций характеристических функций множеств из $\mathfrak{A}$ и X — множество пределов равномерно сходящихся последовательностей функций из X_0. В X вводят норму $\| x \| = \sup_{t \in E - R} | x(t) |$, где $\sup_{t \in E} | x(t) |$ обозначает наименьшее число α такое, что множество $\{t \in E : x(t) > \alpha\}$ принадлежит R, и отождествляют R-эквивалентные функции. Тогда X есть пространство Банаха, его обозначают $\Lambda = \Lambda(E, \mathfrak{A}, R)$. Общий вид функционалов, определенных в пространстве Λ и линейных, выражается интегралом $\xi(x) = \int_E x(t) d\mu$, где μ — аддитивная функция с ограниченным изменением, определенная для множеств из $\mathfrak{A}$, обращающаяся в нуль для множеств из R; интеграл

$$\int_E x(t) d\mu = \inf_{\{A_i\}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(A_i) = \sup_{\{A_i\}} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \nu(A_i)$$

для $\nu \geqslant 0 (A_i \subset E)$, $\alpha_i = \sup_{A_i - R} x(t)$ и $\beta_i = \inf_{A_i - R} x(t)$, а для любого μ $\int_E x(t) d\mu = \int_E x(t) d\mu_+ - \int_E x(t) d\mu_-$. Затем в Λ вводят (l)-сходимость: $x_n \underset{l}{\to} x_0$, если существует $A \in R$ такое, что $x_n(t) \to x_0(t)$ для $t \in E \setminus A$; (ν)-сходимость определяется так же, как в общем случае. Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция μ, соответствующая линейному функционалу ξ, определенному на пространстве $\Lambda(E, \mathfrak{A}, R)$, была σ-аддитивна: нужно, чтобы ξ был (ν)-непрерывный. В заключение рассматривается пространство $C^*(E)$ вещественных непрерывных функций, определенных и ограниченных на некотором множестве E, которое является вполне регулярным и σ-компактным пространством, т. е. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n — компактные множества $(E_n \subset E_{n+1})$, $\| x \| = \sup_E | x(t) |$, а ($l$)-сходимость в $C^*(E)$ есть равномерная сходимость на каждом множестве $E_n (x_n \underset{l}{\to} x_0)$. Всякий линейный функционал, заданный в пространстве $C^*(E)$, выражается интегралом $\xi(x) = \int_{\beta(E)} \bar{x}(t) d\mu$, где μ — σ-аддитивная функция, определенная для борелевских множеств пространства βE (βE — максимальное бикомпактное расширение пространства E), а $\bar{x}(t)$ есть распространение функции $x(t)$ на βE. Пусть $X = C^*(E)$, $\xi \in X^*$. Для того чтобы функция μ, соответствующая ξ, обращалась в нуль вне E (т. е. чтобы $| \mu | (\beta E \setminus E) = \operatorname{var}_{\beta E \setminus E} \mu = 0$), необходимо и достаточно, чтобы функционал ξ был (ν)-линейным. Работа обобщает и дополняет результаты А. Алексевича (РЖМат, 1954, 4842), И. Муселяка и В. Орлича (РЖМат, 1957, 2174). Г. И. Домрачёва

8220. О линейном полуупорядоченном пространстве беровских функций. Гуань Чжао-чжи (K w a n C h a o - c h i n), Шусюэ цзиньчжань, Shuxue jinzhan, 1958, 4, № 3, 457—461 (кит.; рез. франц.)

Используя результаты книги Канторовича Л. В., Вулиха Б. З. и Пинскера А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950, относящиеся к построению K-пространства по заданной базе, автор доказывает, что беровские функции, определенные в интервале $[0,1]$, принимающие бесконечные значения только на подмножестве первой категории и по модулю равные нулю, кроме подмножества первой категории, образуют пространство Рисса (обозначаемое $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$). Это предложение было другим методом доказано Яном (T. B. Yang), причем он указал, что неизвестно, можно ли в этом пространстве определить метрическую функцию. Автором показано, что рассматриваемое пространство $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ не может быть пространством с метрической функцией (в смысле Л. В. Канторовича), что не существует (O)-линейных функционалов, определенных на этом пространстве. Далее приводится пример, указывающий на ошибку в книге Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит, 1952). Г. И. Домрачёва

8221. Обобщенные случайные величины. Дьюбинс (Generalized random variables. D u b i n s L. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 2, 273—309 (англ.)

Пусть $P = \{U, \mathfrak{U}, u\}$ — вероятностное пространство, т. е. упорядоченная тройка, состоящая из множества U, σ-поля $\mathfrak{U}$ подмножеств множества U и неотрицательной счетно-аддитивной функции множества u, определенной на $\mathfrak{U}$ и удовлетворяющей условию $u(U) = 1$. Пусть далее $\mathfrak{B}$ — некоторая булева σ-алгебра, а $\mathfrak{M}$ — σ-факторалгебра поля $\mathfrak{U}$ по идеалу всех множеств u-меры нуль. $\mathfrak{B}$-измеримой обобщенной случайной величиной на P называется σ-алгебраический гомоморфизм F алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{M}$; если $\mathfrak{B}$ есть σ-поле подмножеств некоторого множества S, то F называется случайной величиной со значениями из S. Сначала находятся достаточные условия, при которых случайная величина со значениями из S порождается некоторой точечной измеримой функцией из U в S, в том смысле, что f^{-1} порождает то же отображение, что и F. Именно (теорема 1) такая функция f существует, если: 1) S есть сопряженное пространство к некоторому сепарабельному метризуемому топологическому пространству B; 2) $\mathfrak{B}$ есть минимальное σ-поле подмножеств в S, для которого все функции $f(s) = (x, s)$, $x \in B$, измеримы относительно $\mathfrak{B}$ (автор называет $\mathfrak{B}$ совокупностью звездно слабо измеримых (weak star mea-

surable) множеств). Далее, для обобщенных случайных величин F со значениями из S вводится понятие интеграла по измеримому множеству $M_0 \in \mathfrak{A}$; при этом предполагается, что S есть сопряженное к некоторому топологическому вещественному линейному пространству B, а $\mathfrak{B}$ есть совокупность звездно слабо измеримых множеств в S. Именно, F называется интегрируемой (звездно слабо интегрируемой, в терминологии автора) на M_0, если: а) для всех измеримых $M \subset M_0$ и для каждого $x \in B$ функция $f(s) = (x, s)$ интегрируема по мере $u_M \circ F$ (где $(u_M \circ F)(A) = u(M \cap F(A))$ для $A \in \mathfrak{B}$); б) соответствие $x \to \int (x, s)\, d(u_M \circ F)$ есть непрерывный линейный функционал в B. Доказывается (предложение 3), что если B полно и метризуемо, то интегрируемость на M_0 имеет место, если только выполняется условие а) и притом только для $M = M_0$. Если F интегрируема на всех $M \in \mathfrak{A}$, то естественным образом получается неопределенный интеграл, являющийся функцией из $\mathfrak{M}$ в S.

Основной результат: Если S есть сопряженное к вещественному метризуемому топологическому пространству B, а $\mathfrak{B}$ — совокупность звездно слабо измеримых подмножеств в S, то функция v из $\mathfrak{M}$ в S является неопределенным интегралом единственной обобщенной случайной величины F со значениями из S тогда и только тогда, когда: α) v абсолютно непрерывна относительно u; β) v звездно слабо счетно-аддитивна. При этом v называется звездно слабо счетно-аддитивной, если для последовательности непересекающихся множеств $M_i \in \mathfrak{A}$ $v\left(\mathbf{V}_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} v(M_i)$, где сумма берется в смысле звездной слабой топологии в S; v называется абсолютно непрерывной относительно u, если существуют системы $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ и выпуклые компактные в звездной слабой топологии множества K_α такие, что 1) $\sup M_\alpha$ есть единица в $\mathfrak{M}$; 2) для каждого α и каждого $M \subset M_\alpha$, $M \in \mathfrak{M}$, $v(M)$ определено и $v(M) \in u(M) \cdot K_\alpha$. В заключение рассматриваются различные специальные классы обобщенных случайных величин и ставятся две проблемы.

М. А. Наймарк

8222. **Об одном обобщении понятия интеграла Лебега. II.** Маттес (Über eine Verallgemeinerung des Lebesgueschen Integralbegriffes. II. Mitteilung. Matthes Klaus), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 3, 221—236 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Продолжая исследования, начатые в части I (РЖМат, 1959, 2493), автор изучает меры со значениями в полуупорядоченном пространстве V. Обобщая понятие лебеговых множеств вещественной измеримой функции вещественного переменного, автор называет спектральным семейством отображение $\sigma(\lambda)$ вещественной прямой R_1 в произвольную булеву алгебру B, удовлетворяющее условиям:

$$1)\ \sigma(\lambda_1) \leqslant \sigma(\lambda_2), \quad \text{если } \lambda_1 \leqslant \lambda_2,$$

$$2)\ \sigma(\lambda - 0) = \bigvee_{\nu < \lambda} \sigma(\nu) = \sigma(\lambda),$$

$$3)\ \sigma(-\infty) = \bigwedge_{-\infty < \lambda < \infty} \sigma(\lambda) = 0,$$

$$\sigma(+\infty) = \bigvee_{-\infty < \lambda < \infty} \sigma(\lambda) = e,$$

где 0 и e — нуль и единица булевой алгебры. Эти спектральные семейства являются „бесточечными" обобщениями измеримых функций и могут заменять их в абстрактных теориях интегрирования. Для того чтобы строить борелевские функции от нескольких спектральных семейств, используются σ-гомоморфизмы одной или нескольких булевых алгебр в другую булеву алгебру. Изучаются свойства и продолжения таких гомоморфизмов. Имея понятие суммы спектральных семейств и произведения спектрального семейства на число и полагая еще $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, если $\sigma_1(\lambda) \leqslant \sigma_2(\lambda)$ для всех λ, получаем, что совокупность $S(B)$ всех спектральных семейств σ-полной булевой алгебры B есть σ-полное полуупорядоченное линейное пространство. Отображение μ σ-полной булевой алгебры B в множество положительных векторов K-пространства V называется V-мерой на B, если μ вполне аддитивно, т. е. $\mu\left(\bigvee_n a_n\right) = \sum_n \mu(a_n)$ при $a_n \wedge a_m = 0$. Рассматривается продолжение мер и доказывается теорема: Пусть μ — отображение булевой алгебры B в множество положительных векторов (включая $+\infty$) K-пространства V, удовлетворяющее условиям: 1) μ конечно-аддитивно, т. е. из $a_1 \wedge a_2 = 0$ следует $\mu(a_1 \vee a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$, 2) μ строго положительно, т. е. $\mu(a) = 0$ лишь при $a = 0$, 3) существует последовательность (c_n) попарно дизъюнктных элементов из B такая, что $e = \bigvee_n c_n$, $\mu(c_n) < +\infty$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и для любого $a \in B$ имеет место равенство $\mu(a) = \sum_n \mu(a \wedge c_n)$. Тогда существует изоморфизм Ψ булевой алгебры B в σ-полную булеву алгебру B', которая является наименьшей содержащей $\Psi(B)$ σ-подалгеброй и отображение $\mu[\Psi^{-1}(a')]$ может быть продолжено до V-меры μ' на B'. Эта теорема является абстрактным аналогом одной теоремы А. Н. Колмогорова о булевых алгебрах (Kolmogoroff A., VI Zjazd Matematyków Polskich, Warszawa, 1948, 21—30). Пусть (B_i), $i \in I$ — совокупность σ-полных булевых алгебр, отображающихся с помощью σ-гомоморфизмов (φ_i), $i \in I$, в σ-полную булеву алгебру B с V-мерой μ. Отображение $\tilde{\mu}$, определяемое равенством

$$\tilde{\mu}_{i_1 \ldots i_k}(a_1, \ldots, a_k) = \mu\left(\bigvee_{\alpha=1}^{n} \varphi_{i_\alpha}(a_\alpha)\right),$$

$a_\rho \in B_{i_\rho}$, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — произвольный конечный набор индексов, называется „объединенной V-мерой" для семейства (B_i), $i \in I$. Изучаются свойства таких мер. В заключение даются вероятностные истолкования некоторых полученных результатов.

В. И. Соболев

8223. **К теории меры. Занен** (A note on measure theory. Zaanen A. C.), Nieuw. arch. Wiskunde, 1958, **3**, № 2, 58—65 (англ.)

Пусть X — непустое множество, μ — σ-аддитивная мера, определенная на σ-кольце Λ подмножеств множества X. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ рассматриваются пространства L_p комплексных функций на X. Пусть выполняется следующее условие: (*) Каждое $E \in \Lambda$, $\mu E > 0$, содержит измеримое подмножество конечной положительной меры. Выполнение условия (*) необходимо и достаточно для справедливости следующих теорем:

Теорема 5. Для всякой $f \in L_\infty$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{g \in L_1,\ \|g\|_1 \leqslant 1} \int |fg|\, d\mu.$$

Теорема 6. Если $1 < p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x)$ измерима и $fg \in L_1$ для любой $g \in L_q$, то $f \in L_p$.

Л. М. Абрамов

8224. **Слабая сходимость мер на сепарабельном метрическом пространстве. Варадараджан** (Weak convergence of measures on separable metric spaces. Varadarjan V. S.), Sankhya. Indian J. Statist., 1958, **19**, № 1-2, 15—22 (англ.)

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных счетно-аддитивных функций множества, определенных на минимальном борелевском σ-кольце множеств B, содержащем все открытые множества, $\mathfrak{M}^+$ — множество всех конечных мер на B и $\mathfrak{M}_p$ — множество всех нормированных мер из $\mathfrak{M}^+$. Устанавливается, что, в соответствии со слабой топологией в $\mathfrak{M}$, в $\mathfrak{M}^+$ можно ввести метрику, так что $\mathfrak{M}^+$

станет сепарабельным метрическим пространством, полным, если X — полное пространство. $\mathfrak{M}$ метризуемо в том и только в том случае, если слабая топология в $\mathfrak{M}$ совпадает с топологией, определяемой нормой.

Л. М. Абрамов

8225. **О конечно-аддитивных мерах. Рао** (A note on finitely additive measures. Rao R. Ranga), Sankhya Indian J. Statist., 1958, **19**, № 1-2, 27—28 (англ.)

Приводится другое доказательство теоремы, доказанной Йосида и Хьюиттом (Yosida, Hewitt, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 46—66). Л. М. Абрамов

8226. **Комплексный последовательностный интеграл Винера или интеграл Фейнмана. Камерон** (A complex sequential Wiener integral or Feynman integral. Cameron R. H.), Abstr. Short comm'uns Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 76 (англ.)

8227. **О неравенстве Ингема и Джессена. Калман** (On the inequality of Ingham and Jessen. Kalman J. A.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 306—311 (англ.)

Пусть (M, m) — измеримое пространство, т. е. множество M с мерой m, определенной на σ-конечном поле „измеримых" подмножеств M, $r(x)$ — измеримая вещественная и положительная функция, $L^{r,+}(M, m)$ — семейство тех вещественных неотрицательных и измеримых функций f на M, для которых существуют $k>0$ такие, что $\int \{kf(x)\}^{r(x)}\,dm(x)<\infty$ (интеграл берется по всему (M, m)). Для $f\in L^{r,+}(M, m)$ и $A>0$ вводится обозначение $\mathfrak{N}_{r,A}(f)=\mathfrak{N}^{(x)}_{r,A}f(x)=\inf_k\left(\frac{1}{k}\right)$, где $k\in E_k$ $(k>0, \int\{kf(x)\}^{r(x)}\,dm(x)\leqslant A)$. § 1 реферируемой работы посвящен обобщению ($\mathfrak{N}_{r,A}$ при $A=m(M)=1$ охватывает $\mathfrak{M}_r$ и σ_r) неравенства Ингема и Джессена:

Теорема 1. Пусть $f(x, y)\in L^{r,+}(M, m)$ при каждом $y\in N$, $f(x, y)\in L^{s,+}(N, n)$ при каждом $x\in M$, $0<r(x)\leqslant s(y)$ и $f(x, y)$ — неотрицательная вещественная и измеримая функция на $M\times N$. Тогда $g(x)=\mathfrak{N}^{(y)}_{s,B}f(x, y)$ и $h(y)=\mathfrak{N}^{(x)}_{r,A}f(x, y)$ — также измеримые функции на M и N соответственно, и если $g\in L^{r,+}(M, m)$, то $h\in L^{s,+}(N, n)$ и $\mathfrak{N}^{(y)}_{s,B}\mathfrak{N}^{(x)}_{r,A}f(x, y)\leqslant\mathfrak{N}^{(x)}_{r,A}\mathfrak{N}^{(y)}_{s,B}f(x, y)$. Если, сверх того, $0<r(x)<s(y)$ и $s(y)$ — ограниченная функция, то знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{N}_{r,A}(g)f(x, y)=g(x)h(y)$$

для почти всех (x, y) из $M\times N$. В § 2 при условии, что

$$M=\{1, 2,\ldots,p\}\ (p\geqslant 2),\ m(\{i\})=m(i)>0\quad (i\in M),$$
$$N=\{1, 2,\ldots, q\}\ (q\geqslant 2),\ n(\{j\})=n(j)>0\quad (j\in N)$$

устанавливается

Теорема 2. $\max\limits_{f\in\mathfrak{F}}\Phi(f)=\max\limits_{f\in\mathfrak{F}^*}\Phi(f)$, где (при выполнении условий теоремы 1)

$$\Phi(f)=\{\mathfrak{N}^{(i)}_{r,A}\mathfrak{N}^{(j)}_{s,B}f(i, j)\}/\{\mathfrak{N}^{(j)}_{s,B}\mathfrak{N}^{(i)}_{r,A}f(i, j)\},$$
$$\mathfrak{F}=\mathfrak{L}_f(f(i, j)\geqslant 0,\ f\not\equiv 0),$$

$\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}_f$ (если $f(i, j)>0$, то $f(k, j)=f(i, e)=0$ для всех $k\neq i$, $e\neq j$),

с помощью которой доказывается результат Тояма (Tôyama H., Proc. Japan Acad., 1948, **24**, № 9, 10—12).

Если $r\equiv\text{const}$ и $s\equiv\text{const}$, то $\max\limits_{f\in\mathfrak{F}}\Phi(f)=[\min(p, q)]^{1/r-1/s}$.

И. А. Эзрохи

8228. **О математических основах квантовой электродинамики. Рашевский П. К.**, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 3—110

Цель статьи — дать математически корректное изложение идей квантовой электродинамики. В основу положен спецкурс, прочитанный на механико-математическом факультете МГУ в 1955—1956 г. § 1 носит подготовительный характер. В §§ 2—10 — в отличие от других изложений этого вопроса — с самого начала вводятся состояния электромагнитного поля как элементы гильбертового пространства, а затем определяются операторы поля. Состояние фотона определяется как векторное поле A_k на полуконусе $-k^{0^2}+k^{1^2}+k^{2^2}+k^{3^2}=0$ $(k^0>0)$ в пространстве импульсов. Предполагается, что вещественные и мнимые части функций A_k^j $(j=0, 1, 2, 3)$ измеримы на указанном полуконусе Ω_0^+ относительно инвариантной меры $(dk)=\frac{dk^1dk^2dk^3}{k^0}$ и существует $\int|A_k^j|^2(dk)<\infty$ $(j=0, 1, 2, 3)$. Скалярным произведением состояний A и B называется выражение $(A, B)=\int(A_k, B_k)(dk)$. Состояние фотона называется реальным, если вектор A_k ортогонален к вектору k в каждой точке. Два реальных состояния A_k и $\bar{A}_k$ эквивалентны, если $\bar{A}_k-A_k=\alpha_k k$ (α_k — числовой множитель). Реальные состояния, рассматриваемые с точностью до замены эквивалентными, называются поперечными. С помощью преобразования Фурье реальные фотонные состояния переносятся в координатное пространство, обнаруживаются свойства 4-потенциала, тензора энергии-импульса. Состояние с данным числом n фотонов описывается тензорным полем $A^{j_1\ldots j_n}_{k_1\ldots k_n}$ $(k_\alpha\in\Omega_0^+,\ j_\alpha=0, 1, 2, 3;\ \alpha=1, 2,\ldots, n)$, симметричным по вертикальным парам индексов. Скалярное произведение состояний $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ определяется формулой

$$(A^{(n)}, B^{(n)})=\frac{1}{n!}\int A^{*k_1\ldots k_n}_{j_1\ldots j_n}B^{j_1\ldots j_n}_{k_1\ldots k_n}(dk_1)\ldots(dk_n).$$

Наиболее общее фотонное состояние представляет собой бесконечную последовательность $A^0+A^1+\ldots+A^n+\ldots$, состоящую из 0-фотонного состояния, 1-фотонного состояния, ..., n-фотонного состояния, ... при условии, что лишь конечное число членов отлично от нуля. В указанном выше пространстве строятся основные операторы поля. При этом возникают обобщенные функции: операторы поля вводятся автором как некоторые „операторные квазифункции". В § 10 разобраны особенности, связанные с присутствием внешнего поля. В §§ 11—17 изучаются электронные и электронно-позитронные (фермионные) состояния. В §§ 18—19 введено фотонно-фермионное поле и поставлена проблема взаимодействия. Вопросы разложения S-матрицы по малому параметру и устранения расходимостей не рассматриваются. В заключение высказаны соображения о возможности применения результатов, полученных в статье, к построению матрицы рассеяния. М. С. Лившиц

8229. **Заметка об эргодической теореме для квантовых систем. Чжан Цзун-суй** (Chang Tsung-sui), Ули сюэбао, Acta phys. sinica, 1958, **14**, № 5, 400—404 (кит.; рез. англ.)

В работе Клейна (Klein M. J., Phys. Rev., 1952, 87, 111) были сформулированы условия, при которых для

квантовой динамической системы выполняется эргодическая теорема (среднее по времени равно среднему по состояниям). В реферируемой работе отмечается неточность в аргументации Клейна и предложен другой подход, уточняющий результаты Клейна. О. С. Парасюк

8230. **Представление форм через ψ и ψ^c. Рюэлль** (Représentation des formes en ψ et ψ^c. Ruelle D.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 5, 466—471 (франц.)

Автор исходит из применения идей Гюрсея (F. Gürsey) к нелинейной теории Гейзенберга, недавно осуществленного Гейзенбергом и Паули. Хорошо известные в этой теории билинейные формы типа $\bar{\psi} O_i \psi$, обобщенные к виду $\bar{\Phi}\tau_a^T O \Phi\left(\Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \gamma_5 \psi^c \end{pmatrix}\right.$ — восьмикомпонентный спинор), написаны с помощью волновых матриц Гюрсея. При предположениях, что ψ антикоммутирует не только сама с собой, но также и с $\bar{\psi}$, вышеуказанные билинейные формы систематизированы таким образом, что каждая из компонент форм выражается функцией от следов следующего вида:

$$\mathrm{Sp}\,(\Psi^+\Gamma\Psi\Gamma'); \quad \mathrm{Sp}\,(\bar{\Psi}\Gamma\bar{\Psi}^+\Gamma');$$

$$\mathrm{Sp}\,(\bar{\Psi}\Gamma\Psi\Gamma'); \quad \mathrm{Sp}\,(\Psi^+\Gamma\bar{\Psi}^+\Gamma').$$

Дан принцип получения тождеств между произведениями рассмотренных билинейных форм. Некоторые из этих тождеств выписаны. Показано, что существует только одна биквадратичная форма Ψ и Ψ^c, инвариантная как для группы Лоренца, так и для групп Паули.

Н. А. Тихонов

8231. **О тензорах группы Паули. Жеэньо** (Sur les tenseurs du groupe de Pauli. Géhéniau J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 5, 418—422 (франц.; рез. англ.)

Тензорные квадратичные функции компонент четырехрядного спинора и его эрмитово сопряжение классифицированы с помощью групп Паули в изоскалярах и изовекторах. Для определенных выше тензоров, изотензоров и изоспиноров приводится без доказательства несколько тождеств (доказательства некоторых из этих тождеств содержатся в работах: Kofink, Ann. phys., 1937, **30**, 91 и Ruelle (реф. 8230)). Упоминается о соотношении между описанным формализмом и формализмом Гюрсея (F. Gürsey). Н. А. Тихонов

8232. **О возможной геометрической интерпретации калибровочных преобразований. Жевуский** (On a possible geometrical interpretation of gauge transformations. Rzewuski J.), Nuovo cimento, 1958, **9**, № 6, 942—949 (англ.; рез. итал.)

Релятивистская физика кладет в основу своих рассмотрений группу $\mathfrak{A}$ унимодулярных (комплексных) матриц второго порядка:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

действующую в двумерном комплексном („спинорном“) пространстве. Автор предлагает рассматривать более широкую группу преобразований, действующую в четырехмерном комплексном пространстве, именно прямое произведение $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$, причем преобразования вида $a_1\times a_2$ определяются по обычному правилу прямого умножения матриц. Координаты четырехмерного вектора в пространстве Минковского являются определенными билинейными формами от введенных таким образом спиновых переменных. Однако эта зависимость различна для пространственно-подобных и времени-подобных векторов, а скалярные квадраты этих векторов сохраняются не при всех преобразованиях из $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$. Если элемент из $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ имеет вид $e\times\gamma$, где $\gamma = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, а $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то получается преобразование, называемое в физике „калибровочным“; тем самым дается некоторая геометрическая интерпретация этих преобразований.

Д. П. Желобенко

8233. **Дополнительность и логика. III. Кратное квантование. Вейцзеккер, Шейбе, Зюсман** (Komplementarität und Logik. III. Mehrfache Quantelung. Weizsäcker C. F. v., Scheibe E., Süssmann G.), Z. Naturforsch., 1958, **13a**, № 9, 705—721 (нем.)

В предыдущих двух статьях (РЖМат, 1959, 5469) авторами было предложено толкование квантовой механики, названное ими „логическим толкованием“. В частности, в первой работе утверждалось, что из этого „логического толкования“ следует смысл „кратного квантования“. Этот вопрос исследуется в реферируемой работе и с помощью небольшого числа абстрактных предпосылок выводятся правила квантовой теории невзаимодействующих полей. Хотя плодотворность такого подхода является пока дискуссионной, однако общность некоторых высказываний и идей этой работы с классической работой Неймана „Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент“ (сб. „Автоматика“, М., Изд-во ин. лит., 1956) заставляет отнестись к ней с надлежащим вниманием. О. С. Парасюк

8234 Д. **Некоторые вопросы анализа в локально выпуклых пространствах. Энгельсон Я. Л.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Латв. ун-т, Рига, 1958

См. также: 7835, 7918, 7973, 7976, 8031, 8035, 8068 К, 8117, 8496.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

8235. **Характеризация нормального распределения. Рао** (A characterization of the normal distribution. Rao J. N. K.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 3, 914—919 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью вероятности $f(x)$.

Пусть, далее,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\delta^2 = \left(\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_{tj}^2\right)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^{m}\left(l_{t1}x_1 + \ldots + l_{tn}x_n\right)^2,$$

где $\sum_{j=1}^{n} l_{tj} = 0$ для $t = 1, \ldots, m$.

Тогда необходимым и достаточным условием нормальности $f(x)$ является независимость $\bar{x}$ и δ^2.

Эта теорема обобщается на многомерный случай.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестны работы Ю. В. Линника и А. А. Зингера о

полиномиальных статистиках, содержащие значительно более общий результат. А. М. Каган

8236. Свойство единственности, которым не обладает нормальное распределение. Стек (A uniqueness property not enjoyed by the normal distribution. Steck George P.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 2, 604—606 (англ.)

Известно, что если случайные величины X и Y (или $1/X$ и $1/Y$) независимы и нормально распределены с нулевым средним и дисперсией σ^2, то случайная величина X/Y имеет распределение Коши.

В заметке построены примеры, показывающие, что обратное утверждение неверно, т. е. из того факта, что отношение двух независимых, одинаково распределенных случайных величин X и Y имеет распределение Коши, не следует, что случайные величины X и Y (или $1/X$ и $1/Y$) нормально распределены.

Пусть X и Y — независимые, одинаково распределенные случайные величины с общей симметрической функцией плотности $p(x)$; через φ обозначим характеристическую функцию случайной величины $(4/\pi)\log|X|$, пусть $Z = X/Y$.

Из того, что Z имеет распределение Коши, следует, что

$$p_{(4/\pi)\log|Z|}(u) = \frac{1}{4\operatorname{csh}\pi u/4}, \quad -\infty < u < +\infty.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \frac{e^{i\theta(t)}}{(\operatorname{csh} 2t)^{1/2}} = \frac{\cos\theta(t)}{(\operatorname{csh} 2t)^{1/2}} + i\frac{\sin\theta(t)}{(\operatorname{csh} 2t)^{1/2}},$$

где $\theta(t)$ — такая непрерывная действительная нечетная функция, что $\varphi(t)$ является характеристической функцией.

С помощью характеристической функции определяется функция плотности случайной величины X (и соответственно $1/X$) для различных возможных видов функции $\theta(t)$. Оказывается, что случайная величина X (или $1/X$) имеет закон распределения, отличный от нормального. В. И. Бабкин

8237. Предельные распределения в некоторых проблемах размещения. Уэйсс (Limiting distributions in some occupancy problems. Weiss Irving), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 3, 878—884 (англ.)

r объектов без всяких ограничений размещаются в N ячейках; всевозможные размещения предполагаются равновероятными. Введем случайные величины X_j следующим образом:

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } j \text{ свободна,} \\ 0, & \text{если она занята,} \end{cases}$$

$X = \sum_{j=1}^{N} X_j$. Пусть $N \to \infty$, $r \to \infty$ так, что $\frac{N}{r} = \alpha > 0$.

Основной результат состоит в доказательстве асимптотической нормальности случайной величины $\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$.

Для $E(X)$ и $D(X)$ в работе получены следующие выражения:

$$E(X) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\alpha N},$$

$$D(X) = N[e^{-\alpha} - (\alpha + 1)e^{-2\alpha}] + O(1).$$

Без доказательства (со ссылкой на неопубликованную диссертацию автора) приводится следующее утверждение: Производим w последовательных независимых испытаний, каждое из которых состоит в случайном распределении q объектов в N ячейках так, что в одну ячейку может попасть не более одного объекта (в каждом отдельном испытании!). Тогда при $qw = N\alpha$, $\alpha > 0$, число свободных ячеек распределено асимптотически нормально; при $qw = N\log\frac{N}{\lambda}$, $\lambda > 0$, это число распределено асимптотически по закону Пуассона

А. М. Каган

8238. Некоторые предельные теоремы для числа пересечений случайной функцией границы данной области. Гихман (Деякі граничні теореми для кількості перетинів випадковою функцією границі даної області. Гіхман Й. І.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 149—164 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается последовательность серий цепей Маркова $\eta_{n0}, \eta_{n1}, \ldots, \eta_{nm_n}$. Предполагается, что существует последовательность разбиений отрезка $[0,1]$: $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nm_n} = 1$ такая, что последовательность процессов $\eta_n(t)$, $\eta_n(t) = \eta_{nk}$ при $t_{nk} \leqslant t < t_{nk+1}$ сходится к непрерывному диффузионному процессу, управляемому уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}b(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Пусть G — некоторая область на плоскости (t,x). Последовательность η_{nk} пересекает границу области G в точке t_{ni}, если $(t_{ni-1}, \eta_{ni-1}) \in G$, $(t_{ni}, \eta_{ni}) \notin G$ или $(t_{ni-1}, \eta_{ni-1}) \notin G$, $(t_{ni}, \eta_{ni}) \in G$. Изучается предельное распределение для числа пересечений границы области G. Положим

$$\sigma_n = \sum_{k \in \omega_n} \sqrt{\Delta t_{nk-1}}, \quad \Delta t_{nk-1} = t_{nk} - t_{nk-1},$$

где ω_n обозначает множество индексов, для которых последовательность η_{nk} пересекает границу области G. Пусть

$$M(|\eta_{ni} - \eta_{ni-1}| \mid \eta_{ni-1} = x) = \alpha(t_{ni-1}, x)\sqrt{\Delta t_{ni-1}} + o(\sqrt{\Delta t_{ni-1}}),$$

а $g(t, x, \tau, y)$ — плотность вероятности перехода в предельном процессе. Предположим далее, что граница области G состоит из конечного числа гладких кривых $\lambda_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,j$, а $\eta_{n0} = 0$. Тогда при некоторых дополнительных предположениях преобразование Лапласа величины σ_n, $Me^{-z\sigma_n}$, при $n \to \infty$ стремится к величине $u(0,0,z)$, где $u(t,x,z)$ — решение уравнения

$$u(t,x,z) = 1 - z\int_t^1 \sum_1^j \alpha(\tau, \lambda_i(\tau))g(t,x,\tau,\lambda_i(\tau))u(\tau,\lambda_i(\tau),z)d\tau.$$

Получены аналогичные уравнения и для преобразований Лапласа величин более общего вида, связанных с числом пересечений последовательностью границы области. А. В. Скороход

8239. Суммы степеней независимых случайных величин. Шапиро (Sums of powers of independent random variables. Shapiro J. M.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 2, 515—522 (англ.)

Пусть (x_{nk}), $k = 1,2,\ldots,k_n$; $n = 1,2,3,\ldots$ — последовательность серий независимых (внутри каждой серии) случайных величин, удовлетворяющих условию инфинитезимальности: $\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} P(|x_{nk}| > \varepsilon) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

Для такой системы случайных величин детально изучены условия сходимости функции распределения $F_n(x)$ суммы случайных величин в n-й серии к предельной функции распределения $F(x)$ (РЖМат, 1955, 5`68).

Используя методы, развитые в цитированной работе, автор изучает систему случайных величин $(|x_{nk}|^r)$, где $r \geqslant 1$. Он находит необходимые и достаточные условия сходимости функции распределения $F_n^r(x)$ величины $S_n^r = |x_{n1}|^r + \ldots + |x_{nk_n}|^r - B_n(r)$, где $B_n(r)$ — некоторая константа, к предел

ции распределения $F^r(x)$ при $n \to \infty$, а также необходимые и достаточные условия сходимости $F^r(x)$ к функции распределения $H(x)$ при $r \to \infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^r(x) = F^r(x)$ для $r \geqslant r_0 \geqslant 1$ и $\lim\limits_{r\to\infty} F^r(x) = H(x)$, то $H(x)$ необходимо является функцией распределения суммы двух независимых случайных величин, одна из которых нормальна, а другая распределена по закону Пуассона, причем возможны случаи вырождения либо первого, либо второго распределения.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, то $F_n^r(x)$ сходится к $F^r(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sup_{\inf} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_0^\varepsilon x^{2r}\, d\left[F_{nk}(x) - F_{nk}(-x-) \right] - \left(\int_0^\varepsilon x^r d\left[F_{nk}(x) - F_{nk}(-x-) \right] \right)^2 \right\} = \sigma_r^2 < \infty$$

(Обозначение $\lim\limits_{\inf}^{\sup}$ означает, что условие выполняется как при lim sup, так и при lim inf. *Ред*). Необходимые и достаточные условия сходимости $F^r(x)$ к $H(x)$ выражаются в виде ограничений на интегрирующую функцию интеграла Стилтьеса, представляющего логарифм характеристической функции предельного распределения $F(x)$ в формуле Леви—Хинчина для безгранично делимых знаков.

В конце статьи приведены пять различных достаточных условий сходимости $F^r(x)$ к функции распределения пуассоновского типа. В. М. Волков

8240. Предельное распределение для брауновского движения в ограниченной области с мгновенным возвращением. Шерман (The limiting distribution of Brownian motion in a bounded region with instantaneous return. Sherman B.), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 1, 267—273 (англ.)

Рассматривается трехмерный марковский процесс, который внутри области D ведет себя как процесс броуновского движения, а достигнув границы Γ области D в точке α, мгновенно возвращается внутрь области, попадая во множество A с вероятностью $\mu(\alpha, A)$. Предполагается, что область ограничена конечным числом гладких поверхностей, что для уравнения $\Delta u = 1$ существует функция Грина в области D и существует такое множество $B \subset D$, что $\inf\limits_{\alpha\in\Gamma} \mu(\alpha, B) > 0$. Пусть $u(t, \xi, x)$ — решение уравнения $\frac{1}{2}\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ с граничным условием $u(t, \xi, \alpha) = 0$ при $\alpha \in \Gamma$ и начальным условием $u(0, \xi, x) = \delta(\xi - x)$. Обозначим далее через $\varphi(t, \xi, \alpha)$ плотность вероятности достичь Γ в момент t в точке α, находясь в начальный момент времени в точке x. Пусть далее для $S \subset \Gamma$

$$\pi(\alpha, S) = \int_D \mu(\alpha, d\xi) \int_S \int_0^\infty \varphi(t, \xi, \beta)\, dt d\beta.$$

Рассмотрим на Γ цепь Маркова с переходной вероятностью $\pi(\alpha, S)$. Эта цепь будет эргодичной. Обозначим через $\pi(S)$ стационарное распределение для этой цепи Маркова. Тогда плотность стационарного распределения исходного процесса задается формулой:

$$p(x) = \frac{\int_0^\infty \int_\Gamma \int_D u(t, \xi, x)\, \mu(\alpha, d\xi)\, \pi(d\alpha) dt}{\int_0^\infty \int_\Gamma \int_D t\varphi(t, \xi, \alpha)\, \mu(\alpha, d\xi)\, \pi(d\alpha)\, dt}.$$

А. В. Скороход

8241. Элементарная теорема относительно стационарных эргодических процессов. Брейман (An elementary theorem concerning stationary ergodic processes. Breiman Leo), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 2, 592—595 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $\ldots x_{-1}\, x_0\, x_1 \ldots$ будет строго стационарный процесс такой, что каждое множество, инвариантное относительно сдвигов, имеет меру нуль или единицу. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность действительных функций и φ_n — измеримая функция $n+1$ переменных. Тогда, если последовательность $\varphi_n(x_0, \ldots, x_n)$ и последовательность $\varphi_n(x_{-n}, \ldots, x_0)$ обе сходятся по вероятности, то их пределы почти наверное постоянны и равны.

Указываются приложения теоремы, в частности доказательство состоятельности оценок максимального правдоподобия для стационарных распределений.

В. И. Бабкин

8242. К алгорифму Якоби. Шмидт (On the Jacobi-algorithm. Schmidt W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 34 (англ.)

8243. Поправка к работе «Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова». Добрушин Р. Л., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 4, 477

См. РЖМат, 1956, 3186.

8244. Влияние теории информации. Калбертсон (The impact of information theory. Culbertson Alan F.), Electron. Inds, 1958, 17, № 8, Electron. Operat., Aug., 02—03, 05—06, 012—013 (англ.)

Популярное изложение элементов теории информации.

Р. Л. Добрушин

8245. Теория информации. Сёренсен (Informationsteori. Sørensen N. A. L.), Tidsskr. ingeniørofficerer, 1958, 27, № 4, 85—104 (датск.)

Популярная статья. Р. Л. Добрушин

8246. Об информации непрерывных сообщений по Шеннону. Линковский Г. Б., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 12—15

Нечеткое изложение фактов, хорошо известных из цитируемой автором литературы. Р. Л. Добрушин

8247 К. Теория информации. Голдман (Information theory. 3 rd print. Goldman Stanford. New York, Prentice-Hall, Inc., 1955, XIV, 385 pp., ill.) (англ.)

См. РЖМат, 1956, 3223 К.

8248 К. Теория информации. Земанек (Információelmélet. 1. Zemanek Heinz. Ford. németből. Budapest, Műszaki Kiadó, 1956, 124 l., térk., 13. 50 Ft.). Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 10—12, 367 (венг.)

8249 К. Курс теории вероятностей. Гнеденко (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Gnedenko B. V. Übers. aus dem Russ. Berlin, Akad.-Verl., 1957, XI, 387 S., 29. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 4, 235 (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 4900 К).

8250 К. Теория вероятностей и математическая статистика. Фиш (Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statisktik. Fisz Marek, Warszawa, P. W. N., 1954, 374 s., 31, 50 zł.) (польск.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8251. О некоторых принципиальных вопросах математической статистики. Штейнхаус (O některých zásadních otázkách matematické statistiky. Steinhaus Hugo), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, 2, № 1, 36—43 (чешск.)

Перевод с немецкого РЖМат, 1957, 2549 К.

Автор высказывает своеобразные замечания по поводу некоторых невыясненных вопросов, касающихся основ

математической статистики. Используя теорию Штейнхауса-Каца независимых функций, автор на одном простом примере показыв ет, каким образом можно преодолеть расхождения между детерминистической и статистической механикой Затем он кратко касается понятия случайности и априорной вероятности. Исходя из гипотезы Байеса о равномерном априорном распределении вероятности, автор предлагает в качестве меры количества информации величину

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt}\ ,$$

где $f(t)$ означает плотность. Кратко излагаются приложения этой меры к контролю качества и к определению платежного тарифа за потребление электрического тока. В заключение автор занимается вопросами статистического решения и критикует понятие уровня значимости.

M. Josífko

8252. **Точность несмещенных оценок по отношению. Гудман, Хартли** (The precision of unbiased ratio-type estimators. Goodman Leo A., Hartley H. O.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 282, 491—508 (англ.)

Имеется генеральная совокупность из N элементов, каждый элемент состоит из x-ов и y-ов (например, N пар вида (x_i, y_i)). Если генеральное среднее $\bar{X}$ известно, то генеральное среднее $\bar{Y}$ часто оценивается с помощью случайной выборки в n элементов и употреблением одной из смещенных оценок по отношению: $\tilde{y}$ (основанной на отношении выборочного среднего $\bar{y}$ и выборочного среднего $\bar{x}$) или $\hat{y}$ (основанной на выборочном среднем отношении x и y) (РЖМат, 1955, 5984).

В случае, когда берется случайная выборка объема n из N пар (x_i, y_i), то эти оценки имеют вид

$$\tilde{y} = \bar{X}\cdot\bar{y}/\bar{x},\quad \hat{y} = \bar{X}\cdot\bar{r},$$

где $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{r}$ — арифметические средние y_i, x_i, и $r_i = y_i/x_i$ соответственно. В работе выводится несмещенная оценка для генерального среднего $\bar{Y}$

$$y' = \bar{X}\,\bar{r} + \frac{(N-1)\,n}{N(n-1)}\,(\bar{y} - \bar{r}\,\bar{x}).$$

Получена формула для дисперсии оценки y'. Произведена оценка точности смещенных оценок $\tilde{y}$ и $\hat{y}$ сравнительно с несмещенной оценкой y'. Выведены условия, при которых $\mathrm{Var}\,y' < \mathrm{Var}\hat{y}$. Показано, что $\mathrm{Var}\,y' < \mathrm{Var}\,\tilde{y}$ (когда $n\to\infty$) тогда и только тогда, когда наклон линии регрессии y по x ближе к генеральному среднему отношения y и x, чем к $\bar{Y}/\bar{X}$. При выполнении условия $E(y/x) = ax$, где a — неизвестная положительная константа, получены точные формулы для дисперсии и рассмотрена эффективность рассматриваемых трех оценок. Рассмотрена относительная эффективность некоторых оценок по отношению и регрессионных оценок.

В. И. Бабкин

8253. **Несмещенный критерий для определенного значения параметра в нецентральном F-распределении. Маракатхавалли** (Unbiased test for a specified value of the parameter in the non-central F distribution. Marakathavalli N.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, **15**, № 3, 321—330 (англ.)

Пусть

$$F' = \frac{\frac{\chi'^2_{\nu_1}}{\nu_1}}{\frac{\chi^2_{\nu_2}}{\nu_2}},$$

где $\chi'^2_{\nu_1}$ и $\chi^2_{\nu_2}$ — независимые случайные величины, имеющие функциями распределения соответственно нецентральное распределение χ^2 с ν_1 степенями свободы и параметром λ и обычное распределение χ^2 с ν_2 степенями свободы. Известно, что плотностью распределения F' является

$$P(F') = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}+j} (F')^{\frac{\nu_1}{2}+j-1}}{B\left(\frac{\nu_2}{2},\ \frac{\nu_1}{2}+j\right)} \times$$

$$\times \left(1 + F'\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+j\right)}.$$

Пусть проверяется нулевая гипотеза, согласно которой $\lambda = \lambda_0$ при альтернативной гипотезе $\lambda \gtrless \lambda_0$. Строится критерий, при котором нулевая гипотеза отвергается, если

$$F' \leqslant a_1 \text{ или } F' \geqslant a_2,$$

где

$$\int_0^{a_1} P_{\nu_1,\nu_2}(F' \mid \lambda_0)\,dF' + \int_{a_2}^{\infty} P_{\nu_1,\nu_2}(F' \mid \lambda_0)\,dF' = \alpha$$

(α — уровень значимости).

Указывается способ определения чисел a_1 и a_2, при которых критерий является равномерно наиболее мощным несмещенным критерием для проверки гипотезы $\lambda = \lambda_0$ при альтернативной гипотезе $\lambda \gtrless \lambda_0$.

В заключение рассматриваются некоторые применения несмещенного критерия F'. Приведены таблицы для определения чисел a_1 и a_2 при $\alpha = 0{,}05$ и заданных значениях ν_1, ν_2 и λ_0.

С. Х. Туманян

8254. **Многомерная оценка по отношению для конечных совокупностей. Олкин** (Multivariate ratio estimation for finite populations. Olkin Ingram), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 154—165 (англ.)

Для оценки неизвестного среднего значения $\bar{Y}$ конечной совокупности часто рассматривается вспомогательная, коррелированная с данной, конечная совокупность, среднее значение $\bar{X}$ которой известно. Берется выборка $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ из совокупности $(X_1, Y_1),\ldots,(X_N, Y_N)$. Оценкой по отношению для $\bar{Y}$ называется величина $\tilde{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}$. В работе предполагается обобщенная многомерная оценка по отношению. Наряду с совокупностью $Y_1,\ldots,Y_N$ с неизвестным $\bar{Y}$ рассматриваются совокупности $X_{11},\ldots,X_{1N};\ldots;X_{p1},\ldots,X_{pN}$, для которых известны средние $\bar{X}_1 \neq 0,\ldots,\bar{X}_p \neq 0$ и матрица вторых моментов $(p+1)$-го порядка. Берется выборка: $(y_j, x_{1j}, x_{2j},\ldots,x_{pj})$ $(j = 1, 2,\ldots, n)$. Предлагаемая оценка имеет вид: $\tilde{y} = w_1 r_1 \bar{X}_1 + w_2 r_2 \bar{X}_2 + \ldots + w_p r_p \bar{X}_p$, где $r_i = \bar{y}/\bar{x}_i$, а $w = (w_1,\ldots,w_p)$ — функция веса, удовлетворяющая условию $\Sigma_1^p w_i = 1$.

Найдена оптимальная функция веса, дающая оценку с минимальной дисперсией.

Б. Н. Гартштейн

8255. **Замечание о доверительных интервалах в проблемах регрессии. Мандел** (A note on confidence intervals in regression problems. Mandel John), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 3, 903—907 (англ.)

Рассматривается обычная модель $y_\alpha = \sum_i \beta_i x_{i\alpha} + \varepsilon_\alpha$, $i = 1,\ldots,k$, $\alpha = 1,\ldots,N$, где ε_α независимы и распределены нормально с одинаковыми средними и дисперсией. Используя распределение Фишера, можно построить

общую доверительную область для β_i. Последняя используется в работе для построения доверительного интервала для произвольной, но известной функции $z = f(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, что, в свою очередь, применяется к решению следующей задачи, встречающейся на практике:

Пусть $y_\alpha = \beta_0 + \beta_1 (x_\alpha - \bar{x}) + \varepsilon_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$,— прямая линия регрессии; для β_0, β_1 известны оценки наименьших квадратов. Зная p „будущих" наблюдений y, построить доверительные интервалы для соответствующих значений x. А. М. Каган

8256. **Несколько элементарных методов вычисления параметров в дисперсионном анализе. Мадоу** (Some simple methods of computing parameters in the analysis of variange. Madow William G.), Biometrics, 1957, **13**, № 4, 537—540 (англ.)

Приводится несколько элементарных способов вычисления числа степеней свободы и параметра λ, определяющего для распределения Танга при анализе дисперсии мощность критерия. С. В. Ефремов

8257. **Некоторые простые непараметрические несмещенные критерии для испытания двухвыборочной гипотезы при парных наблюдениях. Вальтер** (Einige einfache nichtparametrische überall wirksame Tests zur Prüfung der Zweistichprobenhypothese mit paarigen Beobachtungen. Walter E.), Metrika, 1958, **1**, № 2, 81—88 (нем.)

Пусть имеется n пар независимых наблюдений, образующих две параллельные выборки, и требуется проверить тождественность распределений генеральных совокупностей, к которым принадлежат эти выборки. Вычислив разности между парными наблюдениями и упорядочив разности по абсолютной величине, объединяют соседние разности в $r \geqslant 2$ групп, пропуская каждый раз одну разность между соседними группами. Обозначая через d_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ разность между числом положительных и отрицательных разностей в r-й группе, образуют следующую статистику:

$$H = \sum g_i \mid d_i \mid^p,$$

где $p \geqslant 1$, $g_i \geqslant 0$ (вес i-й группы). Критическая область для нулевой гипотезы определяется неравенством $H > H_0$, где H_0 подбирается для данного уровня значимости. Утверждается, что среди критериев этого типа есть строго несмещенные. Подчеркиваются преимущества так называемого "максимального" теста, по которому нулевая гипотеза бракуется, если $k > 0$ наибольших по абсолютному значению разностей имеют одинаковый знак, причем k определяется из уравнения $2^{-k+1} = \alpha$. Доказательств не приводится. Библ. 9 назв. Н. В. Смирнов

8258. **Новый двумерный критерий знаков. Блумен** (A new bivariate sign test. Blumen Isadore), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 282, 448—456 (англ.)

Предлагается критерий проверки гипотезы о том, что медиана (μ, ν) некоторого двумерного распределения принимает фиксированное значение, которое без ограничения общности можно положить равным (0, 0). Если (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) — случайная выборка из двумерной совокупности, то критерий строится следующим образом: 1) для каждого i точка пересечения единичного круга плоскости (x, y) с вектором (x_i, y_i) (продолженным, если необходимо) отмечается знаком +, с вектором $(-x_i, -y_i)$ — знаком —; 2) начиная с любого знака и двигаясь по единичному кругу в заданном направлении, следующий знак передвигают по кругу таким образом, чтобы расстояние между ними составляло дугу, соответствующую π/n градусам; 3) продолжают эту процедуру до тех пор, пока знаки не расположатся на одинаковых расстояниях друг от друга по единичному кругу; 4) подсчитываются координаты центра тяжести системы, полученной расположением единичной массы в точках, отмеченных знаком +. Критерий основан на расстоянии полученной точки от начала координат. Показывается, что удвоенный квадрат этого расстояния при больших n имеет асимптотически распределение χ^2 с двумя степенями свободы, если верна нулевая гипотеза (медиана принимает значение (0, 0)). Обсуждается вопрос об относительной эффективности предложенного критерия по сравнению с другими аналогичными критериями знаков и критерием T^2 Хотеллинга. Ю. И. Максимов

8259. **Неслучайность в последовательности двух альтернатив. I. Критерий Уилкоксона и родственные ему критерии. Бартон, Дейвид, Маллоуз** (Non-randomness in a sequence of two alternatives. I. Wilcoxon's and allied test statistics. Barton D. E., David F. N., Mallows C. L.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 166—180 (англ.)

Пусть дана случайная последовательность $r = r_1 + r_2$ элементов, из которых r_1 обладает свойством x и r_2 — свойством y. Все элементы можно попарно сравнивать, т. е. можно проделать C_r^2 независимых сравнений. Такая модель называется φ-моделью.

Рассматриваются следующие три вида этой модели:

I. Элементы последовательности упорядочиваются по характеристике, по отношению к которой все они неотличимы. По нулевой гипотезе упорядочивание беспристрастно, т. е. все расположения равновероятны, по конкурирующей гипотезе существует вероятность $p \neq 1/2$ элементу со свойством x стоять перед элементом со свойством y.

II. Все r_1 элементов x характеризуются одним общим размером некоторого признака, меньшего (или большего), чем общий размер элементов y. Элементы обеих групп упорядочены случайно. По нулевой гипотезе отсутствуют какие-либо данные для того, чтобы отдать предпочтение размеру элементов одной из групп. По конкурирующей гипотезе с вероятностью $p \neq 1/2$ размер группы элементов со свойством x будет сочтен более высоким, чем размер группы элементов со свойством y.

III. Все элементы со свойством x имеют размер меньший, чем все элементы со свойством y. По нулевой гипотезе упорядочивание случайно. По конкурирующей гипотезе имеется вероятность $p \neq 1/2$ расположить два элемента в порядке возрастания их размера. Изучается критерий Уилкоксона S, определяемый как сумма рангов элементов, обладающих свойством y. Во всех трех рассматриваемых схемах S является достаточной статистикой для $\varphi = p/q$.

Сравнивается мощность критериев S и b, S и T, где b — число элементов, обладающих свойством y и имеющих порядок меньший, чем порядок медианы, а T — число серий обеих альтернатив в выборке. Б. Н. Гарштейн

8260. **Неслучайность в последовательности двух альтернатив. II. Критерий серий. Бартон, Дейвид** (Non-randomness in a sequence of two alternatives. II. Runs test. Barton D. E., David F. N.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 253—256 (англ.)

Предполагается, что существует бесконечная совокупность, состоящая из двух характеристик в пропорциях p и q. Выборка размера r из этой совокупности располагается в том порядке, в каком она получена. По нулевой гипотезе расположение двух характеристик в этой выборке случайно, по конкурирующей гипотезе на производящего выборку при выборе $(n+1)$-го элемента влияют имеющиеся у него сведения о характеристике n-го элемента.

Пусть x и y — характеристики элементов совокупности, i — номер элемента в выборке. Тогда $P(x_i) = p =$

$= 1 - q = 1 - P(y_l)$. Для проверки нулевой гипотезы предлагается известный критерий T, равный числу серий обеих альтернатив при фиксированных числах r_1 и r_2 элементов x и y соответственно в выборке. При конкурирующей гипотезе испытания образуют простую цепь Маркова.

Пусть $P\{x_i/x_{i-1}\} = p + q\theta$; $P\{y_l/x_{l-1}\} = q(1-\theta)$;
$P\{x_i/y_{i-1}\} = p(1-\theta)$; $P\{y_l/y_{l-1}\} = q + p\theta$.

Если r фиксировано, то T является достаточной статистикой для θ. Сравниваются мощности критериев T и b, T и S, где b — число элементов одной характеристики, порядок которых меньше порядка медианы, S — сумма порядков элементов этой характеристики.

Б. Н. Гарттштейн

8261. **Нахождение обратной выборочной матрицы вторых моментов для стационарного регрессионного процесса. Сиддики** (On the inversion of the sample covariance matrix in a stationary autoregressive process. Siddiqui M. M.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 2, 585—588 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — наблюденные значения некоторой величины, соответствующие моментам времени $t = 1, 2, \ldots, N$; предполагается, что процесс получения x_t стационарен и управляется авторегрессионным соотношением порядка k:

$$a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \ldots + a_k x_{t-k} = z_t,$$

$z_t, z_{t+1} \ldots$ — независимые случайные величины, нормальные (0, 1). Опираясь на свойства симметрии матрицы вторых моментов $A_N = \| Ex_i x_j \|$, автор получает формулы для нахождения элементов матрицы A_N^{-1} через коэффициенты регрессионного соотношения. В качестве иллюстрации разобран случай $k = 2$. В. М. Волков

8262. **Диаграммы функций мощности для определения размера выборки в дисперсионном анализе. Фелдт, Махму** (Power function charts for specification of sample size in analysis of variance. Feldt Leonard S., Mahmoud Moharram W.), Psychometrika, 1958, **23**, № 3, 201—210 (англ.)

Приведены диаграммы, по которым можно быстро и просто определить необходимый объем наблюдений в схеме случайных блоков. Объем наблюдений зависит от мощности критерия, от уровня значимости, от числа степеней свободы и параметра нецентральности в нецентральном распределении Фишера. П. А. Строганов

8263. **Применение усеченного распределения составляющей случайной величины X для уменьшения дисперсии результирующей случайной величины Y. Рузе** (Utilisation d'une distribution tronquée pour la variable agissante X en vue de réduire la dispersion d'une variable stochastiquement résultante Y. Rouzet G.), Rev. statist. appl., 1958, **6**, № 1, 73—90 (франц.)

Рассматривается случайная величина Y, являющаяся суммой нескольких независимых слагаемых, из которых слагаемое X играет наибольшую роль. Предполагается, что величины X и Y нормированы и распределены нормально и что коэффициент корреляции между ними ρ известен. Производится симметричное усечение плотности распределения величины X числом T, т. е. вместо плотности распределения $g(x)$ величины X рассматривается плотность $g(x, T)$, равная нулю для $x < -T$ и $x > T$ и равная

$$g(x) / \int_{-T}^{T} g(x)\,dx \quad \text{для} \quad -T \leqslant x \leqslant T.$$

При этом надлежащим выбором T можно снизить верхнюю α-процентную точку $\theta(\alpha, T)$ распределения величины Y, доведя ее до желаемых размеров. Приводятся таблицы и графики. Б. Н. Гарттштейн

8264. **Вычисление многомерной корреляции на электронных вычислительных машинах. Мос** (Berechnung mehrfacher Korrelationen auf elektronischen Rechenmaschinen. Moos H.), Metrika, 1958, **1**, № 2; 148—153 (нем.)

Для вычислений функций регрессии при многочисленном статистическом материале полезно применить электронные вычислительные машины. Автор излагает методы и практические приемы при вычислении коэффициентов регрессии и оценок дисперсий. По резюме автора

8265. **Заметка о предельных распределениях упорядоченных статистик. Каштру** (Note über die Grenzverteilungen der geordneten Statistiken. Autoref. Castro Gustavo de. Bol., Inst. Actuarios Portug., 1954, **9**, 35—40) (порт.; рез. англ.)

8266. **Анализ ортогональных планов с делянками без данных. Сторх** (Open plaatsen in orthogonale proefschema's. Storch J. M.), Statist. neerl., 1957, **11**, № 3, 131—139 (гол.; рез. англ.)

8267. **Последние достижения в области экспериментального планирования с количественными факторами. Хамакер** (De recente ontwikkeling in proefopzetten met kwantitatieve factoren. Hamaker H. C.), Statist. neerl., 1958, **12**, № 4, 201—212 (гол.; рез. англ.)

8268. **Оценка коэффициента корреляции r_{xy} из корреляционной таблицы для двух переменных x и y методом «накопленных частот». Зулиас** (An estimate of the correlating, coefficient r_{xy} from a correlations's table between two changeables x and y, by the method of «collective frequencies». (Zoulias E.), Σπουδαι οικονομικαι, κινσνικαι, τεχνικαι, 1957—1958, **8**, № 12, 46—55 (греч.)

8269. **О вычислении распределения одной случайной величины. Фернандиш-Кошта** (Über die Berechnung der Verteilung einer Zufallsvariablen. Autorreferat. Fernandes-Costa M. A. Bol. Inst. Actuarios Portug., 1953, **8**, 45—57) (нем.)

8270. **Модификация метода разностей. Саркар, Лаха** (A modification of the variate-difference method. Sarkar D., Laha R. G. Econometrica, 1955, **23**, 67—72) (англ.)

8271. **О границах рассеивания статистических кривых распределения. Критическое рассмотрение методики массового обследования. Клейн** (Über die Streugrenzen statistischer Verteilungskurven. Eine kritische Betrachtung zur Methodik der Großzahlforschung. Klein Hans. Mitt.-Bl. math. Statistik, 1954, **6**, 140—163) (нем.)

8272 К. **Проблемы статистической методологии в области социальных наук. Андерсон** (Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften. Anderson Oskar. Würzburg, Physica-Verl., 1954, 345 S., 16.—DM) (нем.)

8273 К. **Статистические методы для исследователей. Фишер Р. А.** Перев. с англ. М., Госстатиздат, 1958, 268 стр., илл., 9 р. 90 к.

Перевод классического труда одного из основоположников современной математической статистики, выполненный с двенадцатого английского издания. Содержание: От издательства. Предисловие автора. Главы: I. Введение. II. Диаграммы. III. Распределения. IV. Критерии согласия, независимости и однородности, основанные на распределении. V. Оценка существенности средних, разности средних и коэффициентов регрессии. VI. Коэффициент корреляции. VII. Внутриклассовая корреляция и дисперсионный анализ. VIII. Различные приложения дисперсионного анализа. IX. Основные принципы статистических оценок. Имеется предметный указатель. Н. В. Смирнов

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8274. Игра Банаха и Мазура. Рейбах (Ein Spiel von Banach und Mazur. Reichbach M.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 16—23 (нем.)

Игра Банаха и Мазура состоит в следующем: на полупрямой $(0, \infty)$ задано некоторое множество M. Двое игроков, A и B, играют так: A выбирает некоторое число $a_1 > 0$; если числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ уже выбраны, то B и A выбирают поочередно числа a_{2n}, a_{2n+1}, подчиненные условиям

$$a_{2n-1} > a_{2n} > 0, \qquad (1)$$

$$a_{2n} > a_{2n+1} > 0; \qquad (2)$$

если $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in M$, то выигрывает A, в противном случае выигрывает B. Множества M нельзя избежать, если существует, удовлетворяющая (2), последовательность $a_1, a_3(a_1, a_2), \ldots, a_{2n+1}(a_1, \ldots, a_{2n})$ такая, что $s \in M$ для любой удовлетворяющей (1) последовательности $\{a_{2n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Множества M можно избежать, если существует последовательность $\{a_{2n}\}$ такая, что при любой допустимой последовательности $\{a_{2n+1}\}$ $s \overline{\in} M$. Штейнгауз предположил, что всякого множества 1-й категории можно избежать. В настоящей заметке (теорема 1) построено совершенное множество лебеговой меры нуль (и, следовательно, 1-й категории), которого невозможно избежать. В теореме 2 указаны достаточные условия, когда множества M можно избежать.

И. А. Ибрагимов

8275. Пример игры Банаха и Мазура. Земба (An example of the game of Banach and Mazur. Zięba A.), Colloq. math., 1957, 4, № 2, 230—231 (англ.)

Дается пример игры Банаха и Мазура, в котором существование выигрывающей стратегии для игрока A зависит от наличия только одной точки в множестве Z.

Е. Б. Яновская

8276. Об игре Банаха и Мазура. Зубжицкий (On the game of Banach and Mazur. Zubrzycki S.), Colloq. math., 1957, 4, № 2, 227—229 (англ.)

Для игры Банаха – Мазура (см. например реф. 8274) устанавливается, что в случае счетности множества точек, в которых выигрывает игрок A, игра замкнута в пользу B.

Е. Б. Яновская

8277. О построении многошаговых деловых игр с большим числом участников. Белман, Кларк, Малькольм, Крафт, Риччарди (On the construction of a multi-stage multi-person business game. Bellman Richard, Clark Charles E., Malcolm Donald, Craft Clifford J., Ricciardi Franc M.), Operat. Res., 1957, 5, № 4, 469—503 (англ.)

Отчет о принципах, организации и некоторых результатах практического осуществления многошаговых игр, в которых в качестве игроков участвовали крупные американские бизнесмены.

И. В. Романовский

8278. Линейные неравенства и выпуклые многогранные множества. Таккер (Linear inequalities and convex polyhedral sets. Tucker A. W.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, s. a., 569—602, vol. 2 (англ.)

Дана система линейных неравенств с n неизвестными

$$AX \geqslant B: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Изучается множество S решений системы (1) как объект n-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассматриваются всевозможные наборы $H = (h_1, \ldots, h_p)$, $p \leqslant m$, из чисел $(1, 2, \ldots, m)$. Каждому набору H сопоставляется множество решений системы (1) таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k \begin{cases} = b_h, & h \in H \\ > b_h, & h \overline{\in} H. \end{cases} \qquad (2)$$

В множестве S (очевидно, выпуклом) всех решений системы (1) набору H соответствует некоторое (быть может, пустое) подмножество S_H решений системы (2), называемое гранью. Размерностью грани называется число $d_H = n - \lambda_H$, где λ_H — ранг матрицы системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k = b_h, \quad h \in H.$$

Грань размерности 0 называется вершиной, размерности 1 — ребром.

Теорема 1. Совокупность S решений неособенной (все столбцы матрицы A линейно независимы) однородной системы $(b_i = 0, \ i = 1, \ldots, m)$ совпадает с выпуклой конической оболочкой всех своих ребер; т. е. $X \in S$ в том и только в том случае, если $X = \sum_{i=1}^{q} v_i Q_i$, где Q_i лежит на i-том ребре, q — число ребер, а $v_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, q$.

Теорема 2. Если совокупность S решений неособенной неоднородной системы (1) непуста, то она представляется в виде суммы выпуклой оболочки своих вершин и выпуклой конической оболочки ребер множества решений соответствующей однородной системы.

Пусть теперь (1) является особенной системой. Матрица A разбивается на две матрицы A_1 и A_2, из которых A_1 составлена из максимального множества линейно независимых столбцов, а A_2 — из всех оставшихся столбцов. При этом $AX = A_1X^1 + A_2X^2$; $X = (X^1, X^2)$.

Теорема 3. Если совокупность S решений особенной системы (1) непуста, то она представляется в виде прямой суммы множества решений неособенной системы $A_1X^1 \geqslant B (X^2 = 0)$ и линейного подпространства решений однородной особенной системы $AX = 0$.

Теоремы 1—3 сводят нахождение решений общей системы линейных неравенств к отысканию решений нескольких систем линейных уравнений. Все результаты статьи верны для конечномерных пространств над произвольным упорядоченным полем. Теоремы легко переносятся на случай систем, включающих как равенства, так и неравенства.

Подчеркивается приложимость теорем к задачам линейного программирования и теории матричных игр, причем обычные условия $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ обеспечивают неособенность соответствующих систем. Приводится ряд подробных примеров.

Примечание референта. Подробное изложение теории систем линейных неравенств (в частности, перечисленных результатов) содержится в сборнике „Линейные неравенства и смежные вопросы" (РЖМат, 1957, 4109К) (русский перевод выпускается Издательством иностранной литературы).

А. М. Вершик

8279. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником. Рубинштейн Г. Ш., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 5, 987—990

В вещественном n-мерном пространстве заданы конечные множества точек $A_i = \{a_{ik}\}$, $k = 1, \ldots, l_i$; $i = 1, \ldots, m$, и точки c и d. Рассматриваются многогранник $M = \Sigma M_i$, где M_i — выпуклая оболочка A_i, и ось $B = \{b = c + \lambda d\}_{\lambda \in (-\infty, \infty)}$. Если $B \cap M \neq \Lambda$, то требуется: а) определить λ_0 — максимальное из тех λ, для которых $b = c + \lambda d \in M$, б) указать вершины тех симплексов в множествах A_i, внутри которых лежат точки a_{i0} такие, что $b_0 = c + \lambda_0 d = \Sigma a_{i0}$, где b_0 — крайняя точка пересечения

оси B с многогранником M, с) найти гиперплоскость, строго отделяющую луч $\{b=b_0+\lambda d\}_{\lambda+0}$ от многогранника M; если $B\cap M=\Lambda$, то найти гиперплоскость, строго отделяющую ось B от многогранника M.

В сформулированной задаче о крайней точке объединены две двойственные задачи— определение крайней точки b_0 и разыскание отделяющей гиперплоскости. В качестве примера к задаче о крайней точке сводится задача загрузки оборудования и транспортная задача.

И. Л. Романовская

8280. **Цикличность в двойственном симплекс-алгоритме. Бил** (Cycling in the dual simplex algorithm. Beale E. M. L.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, **2**, № 4, 269—275 (англ.)

Строится числовой пример, при решении которого двойственным симплекс-методом встречается цикл. На этом примере видна общая методика построения таких циклов в случае, когда две небазисные переменные имеют в линейной форме нулевые коэффициенты.

И. Л. Романовская

8281. **Строение перфокарты для линейного программирования. Поттерс** (A punched-card set-up for linear programming. Potters M. L.), Math. Centr. Amsterdam, Rekenafdeling, 1956, 17 pp. (англ.)

8282. **Роль динамического программирования в статистической теории передачи сообщений. Белман, Калаба** (On the role of dynamic programming in statistical communication theory. Bellman R., Kalaba R.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, **3**, № 3, 197—203 (англ.)

Излагаются принципы динамического программирования, которые затем демонстрируются на частном случае задачи, рассмотренной в другой статье авторов (РЖМат, 1959, 6103). И. В. Романовский

8283. **Аксиоматизация полезности на основе понятия разницы в полезности. Сапс, Вине** (An axiomatization of utility based on the notion of utility differences. Suppes Patrick, Winet Muriel), Management Sci., 1955, **1**, 259—270 (англ.)

Пусть K—множество, рассматриваемое как множество возможных событий, с бинарным отношением Q (xQy читается: x не менее желательно, чем y) и кватернарным (четырехместным) отношением R ($(x,y)R(z,w)$ читается: разница в полезности между x и y не меньше, чем между z и w). Авторы выписывают одиннадцать аксиом об отношениях Q и R и показывают, что если эти аксиомы выполняются, то существует такая функция (полезности), единственная с точностью до линейного преобразования, что $\varphi(x)\geqslant\varphi(y)$ в том и только в том случае, если xQy, $|\varphi(x)-\varphi(y)|\geqslant|\varphi(z)-\varphi(w)|$ в том и только том случае, если $(x,y)R(z,w)$. Доказательство этого результата найдено Х. Рубином. Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 382.

D. Gale

8284. **Модель, объясняющая закон Парето распределения благосостояния. Вольд, Уитл** (A model explaining the Pareto distribution of wealth. Wold H. O. A., Whittle P.), Econometrica, 1957, **25**, № 4, 591—595 (англ.)

Конструируется схема, включающая в качестве параметров норму увеличения благосостояния β, вероятность смерти γ, а также число наследников n, между которыми делится наследство в равных долях. Показывается, что в рамках этой схемы параметр Парето α зависит только от отношения β к γ и от n. Приводятся некоторые обобщения основной схемы. А. А. Иванов

8285. **Определяющие функции социально-экономических классов. Гейлс** (Discriminant functions of socio-economic class. Gales Kathleen), Appl. Statist., 1957, **6**, № 2, 123—132 (англ.)

Обсуждается использование некоторых определяющих функций для выяснения принадлежности рассматриваемых объектов к одному из трех классов, определяемых соответствующими границами значений заданного набора параметров. А. А. Иванов

8286. **Аналогия между теориями Маршалла и Кейнса. Фергусон** (An analogy between Marshall and Keynes. Ferguson C. E.), Metroeconomica, 1958, **10**, № 1, 3—6 (англ.)

Отмечается "удивительное" сходство методологических установок Маршалла и Кейнса при построении ими соответствующих экономических схем. Это сходство автор объясняет тем, что оба изучают различные стороны одного и того же экономического процесса (потребления) при одних и тех же предположениях. А. А. Иванов

8287. **Стратегия торгов. Фридман** (A competitive-bidding strategy. Friedman Lawrence), Operat. Res., 1956, **4**, № 1, 104—112 (англ.)

Излагается аналитический метод определения цены, которую целесообразно предлагать на торгах и которая является оптимальной с точки зрения получения заказа на наивыгоднейших условиях. Число участников торгов может быть неизвестным (под торгами здесь понимается широкий класс процессов конкурентного характера). А. А. Иванов

8288. **О смысле и применении понятия производительности. Зейбл** (On the meaning and use of a capacity concept. Zabel Edward), Naval Res. Logist. Quart., 1955, **2**, № 4, 237—249 (англ.)

Автор отмечает нечеткость и расплывчатость весьма употребительного и важного в математической экономике понятия производительности (capacity). Дается обзор и оценка различных подходов к определению понятия производительности и ее измерению; обсуждается роль этого понятия в экономических моделях. Много библиографических ссылок. А. А. Корбут

8289. **Параметры промышленной мощности. Зейбл** (Measures of industry capacity. Zabel Edward), Naval Res. Logist. Quart., 1956, **3**, № 4, 229—244 (англ.)

Общие рассуждения о характере оценок мощности различных отраслей производства и возможности их использования в экономических исследованиях.

А. А. Иванов

8290. **Доход и распределение дохода в макроэкономической теории. Шнейдер** (Einkommen und inkommensverteilung in der makroökonomischen Theorie. Schneider Erich), Industria (Ital.), 1957, № 2, 256—268 (нем.)

Рассматривается распределение дохода в гипотетическом капиталистическом хозяйстве между группой "предпринимателей" и группой "непредпринимателей". На основе упрощенческих предположений выводятся некоторые математические соотношения. А. А. Конюс

8291. **Виды на будущее и нежелательные запасы. Милс** (Expectations and undesired inventory. Mills Edwin S.), Manag. Sci., 1957, **4**, № 1, 105—109 (англ.)

Предложена линейная экономическая модель политики производства и управления запасами фирмы; объем производства на каждый период планируется с учетом наиболее вероятной величины спроса за этот период. С помощью подобных моделей можно, исходя из данных рынка, грубо оценивать величину нежелательных (избыточных) запасов в хозяйстве (фирме) на небольшой период времени. В качестве иллюстрации оценен размер нежелательных запасов в экономике США на основе данных о совокупном общественном продукте за 1947—1955 гг. А. А. Корбут

8292. **Теория регулирования запасов. Милс** (The theory of inventory decisions. Mills Edwin S.), Econometrica, 1957, **25**, № 2, 222—238 (англ.)

Запас готовой продукции рассматривается как буфер между производством и рынком. Его назначение 1) предупредить потерю прибыли в случае увеличения спроса; 2) предупредить дорогостоящие быстрые изменения объема производства.

Автор рассматривает теорию регулирования запаса как теорию решений. Исследуются две модели решений о запасе и даются правила поведения довольно простого вида. Математическая часть работы - нахождение минимакса линейных функций. И. А. Ибрагимов

8293. **Предохранительный уровень, допускаемый запасами, в обрабатывающей промышленности. Харлинг, Брамсон** (Level of protection afforded by stocks (inventories) in a manufacturing industry. Harling John, Bramson M. J.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 364—382 (англ.)

Описывается система управления запасами в условиях переменного спроса и переменного времени поставок, причем предполагается, что распределение времени поставок нормально, а спрос на продукцию распределен по закону Пуассона. И. А. Ибрагимов

8294. **Моделирование процесса обработки. Джэксон** (Simulation research on job shop production. Jackson James R.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 4, 287—294 (англ.)

Приводится описание простой модели процесса сбработки комплектов деталей в серийном производстве, учитывающей потери времени на ожидание и транспортировку. Даются результаты вычислений, осуществленных для сравнения (по минимуму времени, затрачиваемому на обработку всего комплекта) некоторых критериев выбора последовательности обработки.

А. А. Иванов

8295. **Происхождение и практика разыгрывания экспериментальных игр. Томас** (The genesis and practice of operational gaming. Thomas Clayton J.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 60—78 (англ.)

Обзор истории, методов, современной практики и перспектив распространенного метода исследования операций — разыгрывания экспериментальных игр (operational games). Историю экспериментальных игр автор ведет от разыгрывания военных тактических игр на ящике с песком. Отмечаются сравнительно ограниченные возможности этого метода и роль вычислительных методов теории игр при нахождении точных решений различных конкретных игр. А. А. Корбут

8296. **Техника исследования операций. Бауэрман, Литтауэр** (Operations engineering. Bowerman E. R., Littauer S. B.), Manag. Sci., 1956, **2**, № 4, 287—298 (англ.)

Обсуждаются вопросы структуры группы по исследованию операций на промышленном предприятии.

С. С. Кислицын

8297. **Приближенные методы в исследовании операций. Росс** (Approximate methods in operational research. Ross A. W.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 51—59 (англ.)

Приводятся общие рассуждения о возможности применения в исследовании операций методов, основанных на приближенном анализе схем, отражающих исследуемую операцию лишь в наиболее существенных чертах.

А. А. Иванов

8298. **Понятие контроля в исследовании операций и его применение. Аккофф** (The concept and exercise of control in operations research. Ackoff Russell L.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 20—39 (англ.)

Рассматривается проблема контроля над изменением параметров многократно осуществляемой операции. Даются рекомендации предварительного характера.

А. А. Иванов

8299. **Исследование операций и органы учета** (Operations research and the accountant), Manag. Operat. Res. Digest, 1956, **1**, № 3, 16—17 (англ.)

Высказываются некоторые соображения о необходимости связи и взаимодействия между органами учета и группами исследования операций. А. А. Иванов

8300. **Наука в управлении. Олдридж** (Science in management. Allderige John M.), Yale Scient. Mag., 1957, **32**, № 2, 32, 34—36,39 (англ.)

Краткое популярное описание содержания исследования операций и его значение для обоснованного управления различными производственно-экономическими процессами. А. А. Иванов

8301. **Теория решения и исследование операций. Эрроу** (Decision theory and operations research. Arrow Kenneth J.), Operat. Res., 1957, **5**, № 6, 765—774 (англ.)

Популярная статья о содержании и значении теории решения и ее связи с исследованием операций. Приводятся примеры. А. А. Иванов

8302. **Теория вероятностей и теория инвестиций. Мерк** (Wahrscheinlichkeitstheorie und Investitionstheorie. Merk Gerhard), Weltwirtsch. Arch., 1958, **81**, № 1, 66—79 (нем.; рез. англ., франц., исп., итал.)

8303 К. **Исчисление вероятностей. Приложение теории вероятностей к исследованию показателей оптового и розничного оборотов и планирование путей отдельных видов оборота с целью кратчайшего транспортирования при учете взаимных отправлений. Ортлиб** (Wahrscheinlichkeitsrechnung. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Untersuchung der Kenngrössen von Engros- und Versandbetrieben und die Planung des Layouts der einzelnen Abteilungen mit dem Ziel kürzester Transportwege beim Zusammenstellen der Sendungen. Ortlieb Ivar. Zürich, Betriebswiss. Inst. der ETH, Industr. Organis., 1957, IV, 20 S., ill., 4.20 Sfr.), Schweiz. Buch, 1958, **A58**, № 9, 229 (нем.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8304. **Проблемы в вероятностной теории систем хранения. Гани** (Problems in the probability theory of storage systems. Gani J.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 181—206 (англ.)

Обзорная статья по вероятностной теории систем хранения. Проблемы хранения рассматриваются при решении вопросов снабжения, пополнения запасов товаров и сырья на складах, а также при расчете водохранилищ.

В общем случае запасы хранилища описываются уравнением

$$S(t) = I(t) - D(t) - F(t), \qquad (1)$$

где $S(t)$ — функция хранения, $I(t)$ — функция пополнения, $D(t)$ — функция потребления, $F(t)$ — функция, ограничивающая $S(t)$ некоторой величиной.

Теория хранения рассматривает в основном три проблемы: 1) определение вероятности того, что хранилище за определенный промежуток времени будет пусто при известном потреблении и случайном (с известной функцией распределения) пополнении, или при известном пополнении и случайном (с известной функцией распределения) потреблении; 2) выбор оптимальной функции пополнения при известной функции потребления; 3) определение стационарного распределения для функции хранения. Во всех случаях функция $F(t)$ предполагается известной. Приводятся решения указанных

проблем в различных предположениях относительно входящих в уравнение (1) функций. Новых результатов работа не содержит. Библ. 38 назв. П. А. Строганов

8305. Стационарное распределение отрицательно-экспоненциального типа для бесконечного водохранилища. Гани, Прабху (Stationary distributions of the negative exponential type for the infinite dam. Gani J., Prabhu N. U.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 342—351 (англ.)

Пусть в момент времени t z_t — объем воды в водохранилище, а x_t — пополнение водохранилища за промежуток $(t, t+1)$. Тогда известно (РЖМат, 1956, 9001; 1957, 4268, 6561), что для непрерывных x_t, z_t и $u_t = x_t + z_t$ и потреблении y_t, равным M $(x_t + z_t \geqslant M)$ или $x_t + z_t$ $(x_t + z_t < M)$, стационарное распределение u_t — $h(u)$ определяется из интегрального уравнения

$$h(u) = g(u)\int_0^M h(v)\,dv + \int_M^{M+u} h(v)\,g(M+u-v)\,dv, \quad (1)$$

где $\int_0^\infty h(u)\,du = 1$ и $g(x)$ — известное распределение x_t.

Переходя от плотностей к интегральным функциям распределения из (1) получим:

$$H(u) = \int_0^u H(M+u-v)\,dG(v), \quad (2)$$

где $H(u) = \int_0^u h(v)\,dv$ и $dG(v) = g(v)\,dv$.

Для $H(u)$ постулируется решение вида $\sum c_i e^{-\lambda_i u}$, где $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ и c_i — комплексные константы. Если $dG(N)$ относится к типу гамма-распределений, то λ_i и c_i определяются из соответствующих уравнений. В этом случае стационарное распределение для объема водохранилища z_t получается отрицательно-экспоненциального типа с различными дискретными вероятностями того, что $z_t = 0$.

Полученные результаты используются для приближенного решения в случае водохранилищ конечного объема. П. А. Строганов

8306. Замечание о морановской теории хранилищ. Даунтон (A note on Moran's theory of dams. Downton F.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 32, 282—286 (англ.)

Рассматривается распределение количества продукции, поступающей на склад случайными дискретными порциями и выходящей со склада с единичной скоростью. Вводятся обозначения: $A_n(t) = P(u \leqslant t) = 1 - e^{nt}$ — вероятность того, что время u между двумя последовательными поступлениями меньше или равно t. $B_n(x)$ — функция распределения величины n-й порции, $\beta_n(s)$ — ее преобразование Лапласа, $C_n(x)$ — функция распределения количества продукции, имеющейся на складе, $\gamma_n(s)$ — ее преобразование Лапласа, $F_n(x, t)$ — вероятность того, что количество продукции, прибывшей за время t, меньше x; $\varphi_n(s, t) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF_n(x, t)$. Оказывается, что при условии $\rho < 1$, где

$$\rho = \frac{\int_0^\infty t\,dB(t)}{\int_0^\infty t\,dA(t)},$$

функции $\Phi(s, t) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(s, t)$ и $\Psi(s) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(s)$ связаны уравнением $\Psi(s) = (1-\rho)\left\{1 + \frac{\ln \Phi(s, t)}{st}\right\}^{-1}$. Исследуется также предельный случай при $\rho \to 1$.

В. П. Швальб

8307. Очередь. Закон, характеризующий длительность обслуживания, начинающегося с любого момента. Жиро (Files d'attente. Loi de survie d'un intervalle à partir d'un instant quelconque. Girault Maurice), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 20, 2838—2839 (франц.)

Рассматривается очередь, в которой время обслуживания подчиняется некоторому закону с характеристической функцией $\varphi(z)$ и вызовы подчиняются закону Пуассона. Как только вызов появляется, он обслуживается в течение времени V, начиная с момента появления. Тогда характеристическая функция V имеет вид

$$\varphi_V(z) = \frac{\varphi(z) - 1}{z \cdot \varphi'(0)}.$$

Рассматриваются некоторые следствия из этой формулы, формулируется теорема: Если $\varphi(z)$ есть характеристическая функция величины U, имеющей моменты порядка k, и если выполнено по крайней мере одно из следующих условий: а) k четное, б) U почти наверное неотрицательна, тогда

$$\Phi(z) = \frac{\varphi^{(k-1)}(z) - \varphi^{(k-1)}(0)}{z \cdot \varphi^{(k)}(0)}$$

есть характеристическая функция. В. И. Бабкин

8308. Некоторые проблемы очередей при ремонте машин. Столлер (Some queuing problems in machine maintenance. Stoller David S.), Naval Res. Logist. Quart., 1958, 5, № 1, 83—87 (англ.)

Рассматривается группа из N машин, функционирующих непрерывно и независимо друг от друга. Пусть i_j $(j = 0, 1, \ldots, k)$ — число машин, требующих ремонта типа j, причем i_0 — число исправных машин. Предполагается, что вероятность окончания одного ремонта типа j $(j = 1, \ldots, k)$ за интервал δ, в начале которого система находится в состоянии $(i_0, \ldots, i_k)$, равна $\delta\mu^{(j)}_{i_0,\ldots,i_k} + o(\delta)$ и что вероятность возникновения неисправности типа j $(j = 1, \ldots, k)$ при тех же условиях равна $\delta\lambda^{(j)}_{i_0,\ldots,i_k} + o(\delta)$. Обычными методами показывается, что эргодические вероятности $p_{i_0,\ldots,i_k}$ удовлетворяют системе $\frac{(N+k)!}{N!\,k!}$ линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{k}\left\{\lambda^{(j)}_{i_0,\ldots,i_j-1,\ldots,i_k}\,p_{i_0,\ldots,i_j-1,\ldots,i_k} + \mu^{(j)}_{i_0,\ldots,i_j+1,\ldots,i_k}\,p_{i_0,\ldots,i_j+1,\ldots,i_k}\right\} - p_{i_0,\ldots,i_j,\ldots,i_k}\sum_{j=1}^{k}\left[\lambda^{(j)}_{i_0,\ldots,i_j,\ldots,i_k} + \mu^{(j)}_{i_0,\ldots,i_j,\ldots,i_k}\right] = 0. \quad (1)$$

Для частного случая

$$\lambda^{(j)}_{i_0,\ldots,i_k} = \begin{cases}\Theta_j\,\lambda_{i_0}, & i_0 \neq 0,\ \Theta_j > 0,\ j = 1, \ldots, k;\\ 0, & i_0 = 0,\end{cases}$$

$$\mu^{(j)}_{i_0,\ldots,i_k} = \begin{cases}\mu^{(j)}_{i_j}, & i_j \neq 0,\\ 0, & i_j = 0,\end{cases}\quad j = 1, \ldots, k,$$

решение системы (1) имеет вид

$$p_{i_0,\ldots,i_k} = \frac{\prod_{j=1}^{k}\Theta_j^{i_j}\prod_{h=i_0+1}^{N}\lambda_h}{\prod_{j=1}^{k}\prod_{h=1}^{i_j}\mu^{(j)}_h}\,p_{N,0,\ldots,0};\quad i_0 < N. \quad (2)$$

где $p_{N,0,\ldots,0}$ определяется из нормировочного условия. Рассматриваются также частные случаи

$$\lambda_h = h\lambda \ (h = 1, \ldots, N), \tag{3}$$

$$\mu_j^{(l)} = \begin{cases} i_j \mu^{(j)}, & i_j \leqslant m_j, \\ m_j \mu^{(j)}, & i_j > m_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Случай (4) означает, что имеется m_j „бригад" для устранения неисправности типа j.

Примечание референта. В формуле (1) в первом слагаемом в фигурных скобках следует заменить i_0 на $i_0 + 1$, а во втором слагаемом i_0 на $i_0 - 1$.

Г. П. Башарин

8309. Приоритет в проблемах линии ожидания. I, II. Кестен, Рюнненбург (Priority in waiting line problems. I, II. Kesten H., Runnenburg J. Th.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 3, 312—324; 325—336; Indagationes math., 1957, **19**, № 3, 312—324; 325—336 (англ.)

В первой статье рассматривается очередь к единственному источнику обслуживания при наличии приоритетной системы на линии ожидания (РЖМат, 1958, 4045). Покупатели старшинства k — k-покупатели — прибывают по закону Пуассона с параметром λ_k, $k = 1, \ldots, r$, и для различных старшинств их прибытие происходит независимо. Периоды обслуживания (вообще, все независимые) k-покупателей имеют распределение $F_k(t)$, $t \geqslant 0$, $F_k(0) \neq 1$. Пусть $p_0(a_1, \ldots, a_r)$ — начальная ситуация — вероятность в момент начала работы источника обслуживания обнаружить очередь, состоящую из a_i i-покупателей. С этого начального момента покупатели, завершившие свое обслуживание и покидающие источник, нумеруются в порядке их ухода. $p_{k,n}(a_1, \ldots, a_n)$ — вероятность n-му ушедшему покупателю быть k-покупателем и оставить очередь из a_i i-покупателей. Пусть далее

$$f_{k,n}(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{a_i \geqslant 0} p_{k,n}(a_1, \ldots, a_r) X_1^{a_1} \ldots X_r^{a_r},$$

$$|X_i| \leqslant 1;$$

$$\varphi_k(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} d F_k(t), \quad \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0; \quad \mu_k^{(l)} = \int_0^\infty t^l dF_k(t)$$

и $H_{k,n}(t)$ — распределение времени ожидания n-го ушедшего покупателя, если известно, что n-м по порядку покинул источник k-покупатель; $\psi_{k,n}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dH_{k,n}(t)$. Полагается $g_n(X) = \sum_{i=1}^r f_{i,n}(X)$, $X = (X_1, \ldots, X_r)$.

При помощи метода Данцига устанавливаются рекуррентные соотношения

$$X_k f_{k,n+1}(X) = \{g_n(0^{k-1}X) - g_n(0^k X) + p_k X_k g_n(0^r)\} \varphi_k[\lambda(1 - pX)],$$

$$f_{k,n}(1^{k-1}X\,1^{r-k}) = f_{k,n}(1^r)\,\psi_{k,n}[\lambda_k(1 - X_k)]\,\varphi_k[\lambda_k(1 - X_k)], \quad |X_i| \leqslant 1,$$

где 0^r означает X равный $(0, \ldots, 0)$, $1^r - X$ равный $(1, \ldots, 1)$, $0^k X$ — что k первых компонент в X заменены нулем, $1^{k-1}X1^{r-k}$ — что $k-1$ первых и $r-k$ последних компонент в X заменены единицей, $p_l = \lambda_l/\lambda$, $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$ и $pX = \sum_{l=1}^r p_l X_l$.

1. $\sum_{l=1}^r \lambda_l \mu_l^{(l)} < 1$ — случай ненасыщения. Доказывается:

а) $p_{k,n}(a_1, \ldots, a_r) \to p_k(a_1, \ldots, a_r) > 0$, $n \to \infty$, $p_k(a_1, \ldots, a_r)$ не зависят от начальной ситуации и $\sum_{k=1}^r \sum_{a_i \geqslant 0} p_k(a_1, \ldots, a_r) = 1$.

б) $f_{k,n}(X) \to f_k(X) = \sum_{a_i \geqslant 0} p_k(a_1, \ldots, a_r) X_1^{a_1} \ldots X_r^{a_r}$, $n \to \infty$, $|X_i| \leqslant 1$.

в) $\sum_{k=1}^r \sum_{a_i \geqslant 0} a_j p_{k,n}(a_1, \ldots, a_r) \to \sum_{k=1}^r \sum_{a_i \geqslant 0} a_j p_k(a_1, \ldots, a_r)$, $n \to \infty$,

если начальная ситуация является детерминированной. Аналогично для более высоких моментов длины очереди.

г) $H_{k,n}(t) \to H_k(t)$, $n \to \infty$, $H_k(t)$ — невырожденное распределение, $\psi_{k,n}(\alpha) \to \psi_k(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} d H_k(t)$, $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$.

2. $\sum_{k=1}^r \lambda_i \mu_i^{(1)} \geqslant 1$ — случай насыщения. Высказываются без доказательства несколько замечаний.

Во второй статье используются рекуррентные и предельные соотношения первой статьи. В случае ненасыщения: доказывается теорема, на основе которой $f_k(X)$ могут быть получены последовательно, начиная с $k=r$; вычисляются первые два момента стационарного распределения времени ожидания $H_k(t)$; находятся выражения для $\psi_k(\alpha)$. Рассматривается частный случай $r = 2$, $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x/\mu)$, в котором получается выражение для $H_2(t)$, опровергающее ранее известное. В случае насыщения по-прежнему кратко и без доказательства перечисляются некоторые результаты.

О. В. Шалаевский

8310. Решение уравнений однолинейного процесса обслуживания при пуассоновском входе с параметром, зависящим от времени, и достаточно общем распределении времени обслуживания. Лучак (The solution of the single- channel queuing equations characterized by a time-dependent poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times. Luchak George), Operat. Res., 1956, **4**, № 6, 711—732 (англ.)

На однолинейную систему с ожиданием поступает простейший поток вызовов с переменным параметром $\lambda(t)$, обладающим непрерывными производными всех порядков. Каждый вызов с вероятностью c_m ($m = 1,2, \ldots$; $\sum c_m = 1$) содержит потребность в m разговорах, распределения продолжительностей которых независимы и одинаковы, а функции распределения являются экспоненциальными с параметром $\mu = \text{const}$. В работе указывается общий путь для нахождения зависящего от времени решения уравнений этой очереди, приводящий к рекуррентным формулам, особенно простым при $\lambda(t) = \text{const}$. Однако законченное решение получается только в двух частных случаях: а) $\lambda(t) = \text{const}$ и эмпирическое распределение продолжительности разговора определяется кривой плотности Пирсона III типа — решение использует вводимую впервые функцию $I_n^k(z)$; приводятся некоторые ее свойства и краткая таблица значений функции $e^z I_n^3(z)$. б) $\lambda(t) = \text{const}$ и $c_1 = 1$. Оба пункта иллюстрируются графическими примерами. Кроме того, в статье даются пояснения по поводу определения констант c_m и μ для данной эмпирической плотности $h(t)$ продолжительности разговора и устанавливаются формулы, которые могут быть употреблены для вычисления средней длины

очереди (в разговорах), ее второго и третьего момента, а также среднего времени ожидания и его дисперсии. В заключение общий путь решения уравнений очереди обобщается на случай $\mu = \mu(t)$ с непрерывными производными всех порядков. Обсуждается решение задач, связанных с периодичностью $\lambda(t)$. О. В. Шалаевский

8311. Распределение времени, требуемого для уменьшения длины очереди до заданного уровня, при пуассоновском потоке вызовов с параметром, зависящим от времени, и достаточно общем распределении времени обслуживания. Лучак (The distribution of the time required to reduce to some preassigned level a single-channel queue characterized by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times. Luchak George), Operat. Res., 1957, 5, № 2, 205—209 (англ.)

Основная часть данных совпадает с данными статьи Лучака (реф. 8310). Однако исходные уравнения, общий путь решения которых для $\lambda(t)$ и $\mu = \text{const}$ указывается и ведет к тем же рекуррентным формулам, составляются при дополнительном условии, что очередной процесс прекращается как только в момент окончания некоторого разговора не оказывается (или оказывается точно a) ожидающих вызовов. Это позволяет дать общее решение проблемы распределения периодов занятости. Законченное решение, использующее ту же функцию $I_n^k(z)$, получается в работе для случая, когда $\lambda(t) = \text{const}$, а эмпирическое распределение продолжительности разговора задается кривой плотности Пирсона III типа. Допускается возможность обобщения теории на случай $\mu = \mu(t)$. Все результаты цитированной статьи предполагаются известными. О. В. Шалаевский

8312. О перестановочности операторов в стохастических моделях обучения. Кокен (On the commutativity of operators in stochastic models for learning. Kochen Manfred), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 3, 930—933 (англ.)

Рассматривается следующая модель обучения животных. Пусть p_k — вероятность того, что животное отреагирует на k-м шаге в одном из двух возможных направлений (например, пойдет направо, когда имеется возможность пойти направо или налево). $Q_1 p_k$ — вероятность того, что животное на $(k+1)$-м шаге пойдет направо (это и есть вырабатываемая реакция) при условии, что перед этим животное поощрили; $Q_2 p_k$ — то же, но при условии, что животное было наказано.

Считается, что

$$Q_i p_k = \alpha_i p_k + (1 - \alpha_i)\lambda_i, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где параметры α_i и λ_i $(i = 1, 2)$ определяются по данным опыта. Оператор Q_i индуцирует следующее преобразование T_i непрерывной функции f, заданной на $[0,1]$:

$$f(Q_i p) = T_i f(p).$$

В работе доказывается следующая теорема: необходимым и достаточным условием того, что $T_1 T_2 f(p) = T_2 T_1 f(p)$, является периодичность $f(p)$ с периодом $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \times (\lambda_1 - \lambda_2)$. Этот результат, как отмечает автор, может быть полезен при оценивании α_i и λ_i. А. М. Каган

8313. Распространение эпидемии или слухов в ограниченной совокупности людей. Кендалл (La propagation d'une épidémie ou d'un bruit dans une population limitée. Kendall David G.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 4, 307—311 (франц.)

Рассматривается совокупность N индивидуумов, из которых в момент времени t s_t индивидуумов носит в себе некоторую инфекцию. Предполагается, что появление нового случая заболевания в интервале времени $(t, t+dt)$ имеет вероятность

$$(N - s_t)(s_t + 1)\,dt + o(dt).$$

Для времени ожидания окончания эпидемии T и времени распространения заразы на половину всей совокупности S находятся асимптотические распределения:

$$\text{при } N \to \infty \quad P\left\{S \leqslant \frac{\xi + \log N}{N+1}\right\} \to e^{-e^{-\xi}}$$

и

$$P\left\{T \leqslant \frac{\xi + 2\log N}{N+1}\right\} \to 2e^{-1/2\,\xi} K_1\left(2e^{-1/2\,\xi}\right), \quad \text{где}$$

$K_1(x)$ — функция Бесселя 2-го рода 1-го порядка.

Б. Н. Гарцштейн

8314. Новый метод для оценки логистической функции. Тинтнер (Eine neue Methode für die Schätzung der logistischen Funktion. Tintner G.), Metrika, 1958, **1**, № 2, 154—157 (нем.)

Во многих демографических и эконометрических вопросах используется „логистическая" функция y_t роста во времени t вида

$$y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}.$$

Автор указывает прием оценки констант k, b и a по эмпирическому материалу, отправляясь от линейного уравнения в конечных разностях $z_{t+1} = (1 - e^{-a})/k + e^{-a} z_t$, которому удовлетворяет функция $z_t = \frac{1}{y_t}$. Приведен числовой пример расчета по данным шведской демографической статистики. Н. В. Смирнов

8315. О происхождении и применимости неймановых распределений типа А. Скеллам (On the derivation and applicability of Neyman's type A distribution. Skellam J. G.), Biometrika, 1958, **45**, № 1-2, 32—36 (англ.)

Нейман (Neyman J., Ann. Math. Statistics, 1939, **10**, 35 — 37) ввел следующую биологическую модель. Некоторое число „центров" расположено случайно в большом пространстве. Каждый центр дает начало случайному числу n потомков (с распределением вероятностей $p(n)$), а потомки располагаются вокруг центра независимо друг от друга с вероятностью

$$P(\xi, \eta) = \iint_Q f(x - \xi, y - \eta)\,dx\,dy$$

того, что потомок, выходящий из центра (ξ, η), попадает в случайно выбранную часть пространства с площадью Q. Требуется найти распределение вероятностей общего числа потомков, попавших в случайно выбранную часть пространства с площадью Q. Рассмотрение различных частных случаев привело Неймана к так называемым распределениям типа А. Простейшим является тот случай, когда $p(n)$ — функция Пуассона, а

$$P\{\xi, \eta\} = \begin{cases} |A|^{-1} & \text{для } (\xi, \eta) \in A, \\ 0 & \text{для } (\xi, \eta) \notin A, \end{cases} \qquad (1)$$

где $|A|$ есть площадь области A.

В реферируемой работе изучаются биологические и математические мотивы предположения (1) и рассматриваются возможные ослабления этого условия.

Б. Н. Гарцштейн

8316. Статистическая теория необратимых процессов. Часть I. Определение интеграла по траекториям. Фалков (Statistical theory of irreversible processes. Part I. Integral over fluctuation path formulation. Falkoff David), Ann. Phys. (USA), 1958, **4**, № 3, 325—346 (англ.)

Согласно гипотезам Онсагера, любое вынужденное отклонение механической системы от равновесного состояния может рассматриваться как спонтанная флуктуация в равновесной системе и феноменологические законы

для зависимости термодинамических характеристик от времени в необратимом процессе приближения системы к равновесному состоянию соответствуют наиболее вероятному статистическому поведению спонтанных флуктуаций. Излагается адекватный этим гипотезам математический аппарат, в котором флуктуирующая термодинамическая характеристика $\alpha(t)$ рассматривается как стационарный марковский процесс. Ее среднее значение $a(t)$ удовлетворяет феноменологическому уравнению $R\dot{a} + sa = 0$, эквивалентному принципу минимального рассеяния: $\Phi = -\frac{dS}{dt} = \min\limits_{(\dot{a})}$; ($S = -\frac{1}{2} sa^2$ — энтропия, $\Phi = \frac{1}{2} R\dot{a}^2$ — диссипативная функция). В соответствии с принципом Больцмана вероятность неравновесного состояния равна $\exp\frac{S}{k}$. Случайная функция $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению Ланжевена $R\dot{\alpha} + s\alpha = \varepsilon(t)$ (его, строго говоря, нужно записывать не в производных, а в разностях), где $\varepsilon(t)$ — „белый шум" с дисперсией $2Rk$. Решением этого уравнения является процесс Орнштейна—Уленбека с дисперсией $\sigma^2 = \frac{k}{s}$ и корреляционной функцией $\rho(\tau) = \exp\left(-\frac{s\tau}{R}\right)$, для которого плотность вероятности перехода из состояния α_0 в α за малое время τ пропорциональна выражению

$$\exp\frac{1}{2k}\left[S_{(\alpha)} - S_{(\alpha_0)} - \tau\Phi(\dot{\alpha})\right],$$

что является статистической формулировкой принципа минимального рассеивания. Плотность вероятности перехода можно записать также в виде

$$N\exp\left\{-\frac{1}{4k}\left[\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} L(\alpha, \dot{\alpha})\,dt\right]_{\min}\right\},$$

где $L = R\left(\dot{\alpha} + \frac{s\alpha}{R}\right)^2$ — лагранжиан, а минимум интеграла берется при условиях $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\alpha(t_0 + \tau) = \alpha$. Рассматриваемое выражение не есть функционал от случайной траектории $\alpha(t)$, а лишь функция от α_0 и α. Однако плотность вероятности перехода для процесса $\alpha(t)$ можно записать в виде интеграла по траекториям от величины $N\exp\left[-\frac{1}{4k}\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} L(\alpha, \dot{\alpha})\,dt\right]$, рассматриваемой как функционал от случайной функции $\alpha(t)$, аналогично фейнмановской записи для решения уравнения Шредингера (последнее при этом аналогично уравнению Фоккера—Планка для процесса $\alpha(t)$). Интеграл по траекториям может быть строго определен как интеграл по некоторой мере (в частности, по условной мере Винера); такое определение дано И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом (РЖ Мат, 1957, 2512). Доказывается, что плотность вероятности перехода из состояния α_0 в момент t_0 в состояние α в момент $t = t_0 + \tau$ для процесса Орнштейна—Уленбека с дисперсией $\frac{\sigma^2}{2\Lambda}$ и корреляционной функцией $\rho(\tau) = \exp(-\Lambda\tau)$ может быть представлена в виде интеграла по условной мере Винера $w(\alpha_0 \mid \alpha)$:

$$P(\alpha_0 t_0 \mid \alpha t) = e^{-\frac{\Lambda}{2\sigma^2}(\alpha^2 - \alpha_0^2 - \sigma^2\tau)} \int e^{-\frac{\Lambda}{2\sigma^2}\int_0^t \alpha^2 dt}\, d_{w(\alpha_0 \mid \alpha)}\alpha.$$

Отсюда следует, что интеграл от функционала $F[\alpha(t)]$ по траекториям процесса Орнштейна—Уленбека также сводится к интегралу по условной мере Винера:

$$\overline{F[\alpha(t)]} = e^{-\frac{\Lambda}{2\sigma^2}(\alpha^2 - \alpha_0^2 - \sigma^2\tau)} \int e^{-\frac{\Lambda}{2\sigma^2}\int_0^t \alpha^2\,dt} F[\alpha(t)]\, d_{w(\alpha_0 \mid \alpha)}\alpha.$$

Указывается на возможность использования изложенного аппарата для негауссовых марковских процессов, которым соответствуют нелинейные феноменологические уравнения. А. С. Монин

8317. Вероятностный метод в проблеме переноса излучения. Некогерентное образование полос поглощения в модели Милна—Эддингтона. У э н о (La méthode probabiliste pour les problème de transfert du rayonnement. Formation non cohérente d'une raie d'absorption dans le modèle Milne—Eddington. U e n o S u e o), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 26, 3593—3595 (франц.)

В предположении, что функция Планка $B_\nu(t)$ является полиномом от оптической глубины t и что термическая эмиссия сосредоточена на полосах поглощения, дается точное решение уравнения переноса в случае некогерентной диффузии в модели Милна — Эддингтона. Из вероятностных соображений это решение ищется в виде

$$I_\nu(0, \mu) = L_{1/x}\{B(\tau')\} + \omega_0\int\limits_0^\infty p(x, \tau)[-B(\tau) + \Gamma_\tau\{B(\tau')\}]\frac{d\tau}{x},$$

где символ $L_{1/x}$ означает преобразование Лапласа с параметром $1/x$, x — некоторая функция от направления μ; $p(x, \tau)$ — плотность вероятности излучения кванта средою в направлении μ с оптической глубины τ, ω_ν — альбедо; $B(t)$ — функция излучения; Γ_τ — специальный интегральный оператор. М. Г. Шур

8318. Механика описания. М а к-Л а к л а н (Description mechanics. M c L a c h l a n D a n, Jr), Inform. and Control, 1958, **1**, № 3, 240—266 (англ.)

Предлагается общая основа для теории информации, включая такие ее конкретные области, как передача сообщений, термодинамика, статистическая механика, физиология чувственного восприятия, лингвистика и криптография, теория игр, моделирование и т. д. Основным понятием является описание—распределение M объектов по N ячейкам (причем могут быть существенны число ν видов объектов, количества M_k объектов каждого вида, размерности расположения ячеек, их размеры и т. п.) Полная емкость описания равна $W = N^M$. При наличии условий, ограничивающих распределение объектов по ячейкам, емкость описания уменьшается. Так, если ячейки вмещ ют не более одного объект , то $W = N!/(N - M)!$, если, кроме того, все объекты неразличимы, W уменьшается еще в $M!$ раз, и т. д.

Приводятся примеры: а) из теории игр (классическое определение вероятности); б) из кодирования (азбука Морзе, повторяемость букв в английских текстах); в) понятие количества информации по Шеннону; г) энтропия идеального газа; д) излучение энергии осциллирующим электроном; е) разрешающая способность фотопластинки. Излагаются основные понятия моделирования, в особенности функциональные преобразования одних моделей объекта в другие при передаче информации. В качестве примеров рассматриваются рентгеноструктурный анализ в кристаллографии и понятие о подобии двух функций,

характеризуемом средним квадратичным значением их свертки. Библ. 24 назв. А. С. Монин

8319. К теории пропускной способности при передаче сигналов со многими дискретными значениями. Варшавер Б. А., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 46—50

При некоторых предположениях вычисляется скорость передачи информации и сравнивается с пропускной способностью. Точный смысл построения автора остался референту неясным. Р. Л. Добрушин

8320. Задача о хранении информации в системах автономной «памяти». Линковский Г. Б., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 86—89

8321. Значение теории информации для дальномерной техники. Свобода (Die Bedeutung der Informationstheorie für die Fernmeßtechnik. Swoboda G.), Arch. techn. Messen, 1958, № 270, R 97—R 101 (нем.)

8322. Выделение отличного элемента среди ряда одинаковых. Сёке (Selection of the different from the multitude of the uniform. Szőke B.), Acta techn. Acad. scient. hung., 1958, **20**, № 1-2, 3—21 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Ставится следующая проблема: Если в множестве, состоящем из определенного числа однородных элементов, имеется только один существенно отличный от остальных, то каково минимальное число измерений, необходимых для выделения этого элемента. Показано, что если заранее известно, будет ли отличный элемент больше или меньше остальных, то при помощи n сравнительных измерений среди однородных $z_{max}=3^n$ элементов можно выбрать отличный элемент. Если же знак отклонения не известен, то с помощью n сравнительных измерений можно исследовать следующее число элементов:

$$z_{max}=1+3^0+3^2+\ldots+3^{(n-3)}+3^{(n-5)},\ n\text{ — четное},$$

$$z_{max}=1+3^1+3^3+\ldots+3^{(n-3)}+3^{(n-5)},\ n\text{ — нечетное}.$$

Для выделения отличного элемента среди z элементов надо произвести

$$n=\frac{\log(8z-7)}{\log 3}\text{ измерений}.$$

Обсуждается один практический пример.

В. Н. Бабкин

8323. Факториальные эксперименты в промышленном исследовании. Бенеш, Ликеш (Faktorové experimenty v průmyslovém výzkumu. Beneš Milan, Likeš Jiří), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 1, 18—30 (чешск.)

Обзорная статья по теории факториальных экспериментов с учетом их практического применения в промышленном обследовании. В первой части изложены полные факториальные эксперименты типа 2^n и некоторые более простые и для практики полезные полные факториальные эксперименты типа 3^n. Во второй части изложен принцип планирования факториальных экспериментов в блоках; кроме того, рассматриваются неполные факториальные эксперименты типа 2^n (см. также Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, М., Изд.-во ин. лит., 1956, гл. XVII, § 10; РЖМат, 1955, 4604К). М. Josífko

8324. Применение математической статистики в геологоразведочном деле. Корулин Д. М., Уч. зап. Белорусск. ун-т., 1958, вып. 43, 123—137

Рассматриваются вопросы применения методов математической статистики (метод „малой выборки“) в геологоразведочном деле. Решаются следующие три вопроса:

1. Выявление количественной характеристики изменчивости среднего содержания.

2. Определение величины погрешности разведки, что позволяет установить степень разведанности месторождений.

3. Вычисление наиболее рациональной сети разведочных выработок, которая необходима для разведки по заданной погрешности (ошибке). В. И. Бабкин

8325. Измерение полезной жизни оборудования в условиях эксплуатации. Билый (Měření životnosti věcí za provozních podmínek. Bílý Josef), Pokroky mat., fys. a astron., 1957, **2**, № 1, 14—18 (чешск.)

Работа примыкает к статье Гудмана (РЖМат, 1955, 6014). Автор подробно изучает процесс замены устраненных из производства агрегатов, если заданы три типа агрегатов одного назначения. Предложены три метода замены: 1) циклический обмен агрегатов, 2) равномерное использование остальных агрегатов, 3) равномерное использование всех типов. Обозначим символом $p_i(t)$ вероятность того, что на наблюдаемом месте в момент t находится агрегат типа i. Находятся выражения для $\lim_{t\to\infty} p_i(t)=p_i$ и исследуются скорости сходимости вероятностей $p_i(t)$ к предельным значениям для всех приведенных методов замены. Оказывается, что эта вероятность наиболее скоро сходится в первом случае. В заключение намечен путь распространения рассуждений на случай большего числа типов. M. Josífko

8326. К определению обеспеченности функции нескольких случайных величин. Денисов Ю. М., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Техн. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. техн. н, 1958, № 4, 69—71 (рез. узб.)

Применительно к задачам гидрологии дается способ вычисления обеспеченности (обеспеченность u_1 — вероятность того, что случайная величина $u\geqslant u_1$) функции нескольких случайных величин. Р. Х. Дивеев

8327. Заметки о законе Берри и смысловом ударении. Мандельброт (A note on a law of Berry and on insistence stress. Mandelbrot Benoit), Inform. and Control, 1957, **1**, № 1, 76—81 (англ.)

Пусть слова некоторого языка занумерованы в порядке возрастания их вероятностей $p(r)$. Пусть $F(r)=\sum_{x=1}^{r} p(x)$. Закон Берри утверждает, что вероятность $q(r)$ того, что на слово r падет смысловое ударение, равна

$$q(r)=1-P[1-F(r)]^A,$$

где P и A — константы. Автор вводит упрощенную статистическую модель процесса разбиения элементарных единиц языка (слогов, звуков и т. п.) на слова и не зависящего от этого процесса — другого вероятного процесса, задающего единицы, на которые падает ударение. Как следствие из этой модели автор выводит закон Берри. Р. Л. Добрушин

8328. Статистическое распределение с предварительным занятием мест. Приложение к математическому анализу языка. Фукс (Eine statistische Verteilung mit Vorbelegung. Anwendung auf mathematische Sprachanalyse. Fucks W.), Naturwissenschaften, 1955, **42**, № 1, 10 (нем.)

8329. Замечания по теории коллективного риска. Арведсон (Notes on collective risk theory. Arfwedson G.), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1-2, 46—59 (англ.)

Изучается задача о разорении в случае конечного и бесконечного интервала времени. Обозначим через $F(x, u)$ вероятность того, что разорения не произойдет (здесь x — длина интервала времени, а u — величина рискового фонда в начальный момент); через $F(u)$ обозначим аналогичную вероятность в случае бесконечного интервала времени. Показано, что $F(u)=\lim_{x\to\infty} F(x, u)$. Из интег-

ального уравнения для функции $F(x, u)$ выводится уравнение для функции $F(u)$:

$$F(u) = \int_0^M e^{-\xi} d\xi \int_{-\infty}^{u+\lambda\xi} F(u+\lambda\xi-v)\, dP(v),$$

$$M = \begin{cases} \infty, & \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ -\dfrac{u}{\lambda}, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Здесь λx — величина рисковой премии; $P(v)$ — распределение величины рисковой суммы. Если $\lambda > \int_{-\infty}^{\infty} v dP(v)$, то $\lim_{u\to\infty} F(u) = 1$, и уравнение для $F(u)$ совпадает с уравнением (88) работы Крамера (Cramér H., Collective risk theory, Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1955).

Для преобразования Фурье

$$\Psi(t, u) = \int_0^{\infty} e^{tx} d_x F(x, u)$$

выписывается уравнение, эквивалентное уравнению (88) работы Крамера. Это уравнение решается, если $P(v) = 0$ для $v \leqslant 0$. В конце статьи обсуждается вопрос о распределении первого момента разорения. М. И. Фортус

8330. **Относительно неоднородности в имущественном страховании. Гренандер** (On heterogeneity in nonlife insurance. Part I. Grenander Ulf), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1-2, 71—84 (англ.)

Рассматривается коллектив застрахованных, каждый из которых в течение некоторого времени может предъявить ν претензий о возмещении ущерба, где ν имеет пуассоновское распределение с параметром λ, зависящим от индивидуума. Если индивидуум выбирается случайно, то λ — случайная величина с распределением $G(\lambda)$; $G(\lambda)$ — мера неоднородности.

Пусть n_ν — число индивидуумов, предъявивших ν претензий, $\sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu = n$. С помощью n_ν строятся несмещенные оценки среднего и дисперсии λ, а также критерий однородности. Указывается, что аналогично можно находить несмещенные оценки величин

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{p} c_\nu \Gamma_\nu = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \varphi(\lambda)\, dG(\lambda),$$

где Γ_ν — моменты распределения $G(\lambda)$. Даются необходимые и достаточные условия на $\varphi(\lambda)$ для того, чтобы существовала несмещенная оценка величины φ. Доказано, что для величины $\int_0^{\mu} dG(\lambda)$ не существует несмещенной оценки. Изучаются оптимальные системы страховых премий. М. И. Фортус

8331. **Теоретический вклад в статистическое изучение общих потерь предприятия от несчастных случаев. Бюльман** (Ein theoretischer Beitrag zur statistischen Erfassung der Gesamtbetriebsunfallkosten. Bühlmann H.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1958, 58, № 1, 53—65 (нем.)

Пусть за наблюдаемый период на предприятии число несчастных случаев есть k, общее число отработанных часов — g, общая сумма потерь от несчастных случаев — K, среднечасовая зарплата — l. Принимаются гипотезы о том, что

$$w = \frac{k}{g} \approx N(\nu, \delta^2), \text{ а } x = \frac{K}{kl} \approx \Gamma(gw\gamma, gWc).$$

При этих условиях автор находит, что $z = \dfrac{K}{lg}$ имеет плотность распределения

$$h_z(\xi) = \int g f_{\Gamma(\gamma g s,\, c)}(g\xi)\, \varphi\left(\frac{s-\nu}{\delta}\sqrt{g}\right) d\left(\frac{s-\nu}{\delta}\sqrt{g}\right),$$

где φ — плотность нормированного нормального распределения, а

$$f_{\Gamma(\alpha,a)}(x) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{ax};$$

$$Ez = \frac{\gamma}{c\nu}, \quad Dz = \frac{\gamma^2\delta^2 + \gamma\delta}{gc^2}.$$

Работников страхования интересуют главным образом Ez и Dz, что требует получения оценок параметров γ, c, ν, δ^2. Методом максимального правдоподобия находятся оценки

$$\widetilde{\nu} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} g_i, \quad \widetilde{\delta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - \widetilde{\nu})^2,$$

$$\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{c}} = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} k_i,$$

а $\widetilde{\gamma}$ есть корень уравнения

$$\log\widetilde{\gamma}\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\Gamma'(k_i\widetilde{\gamma})}{\Gamma(k_i\widetilde{\gamma})} = \log\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right)\sum_{i=1}^{n} k_i -$$

$$- \log\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \log k_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \log x_i,$$

которое решается с помощью соответствующей номограммы Пирсона (величины w_i, g_i, x_i определяются из наблюдений). Для проверки, изменяются ли значения параметров, предлагается использовать достаточные статистики

$$\sum_{i=1}^{n} g_i w_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} g_i w_i, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i \log x_i$$

для δ^2, $\dfrac{\nu}{\delta^2}$, c, γ соответственно. Б. В. Финкельштейн

8332. **Факторный метод индивидуального страхования вдов. Фогель** (Die Faktorenmethode der individuellen Witwenrentenversicherung. Vogel Walter. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath., 1954, 54, 47—56) (нем.)

8333. **Соотношения между вероятностями зависимых и независимых прекращений (страхования) при специальных допущениях относительно протекания интенсивностей прекращений. Адриан** (Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten bei besonderen Annahmen über den Verlauf der Ausscheideintensitäten. Adrian Paul. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1954, 54, 117—123) (нем.)

8334. **Замечания к технической обработке анормальных рисков в страховании жизни. Еклин** (Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung. Jecklin H. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1953, 53, 57—77) (нем.)

8335. **О подразделении различных форм страхования в соответствии с функциями риска и сберегательной**

функцией. Венк (Über eine Aufspaltung verschiedener Versicherungsformen nach Risiko- und Sparfunktion. Wenk Alfred. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1953, 53, 189—203) (нем.)

8336. Законы смертности, которые допускают точное выражение пожизненной ренты через значения временной ренты. Лепин (Sterbegesetze, welche eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlauben. Leepin Peter. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1954, 54, 163—168 (нем.)

8337. Об одном законе смертности, который допускает точное выражение пожизненной ренты через значения временной ренты. Еклин, Леймбахер (Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaub. Jecklin H., Leimbacher W. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1953, 53, 129—139) (нем.)

8338. Основы для изучения семейного страхования. Луици (Einige Grundlagen für das Studium von Familienversicherungen. Autoref. Luizi Eduardo Grilo. Bol. Inst. Actuarios Portug., 1953, 8, 77—95) (порт.; рез. франц.)

8339. Методы и пятнадцатизначные таблицы для вычисления процента определенной ренты. Ванлар (Méthodes et tables pour le calcul avec 15 chiffres du taux d'intéret d'une annuite certaine. Vanlaer G. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français, 1954, 65, 109—142) (франц.)

8340. Наивыгоднейшая интерполяция процента ренты. Лах (Die vorteilhafteste Interpolation der Rentenbarwerte. Lah Ivo. Bol. Inst. Actuarios Portug., 1953, 7, 7—20) (нем.)

8341. Определение страховых взносов при одной процентной норме. Лах (Die Ableitungen der Versicherungswerte nach einzelnen Zinsmaßen. Lah Ivo. Bl. Dtsch. Ges. Vers.-Math., 1954, 2, 85—92) (нем.)

8342. Обработка наблюдений смертности по малому материалу. Ланг (Bewertung von Sterblichkeitsbeobachtungen an kleinem Material. Lang Reinhard. Bl. Dtsch. Ges. Vers.-Math., 1954, 2, 7—37) (нем.)

8343. Обработка наблюдений смертности по малому материалу. Хельбиг, Шторк (Bewertung von Sterblichkeitsbeobachtungen an kleinem Material. Helbig Manfred, Storck Hans. Bl. Dtsch. Ges. Vers.-Math., 1954, 2, 39—59) (нем.)

8344. Последнее замечание о распределении. Арибо (Un dernier coup d'oeil sur la répartition. Aribaud H.), Bull. trimestr. Inst. actuaires franç., 1958, 69, № 224, 153—157 (франц.)

8345. Карта крайних значений при текущем производственном контроле. Граф, Вартман (Die Extremwertkarte bei der laufenden Fabrikationskontrolle. Graf Ulrich, Wartmann Rolf. Mitt.-Bl. math. Statistik, 1954, 6, 121—139; 188—203 (нем.)

8346. Вероятностная аргументация при определении отцовства. Людвиг (Die wahrscheinlichkeitstheoretische Argumentation bei der Vaterschaftsdiagnose. Ludwig Wilhelm), Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig. Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, 4, № 1-2, 13—19 (нем.)

Выводятся некоторые формулы для проверки гипотезы об отцовстве в случае, когда ребенок и мать известны. Б. Н. Гарттейн

8347. Заметка об определении объемов гидрологических резервов, образуемых на реке Вердон, для регулирования стока. Клеман (Note sur la détermination des volumes des réserves hydrauliques à constituer sur la rivière «Verdon» pour en assurer la régularisation. Clement M. R.), Colloq. rech. opérat., 1958, 117—122 (франц.)

8348. Выравнивание кривыми для планирования исследовательской и практической деятельности. Норден (Curve fitting for a model of applied research and development scheduling. Norden P. V.), IBM J. Res. and Developm., 1958, 2, № 3, 232—248 (англ.)

8349. К возможности использования методов математической статистики в бумажной промышленности. Локки (Tilastomatematiikan käyttömahdollisuuksista paperiteollisuudessa. Lokki Olli), Paperi ja puu, 1958, 40, № 10, 473—480 (финск.; рез. англ.)

8350 К. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. Лукомский Я. И., М., Гос. статиздат, 1958, 388 стр., илл., 12 р. 90 к.

В книге излагаются в основном элементы теории корреляции. Кроме того, в первом и третьем разделах даны приемы первоначальной сводки результатов массовых измерений (таблицы и графики распределения), способы вычисления простейших сводных показателей (арифметическая средняя, мода, медиана, средние абсолютные и квадратические отклонения) и отрывочные сведения о вероятностях и статистических оценках.

В разделе II излагается метод наименьших квадратов и способы измерения силы связи (корреляционное отношение, коэффициент линейной корреляции, частные и общий коэффициенты корреляции для случая многих аргументов). Везде даются подробные схемы вычислений и приводится большое число примеров. Особый интерес в этом отношении представляет последний (IV) раздел книги, в котором рассматриваются конкретные производственные вопросы (влияние химического состава на ударную вязкость стали, технологические цепи, анализ факторов, влияющих на накладные расходы) с использованием при их изучении теории корреляции.

Следует, однако, отметить, что автор пытается изложить теорию корреляции, не прибегая к теории вероятностей. В явном виде понятие о вероятностях случайных величин появляется лишь в разделе III и используется только для оценки точности выборочных показателей. Но изложить корреляцию, не прибегая к теории вероятностей, нельзя, и фактически понятия о математическом ожидании, стохастической независимости и тому подобные понятия используются уже во II разделе, но в виде неточных и малопонятных формулировок вроде: „y“ находится в корреляционной зависимости от x, если 1) каждому значению аргумента „x“ соответствует ряд распределения функции „y“ и 2) с изменением „x“ эти ряды закономерно изменяют свое положение (стр. 65).

Правда, автор в сноске обещает, что „более точное определение корреляции будет дано ниже“, не указывая, где именно это будет сделано. Фактически более точного определения нет нигде, если не считать сделанных вскользь на стр. 279 замечаний, которые явно недостаточны и на которые читатель, незнакомый с предметом, вообще не обратит внимания.

Встречаются в книге и неточные утверждения. Например, в первом разделе, в котором речь идет о самых элементарных вещах, утверждается, что: „чем правее расположен график на оси абсцисс тем выше массовый уровень признака“ (стр. 20).

Из текста же следует, что массовый уровень измеряется средней арифметической или модой или медианой. При этом, как это видно из примера, график считается „расположенным правее“, если его начало правее, чем начало другого графика, и аналогично расположены концы графиков. Но ведь нетрудно привести примеры, когда „расположенное правее“ распределение будет иметь меньшую среднюю и моду. Неверно также, что для симметричного распределения совпадают мода, медиана и средняя арифметическая (стр. 26). Это неверно, например, для U-образного или симметричного двухвершинного распределений. Подобные замечания возникают и при чтении других глав. М. Э.

8351 К. **Крайние члены случайных выборок и их применения в инженерном деле. Агьяр-да-Силва Леми** (Os extremos de amostras ocasionais e suas aplicações à engenharia. Aguiar da Silva Leme Ruy, Thesis, University of São Paulo. São Paulo, 1954, X 167 pp.) (порт.)

Обзор основных результатов о распределении наибольшего члена x в выборке из n независимых наблюдений и обсуждение их связи с теорией некоторых критериев значимости. Описывается асимптотическое поведение x для больших n в случаях, когда кумулятивные функции распределения имеют формы:
$\exp(-u^{-k})$, $\exp(-v^{k})$, $\exp(-e^{v})$, где $u = \alpha(x - x_0)$ и $v = -u$. Большую часть монографии занимает обсуждение отношения этих форм распределений к различным эмпирическим законам, в частности, связанным с предсказанием паводков и с изучением прочности материалов

Автор обсуждает различные альтернативы к теории паводков, построенной Гумбелем, и приходит к заключению, что теория Гумбеля вполне удовлетворяет практическим требованиям.

Затем автор делает обзор исследований Вейбула, Даниэльса и Такера в статистической теории излома материалов, строит новые математические модели для пластичных и ломких материалов и формулирует понятие фактора сохранности.

По мнению автора, мера сохранности материала должна быть основана не на вероятности излома, а на коэффициенте вариации прочности материала. Библ. 148 назв. A. R. G. Owen

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 3, 279.

8352 К. **Таблицы для конечных очередей. Пек, Хейзелвуд** (Finite queuing tables. Peck L. G., Hazelwood R. N. New York, John Wiley and Sons, 1958, 226 pp., ill., 8.50 doll), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 23, 84 (англ.)

8353 К. **Математическое учение о структуре народнохозяйственного оборота. Петер** (Mathematische Strukturlehre des Wirtschaftskreislaufes. Peter Hans. Göttingen, Otto Schwartz and Co., 1954, VII, 230 S., ill., 34,—DM) (нем.)

8354 К. **К вопросу применения множественной корреляции к народнохозяйственным рядам. Грёнер** (Ein Beitrag zur Anwendung der Mehrfachkorrelation auf wirtschaftliche Reihen. Gröner Gerhard. Aalen/Württ., Gröner, 1957, 109 S., ill., 4.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 37, 2686 (нем.)

8355 К. **Приемы анализа совокупностей. Баркли** (Techniques of population analysis. Barclay George W. New York. John Wiley and Sons Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, xiv, 311 pp.) (англ.)

8356 Д. **Распределения общих убытков и прибылей в теории коллективного риска. Тренд распределения суммарного риска учитывается. Брюкнер** (Die Verteilungen des Gesamtschadens und des Gewinnes in der kollektiven Risikotheorie. Unter Berücks. d. Trends d. Risikosummenverteilg. Brückner Robert.— Diss., Math.—naturwiss. Fak., Köln, 1957, IV, 71 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **B**, № 7, 642 (нем.)

См. также: 7585, 7588, 7595, 7603, 7604, 7608 Д, 8221, 8252, 8559, 8652

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

8357. **Итальянская геометрия в Бельгии. Годо** (La géométrie italienne en Belgique. Godeaux L.), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), **25**, 93—100 (франц.; рез. итал., англ.)

Начало ознакомлению бельгийских математиков с работами итальянской геометрической школы положили в первые годы XX в. Стюиверт и вслед за ним Годо, который в 1912 г. занимался в Болонье под руководством Энриквеса теорией алгебраических поверхностей. С 1925—1926 гг. Годо в рамках курса проективной геометрии, который он читал в университете в Льеже, стал излагать теорию алгебраических кривых и поверхностей, используя методы многомерной геометрии и теории бирациональных преобразований. Помимо Годо, исследования по алгебраической геометрии в Бельгии вели его ученики Бюрниа (Burniat), Дервидюе (Derwidué), Йонгманс (Jongmans), Нолле (Nollet), ученик Энриквеса (Enriques) профессор Брюссельского университета Либуа (P. Libois) и ученик последнего Дефриз (Defrise). В Бельгии (Годо и его ученик Розе (Rozet)) были продолжены также работы итальянских геометров по проективно-дифференциальной геометрии. В статье дается краткая характеристика результатов названных ученых. В 1948 г. по предложению Годо был создан субсидируемый бельгийским правительством Центр математических исследований, одной из задач которого является организация коллоквиумов по актуальным вопросам науки, в которых участвуют и иностранные математики. В 1949 и 1952 гг. в Льеже состоялись коллоквиумы по алгебраической геометрии, в 1951 г. в Лувене — по дифференциальной геометрии; активное участие в них приняли итальянские геометры. Статья представляет собой текст доклада, сделанного 16 марта 1954 г. в Институте математики Миланского политехникума. А. П. Юшкевич

8358. **Некоторые материалы к вопросу о развитии начертательной геометрии в России. (Досоветский период). Волков Д. П.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 53—71

Очерк о развитии начертательной геометрии в дореволюционной России. Рассказывается о возникновении ортогональных проекций и об их теоретическом обосновании Монжем. Первым русским ученым-исследователем по начертательной геометрии был Я. А. Севастьянов. Изложена его научная деятельность, а также научная деятельность А. Х. Редера, Н. И. Макарова, В. И. Курдюмова. Говорится о введении аксонометрических и других видов проекций, об исследованиях в области начертательной геометрии Е. С. Федорова, Д. Д. Мордухай-Болтовского, Н. А. Рынина

В. А. Маневич

8359. **Элементарно-геометрическое доказательство теоремы Паскаля и большой теоремы Дезарга. Богачевский** (Елементарне-геометричне доведення теореми Паскаля та великої теореми Дезарга. Богачевський Ю. Т.), Доповіді та повідомлення. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1957, вип. 2, 10—13 (укр.)

8360. **Применение проективной геометрии к вопросу теории поверхностей. Ленц** (Einige Anwendungen der projektiven Geometrie auf Fragen der Flächentheorie. Lenz Hanfried), Math. Nachr., 1958, **18**, № 1-6, 346—359 (нем.)

Работа методического характера. Показано, что с помощью проективной геометрии просто доказываются некоторые теоремы о выпуклых телах и поверхностях.

Например, поверхность, которая в пересечении с любой плоскостью дает коническое сечение, является квадрикой.

Ряд теорем, встречающихся в теории выпуклых тел, непосредственно вытекают из леммы 1: Отображение π точек $A, B, \ldots$ действительного проективного пространства на его двойственное со свойствами: 1) если $A \subset \pi(B)$, то $B \subset \pi(A)$, 2) существует точка A такая, что $A \not\subset \pi(A)$, является полярите том, полученным посредством невырожденной квадратичной формы. Доказательство этой леммы следует из ранее полученных автором результатов (РЖМат, 1957, 3427).

Отображение точечного множества на проективное пространство называется прямолинейным (geradentreu), когда три принадлежащие ему различные точки, лежащие на прямой, всегда отображаются в три различные точки прямой или в одну точку.

Доказывается несколько лемм о прямолинейных отображениях, дающих возможность исследования локальных свойств поверхностей. В. А. Маневич

8361. **О равенствах $u+v+w=0$ и $|u|+|v|+|w|=0$. Андерссон** (Om $u+v+w=0$ och $|u|+|v|+|w|=0$. Anderssson Josef), Elementa, 1958, **41**, № 1, 32—35 (шведск.)

Пусть $u = k(\beta-\gamma)$, $v = k(\gamma-\alpha)$, $w = k(\alpha-\beta)$. Из указанных в заглавии равенств выводится ряд следствий (например, $\Sigma\alpha^3 u = -k\Sigma\alpha\Pi(\beta-\gamma)$), которые применяются к некоторым геометрическим задачам (пример: G — центр тяжести $\triangle ABC$; P — точка внутри $\triangle ABC$, u, v, w — расстояния GP от вершин $\triangle ABC$, α, β, γ, T — площади $\triangle BCP$, $\triangle CAP$, $\triangle ABP$, $\triangle ABC$; тогда $\alpha^3 u + \beta^3 v + \gamma^3 w = \frac{9}{4} GP^2 uvwT$). Г. К. Энгелис

8362. **Об образах точки. Буве, Тебо** (Sur les images d'un point. Bouvaist R., Thébault V.), Mathesis, 1956, **65**, № 10, 540—542 (франц.)

8363. **Задача Снеллиуса-Потенота. Логарифмическое решение угла. Тарантино** (Problema di Snelliuss-Pothenot. Soluzione logaritmica degli angoli. Tarantino Natale), Geom. ital., 1957, **12**, № 3, 16—17 (итал.)

8364 К. **Упражнения по современной геометрии с приложением элементарного изложения основной теории. Т. 5. Ангармоническое отношение. Т. 8. Инволюция. Т. 9. Проективная геометрия, применение к коническим сечениям. Папелье** (Exercices de géométrie moderne, précédés de l'exposé élémentaire des principales théories. T. 5. Rapport anharmonique. T. 8. Involution. T. 9. Géométrie projective, application aux coniques. 4e éd. Papelier Georges. Paris, Vuibert, 1958, 3 vol., ill., le vol. 285 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 49, 1195 (франц.)

8365 К. **Лекции по геометрии. Ментеш** (Előadások a geometria köréből. Mentes Imre. Budapest, Felsőoktatási jegyzetellátó vállalat, 1956, 158 l., ill.) (венг.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

8366. **О присоединенной группе группы Галилея. Арчидьяконо** (Sul gruppo aggiunto del gruppo di Galileo. Arcidiacono Giuseppe), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 4, 633—654 (итал.)

Рассматривается группа преобразований, известных в классической физике под названием преобразований Галилея, а именно, группа, действующая в четырехмерном пространстве-времени и порождаемая следующими операторами бесконечно малых преобразований:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_5 = t\frac{\partial}{\partial y},\quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial z},\quad X_7 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\quad X_8 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},\quad X_9 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Находится выражение матрицы преобразования присоединенной группы группы Галилея. А. С. Феденко

8367. **Прецессия тяжелого гироскопа на асимметрическом подвесе. Каприц** (Precessioni di un giroscopio pesante con armatura asimmetrica. Capriz Gianfranco), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 1-2, 229—236 (итал.)

8368. **Равновесие множества частиц на шаре. Лич** (Equilibrium of sets of particles on a sphere. Leech John), Math. Gaz., 1957, **41**, № 336, 81—90 (англ.)

8369. **О центре тяжести плоских и пространственных фигур. Гофман** (Einiges vom Schwerpunkt ebener und räumlicher Figuren. Hofmann J. E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, **9**, № 6, 252—255 (нем.)

8370. **Моменты инерции плоского треугольника. Сатерли** (Moments of inertia of plane triangles. Satterly John), Amer. J. Phys., 1958, **26**, № 7, 452—453 (англ.)

Вычисляются методами элементарной геометрии моменты инерции треугольника вокруг переменной оси, лежащей в плоскости самого треугольника и проходящей через его центр тяжести; приведены численные данные эксперимента. Если величину момента инерции вокруг какой-нибудь оси отложить в виде отрезка от центра тяжести треугольника по этой оси, то концы отрезков образуют кривую в форме гантели, что отличается от обычного эллипса инерции. Указывается, что для равностороннего треугольника кривая превращается в окружность и что подобный метод применим к другим плоским фигурам: параллелограмму, эллипсу. В. С. Люкшин

8371. **К вопросу об образовании шатунных кривых. Фольмер** (Ein Beitrag zur Erzeugung von Koppelkurven. Volmer Johannes), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1956—1957, **6**, № 3, 491—510 (нем.)

На основании цитируемой здесь работы Шмида, в которой показано конструктивное решение задачи определения шатунной кривой по девяти любым заданным точкам, автор решает проблему синтеза механизма передачи в виде шарнирного четырехзвенника как в общем случае, так и в различных частных случаях. Для рациональных и распадающихся шатунных кривых показывается упрощение построений. Наличие ползуна в механизме уменьшает трудность и сложность геометрической части задачи. Построения автора основаны на геометрических свойствах шатунной кривой. Шатунная кривая общего шарнирного четырехзвенника является трициркулярной кривой шестого порядка. Она обладает тремя конечными двойными точками $D_{1,2,3}$, которые вместе с тремя особыми фокусами $F_{1,2,3}$ лежат на так называемой основной окружности. Дается общее определение изогональной инверсии в отношении некоторого треугольника (D), образованного тремя вершинами $D_{1,2,3}$, как такого квадратического преобразования, которое некоторой точке P сопоставляет точку P^*, последняя получается как пересечение прямых, являющихся зеркальными отображениями прямых PD_1 PD_2 и PD_3 относительно биссектрис треугольника (D). Треугольник D с вершинами в особых точках $D_{1,2,3}$ шатунной кривой и треугольник (F) с вершинами $F_{1,2,3}$ находятся в изогональном положении. По определению два треугольника находятся в изогональном положении, если около них описана одна и та же окружность и каждой вершине одного треугольника через изогональную инверсию по отношению к другому треугольнику сопоставляется несобственная точка противоположной

стороны. Общая шатунная кривая находится сама к себе в изогональной инверсии по отношению к (D) и две ее точки P, P^*, находящиеся в изогональной инверсии, называются сопряженными точками шатунной кривой. Двум сопряженным точкам принадлежат два симметрических относительно стойки F_1F_2 положения производящего шарнирного четырехзвенника. Общая шатунная кривая однозначно определяется девятью линейно независимыми условиями. Ее порождающий шарнирный четырехзвенник определяется тем же числом условий: координаты постоянных точек (по 2), длины коромысел (по 1) и стороны шатунного треугольника (по 1). Рассматриваются разные типы построения общего шарнирного четырехзвенника с различными данными линейными условиями, налагаемыми на шатунную кривую. В первом типе ($D_{1,2,3}$, P, F_3) даны двойные точки $D_{1,2,3}$ шатунной кривой, фокус F_3 на основной окружности и дана некоторая точка P шатунной кривой. Строится точка P^*, сопряженная P; определяется направление прямой в несобственную точку $F^*_{3\infty}$, соответствующую точке F_3 в изогональной инверсии по отношению к (D) в силу изогонального положения (D) и (F); выбирается произвольная прямая F_1F_2 параллельно найденному направлению и, наконец, строится порождающий шатунную кривую шарнирный четырехзвенник. Если точка $\bar{P}^*$ — зеркальное отображение точки P^* относительно F_1F_2, то перпендикуляр m в середине к $P\bar{P}^*$ дает положение шатуна и можно на m строить $\triangle ABP$, подобный $\triangle F_1F_2F_3$, со стороной AB как шатуном. Получается искомый четырехзвенник F_1ABF_3. Подобным образом возможны построения механизмов, если P и P^* зеркально отображаются относительно F_1F_3, F_2F_3. Далее рассматриваются типы построения порождающего шарнирного четырехзвенника, когда на шатунной кривой, кроме двойных точек $D_{1,2,3}$ — действительных или с одной точкой действительной и с двумя другими мнимыми сопряженными, задаются линейно независимые условия в виде двух, трех точек, точки с касательной, с касательными в двойных точках, с кривизной в двойной точке, причем в этом случае задается центр круга кривизны в точке D_1 к одной ветви шатунной кривой и, наконец, рассматривается случай задания острия (точки возврата) в двойной точке. Аналогичные исследования и построения сделаны в случае кривошипно-шатунного механизма, так как последний получается из общего шарнирного четырехзвенника, причем наличие ползуна в кривошипно-шатунном механизме упрощает задачу. Помимо $D_{1,2}$, $D_{3\infty}$, задаются для шатунной кривой такие же дополнительные линейные условия, какие рассмотрены в предыдущем исследовании в случае общей шатунной кривой. В. С. Люкшин

8372. **К вопросу о геометрической интерпретации уравнительных операций. Мазмишвили А. И.**, Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр., 1957, вып. 26, 3—35
См. РЖАстр, 1958, 6171.

8373. **Шарнирные конструкции. Вальц Г. Б.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 143—150

8374. **Графический метод определения «расстояний в свету», применяемый при проектировании рабочих колес радиально-осевых гидротурбин. Рогачевский Л. А.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), 137—142

8375. **Графические методы для преобразования импеданса в сетях без потерь с помощью схемы Кэли-Клейна. Булиндер** (Graphical methods for transforming impedances through lossless networks by the Cayley—Klein diagram. Bolinder E., Folke, Acta polytechn. Electr. Engng Ser., 1956, **7**, № 5, 13 pp., ill.) (англ.)

Рассматриваются локсодромические преобразования импеданса в сетях без потерь. Подробно разбирается случай гиперболического преобразования. Даны чертежи для всех трех случаев: гиперболического, эллиптического и параболического преобразований. Приводится пример графического построения преобразования импеданса. В. А. Иглицкая

8376 К. **Вопросы проектирования и расчета механизмов. Сб. статей. Ред. Прейс В. Ф.** (Тр. Тульск. механ. ин-та, вып. 10). М., Оборонгиз, 1958, 100 стр., илл., 4 р. 15 к.

8377 Д. **Некоторые вопросы линейчатой геометрии и их применение в механике и авиастроении. Маневич В. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1958

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8378. **Доказательство формулы площади круга без применения правильных вписанных и описанных многоугольников. Ла-Барбера** (Dimostrazione della formula dell'area del cerchio senza il tramite dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. La Barbera Alberto), Archimede, 1957, **9**, № 3, 105—107 (итал.)

8379. **О некоторых неравенствах. Ионеску-Циу** (Contribuţii la studiul unor inegalităţi. Ionescu-Ţiu C.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 6, 358—365 (рум.; рез. франц., русск.)

Исходя из неравностороннего треугольника ABC, автор строит последовательность треугольников $A_n B_n C_n$ вершины каждого из которых представляют собой точки пересечения биссектрис предыдущего треугольника с описанной окружностью.

Показывается, что $A_n \to 60°$, $B_n \to 60°$ $C_n \to 60°$ при $n \to \infty$, а последовательности площадей и периметров этих треугольников монотонно возрастают. Устанавливается ряд тригонометрических и алгебраических неравенств, соответствующих геометрическим соотношениям между различными элементами этих треугольников. Имеются опечатки.

Примечание референта. На стр. 364 вместо $3(1-m^2)(1-n^2) < (1+n^2)(1+n^2)(1+p^2)$ должно быть $8(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2) < (1+m^2)(1+n^2)(1+p^2)$. В работе не оговорено, что это, как и остальные неравенства, полученные на стр. 364, не справедливо при $m = n = p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, что как раз соответствует случаю равностороннего треугольника ABC. К. С. Сибирский

8380. **О кратчайших расстояниях между противоположными ребрами тетраэдра. Экке** (Sur les bihauteurs d'un tétraèdre. Hecquet J.), Mathesis, 1957, **66**, № 10, Suppl., 8—13 (франц.)

Простыми вычислениями устанавливаются некоторые неизвестные или малоизвестные свойства кратчайших расстояний между противоположными ребрами тетраэдра. Обозначения; a, a', b, b', c, c' — длины ребер BC, DA, CA, DB, AB, DC тетраэдра T; A, B, C, D и V — соответственно площади граней BCD, CDB, DAB, ABC и объем тетраэдра T; $\alpha\alpha' = h_1$, $\beta\beta' = h_2$, $\gamma\gamma' = h_3$ — кратчайшие расстояния (отрезки общих перпендикуляров) соответственно между противоположными ребрами BC и DA, CA и DB, AB и DC; K — первая точка Лемуана. Тетраэдр отнесен к нормальным тетраэдрическим координатам. Точка K лежит в плоскости, проходящей через точки H_1, H_2, H_3 — середины отрезков $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Точки K, H_1, H_2, H_3 — центры некоторых квадрик. Приводится ряд метрических соотношений, например,

$$\alpha\alpha' = \frac{3V}{\sqrt{D^2+A^2-2DA\cos b}} = \frac{3V}{\sqrt{B^2+C^2-2B\cos a'}}$$

Аналогично для $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$.

Выведены следующие необходимые и достаточные условия ортогональности каждой пары рассматриваемых перпендикуляров ($\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'$ и $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$)

$$D^2+A^2 = B^2 + C^2;\ D^2 + B^2 = C^2 + A^2;\ D^2 + C^2 = A^2+B^2.$$

В частном случае, если $A = B$ и $C = D$, то треугольники BCD и CDA конгруэнтны, аналогично треугольники CDA и BCD. Если $A = B = C = D$, то $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ попарно ортогональны, а грани тетраэдра — равные треугольники. Справедливо и обратное заключение.

С. И. Зетель

8381. **Сферы, ассоциированные с полуортоцентрическим тетраэдром. Мандан** (Spheres associated with a semiorthocentric tetrahedron. Mandan Sahib Ram. Res. Bull. Panjab Univ., 1957, № 127, pp. 447—451, ill.) (англ.)

Продолжая исследования Корта (РЖМат, 1954, 1776), автор вводит (в п. 3) два новых типа сфер, ассоциированных с полуортогональным тетраэдром и для случая ортогонального тетраэдра устанавливает (в п. 4) взаимные отношения между сферами полученных четырех типов (ассоциированными с тетраэдром). П. 1 статьи представляет собой введение, а в п. 2 приведены несколько признаков полуортоцентрического тетраэдра.

В. И. Ведерников

8382. **Об ортогональной проекции. Сатьянараяна** (On orthogonal projection. Satyanarayana U. V.), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 164—168 (англ.)

Пусть P — конфигурация, состоящая из совокупности отрезков $A_m B_m$ длины r_m $(m = 1, 2, \ldots)$ в плоскости $\sum_0$, $\sum_\delta$ — плоскость под углом δ к $\sum_0$, $S(\theta, \delta)$ — сумма квадратов ортогональных проекций $A_m B_m$ на $\sum_\delta$ после поворота конфигурации P в $\sum_0$ на угол θ $(0 \leqslant \theta < \pi)$, α_m — углы между $A_m B_m$ и фиксированным направлением в $\sum_0$. P обладает свойством C, если $S(\theta, \delta)$ конечно и не зависит от θ. Обладание этим свойством для некоторого δ влечет за собой наличие его для любого δ $\left(0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказывается следующий основной факт: для совокупности $n - 1$ точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$ $(A_1 \neq A_{n-1})$ в $\sum_0$ либо многоугольник $A_1, \ldots, A_{n-1} A_1$ сам обладает свойством C, либо существует по крайней мере одна (в общем случае — две) точка A_n такая, что многоугольник $A_1, \ldots, A_n A_1$ обладает свойством C относительно $\sum_\delta$. Доказательство сводится к отысканию корней квадратного уравнения

$$2z^2 + 2\lambda z + (\lambda^2 + \mu) = 0, \quad \text{где}$$

$$\lambda = \sum_{m=1}^{n-2} r_m e^{i\alpha_m}, \quad \mu = \sum_{m=1}^{n-2} r_m^2 e^{2i\alpha_m}.$$

При $n = 3$ отсюда вытекает обращение теоремы о том, что сумма квадратов ортогональных проекций сторон равностороннего треугольника в плоскости $\sum_0$ на другую плоскость есть величина постоянная. Г. С. Бархин

8383. **Тэтраэдры, преобразуемые после рассечения их в кубы. Гольдберг** (Tetrahedra equivalent to cubes by dissection. Goldberg M.), Elem. Math., 1958, **13**, № 5, 107—109 (англ.)

Хиллом (Hill M. J. M, Proc. London Math. Soc., 1896, **27**, 39—52) описаны три однопараметрических семейства тетраэдров и один специальный тетраэдр, которые могут быть рассечены плоскостью на части, из которых можно составить куб (в общем случае это невозможно). Зидлер (РЖМат, 1957, 8227) описал четыре новых специальных тетраэдра T_1, T_2, T_3, T_4, имеющих такие же свойства.

Автор реферируемой заметки обнаружил, что путем определенного сочетания тетраэдров T_1 и T_2 можно получить два новых тетраэдра T_5 и T_6, обладающих аналогичными свойствами. Приводится таблица, включающая все упомянутые тетраэдры. Н. В. Наумович

8384. **Конические сечения в перспективе. Амир-Моэз** (Conic sections in perspective. Amir-Moéz Ali R.), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 229—232 (англ.)

Приводится краткое доказательство известной теоремы о том, что сечения кругового конуса плоскостью есть эллипс, гипербола или парабола. Н. В. Наумович

8385. **Трисекция угла. До** (Trisection de l'angle. Deaux R.), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 47 (франц.)

Автор обращается к читателям журнала Mathesis с просьбой дать библиографические сведения о трисекции угла, основанной на решении следующей задачи: Если SOX — центральный угол круга (O) и равносторонняя гипербола с центром в середине OS касается в точке O прямой OX и пересекает окружность (O) в вершинах равностороннего треугольника, то прямые, соединяющие O с полученными вершинами, — трисектрисы одного из углов, образуемых OX и OS. С. И. Зетель

8386. **Задачи на построение в пространстве. Кеши** (Térmértani szerkesztési feladatok. Késedi Ferenc), Mat. tanítása, 1958, № 5, 133—138 (венг.)

8387. **Геометрические построения, выполняемые с помощью ограниченной линейки. Фридман М. И.**, Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1958, вып. 4, 25—28

Согласно теореме Штейнера построения второй степени могут быть выполнены одной линейкой, если дана окружность и ее центр. В заметке доказано, что теорема остается справедливой если линейка имеет ограниченную длину. Доказательство дано конструктивное. Указаны три различных приема, опирающиеся соответственно на теоремы Дезарга, Паскаля, Брианшона, позволяющие проводить прямые через точки, расстояние между которыми больше длины линейки. О. А. Котий

8388 К. **Конспект лекций по аналитической геометрии. Для техн. вузов. (Учебн. пособие для студ.). Костанди Г. В.** Одесск. технол. ин-т. Одесса, 1958, 164 стр., илл., 8 р. 50 к.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8389. **Выражения для отдельных элементов общего конического сечения. Сатьянараяна** (Expression for the individual elements of the general conic. Satyanarayana K.), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 169—171 (англ.)

Приводятся ортогональные преобразования второго рода с коэффициентами, связанными с матрицей общего уравнения конического сечения, приводящие последнее к каноническому виду. Отсюда известным приемом получаются выражения для отдельных элементов любого конического сечения, заданного в общем виде.

Г. С. Бархин

8390. **О кривых 2-го порядка, вписанных в треугольник. Баррюкан** (Sur les coniques inscrites à un triangle. Barrucand P.), Mathesis, 1958, **67**, № 4-6, 149—150 (франц.)

Пусть ω — центр кривой 2-го порядка, вписанной в данный треугольник ABC, а ω' — середина отрезка с концами в точках, инверсных фокусам этой кривой относительно окружности ABC. Рассматриваются геометрические места точек ω', когда ω перемещаются по некоторым прямым. Например: если ω перемещается по прямой, перпендикулярной прямой Симсона и про-

ходящей через центр окружности ABC, то ω' описывает определенную окружность. В. А. Маневич

8391. Уравнения эллипса и гиперболы. Лёнквист (Ellipsens och hyperbelns ekvationer. Lönnqvist Conrad), Elementa, 1957, **40**, № 4, 254—256 (шведск.)

Эллипс рассматривается как ортогональная проекция окружности. В плоскостях окружности и эллипса вводятся прямоугольные декартовы системы координат с общим началом и общей осью x, совпадающей с прямой пересечения плоскостей. Обозначим радиус окружности и малую ось эллипса соответственно через a и b. Для любой точки окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Для соответствующей точки эллипса $x = x_1$; $y = \frac{y_1 a}{b}$; имеем $x_1^2 + \frac{y_1^2 a^2}{b^2} = a^2$ — уравнение эллипса. С помощью последнего уравнения получают каноническое уравнение гиперболы. В. А. Маневич

8392 К. Аналитическая геометрия. Лея (Analytische Geometrie. Leja Franciszek. Warszawa, P. W. N., 1954, 288 s., 22.50 zł.) (польск.)

8393 К. Лекции по геометрии. Т. I. Аналитическая геометрия с элементами проективитета. Вилла (Lezioni di geometria. Vol. I. Geometria analitica con elementi di proiettiva. 3-a ed. Villa Mario. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1957, xviii, 389 p., ill., 5000 L.) Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 679, 674—675 (итал.)

8394 К. Аналитическая геометрия. Роша (Geometria analitica. 2. ed. Rocha Luiz Mauro. S. Paulo, Liv. Novel, 1958, 142 p., il., 120,00 cruz. Mulitilite), Bol. bibliogr. brasil., 1958, **6**, № 2, 87 (порт.)

8395 К. Аналитическая геометрия. Гурский (Geometria analityczna. Dla techników. Wyd. 7 niezmien. Górski Józef. Warszama, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod., 1958, 116 s., il., 4.50 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 18, 241 (польск.)

8396 К. Курс конических сечений. Самон (A treatise on conic sections. Salmon George. Reissue of 6th ed. New York, Chelsea Publ. Co., 1954, XV, 399 pp.; 3.25 doll.) (англ.)

8397 К. Методика преподавания координатной геометрии. Фараго (A koordináta-geometria tanításának módszertana. Faragó László. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 159 l, ill.) (венг.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

8398. Распадение линии пересечения поверхностей второго порядка на плоские кривые. Гвоздев Ю. В., Тр. Новосиб. инж.-строит. ин-та, 1957, **6**, 297—313

Средствами проективной геометрии доказываются известные теоремы о распадении линии пересечения поверхностей второго порядка: 1) Если два конуса пересекаются по кривой, содержащей плоскую кривую, то линия пересечения поверхностей содержит и вторую плоскую кривую. Аналогичные теоремы доказаны для двух поверхностей, когда одна из них есть конус, а другая — произвольная поверхность второго порядка, и для двух произвольных поверхностей второго порядка. 2) Если две поверхности второго порядка описаны (или вписаны) около третьей поверхности второго порядка, то данные поверхности пересекаются по плоским кривым.

В статье сформулированы следствия из доказанных теорем и некоторые вспомогательные теоремы. Не везде выясняется вопрос о том, является ли линия пересечения вещественной или мнимой, что для целей начертательной геометрии является весьма существенным. З. А. Скопец

8399. Некоторые свойства равномерного плоского поляритета. Эчарте (Algunas propiedades de la polaridad uniforme plana. Echarte Javier), Gac. mat., 1957, **9**, № 8, 221—224 (исп.)

На плоскости рассматривается поляритет относительно кривой, заданной уравнением $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1$. Обозначим через $d(P)$ расстояние от точки P до ее поляры. Доказывается, что функция $d(P)$, рассматриваемая на прямой, проходящей через начало координат, достигает относительного минимума в точках пересечения этой прямой с кривой $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1$. Минимум функции $d(P)$ на всей плоскости равен $2/\max(a, b)$ $(a, b > 0)$. А. Л. Онищик

8400. Об основных построениях в плоскости Лобачевского. Семенович А. Ф., Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 13, 44—46

Рассматриваются задачи: 1. Через точку A, не лежащую на прямой a, провести прямую, параллельную прямой a в одном из ее направлений. 2. Построить отрезок, для которого данный острый угол является углом параллельности.

Автор излагает построение Либмана для первой задачи и показывает, что, упрощая построение Либмана, получаем построение, идентичное построению А. С. Смогоржевского. Для второй задачи указывается способ проще способа А. С. Смогоржевского на единицу по критерию Лемуана, если данный угол меньше $\pi/3$.

Для всех построений указывается простота решения по Лемуану. На рис. 3 не указаны точки G и N, что затрудняет чтение заметки. Л. Я. Березина

8401. Новые соотношения между площадями некоторых вырезков круга и вписанными углами в геометрии Н. И. Лобачевского и Римана. Жемайтис (Nauji sąryšiai tarp kai kurių skritulio išpiovų plotų ir ibrėžtinių kampų N. I. Lobačevskio ir B. Rimano geometrijose. Žemaitis Z.), Уч. зап. Вильнюсск. ун-т. Сер. матем., физ. и хим. н., Mokslo darbai. Vilniaus univ. Matem., fiz. ir chem. mokslų ser., 1957, 7, 13—22 (лит.; рез. русск.)

Получаются вписанные в окружность плоскости Лобачевского смежные углы α и β, обратно пропорциональные дугам, на которые они опираются, т. е. каждый из них измеряется половиной дуги другого. Такие два угла автор называет сопряженными. Вписанный угол $\alpha + \beta$, равный сумме пары сопряженных углов, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Если R — площадь вырезка угла α и S — угла β, то сумма площадей $S + R$ пропорциональна сумме углов $\beta + \alpha$, а разность $S - R$ пропорциональна разности $\beta - \alpha$. Множители пропорциональности различные. Такие же соотношения получаются и в геометрии Римана. К. И. Гринцевичюс

8402. О геометриях, определяемых аксиомами инцидентности. Титс (Sur les géométries définies par des axiomes d'incidence. Tits J.), Abstr. Short communs Internat. Cnogress Math. in Edinburg. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 110—111 (франц.)

8403. О геометрии с мероопределением, зависящим от фиксированной кривой третьей степени. Скородумов В. М., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 360—368

8404. Аксиоматическое определение перемещений и основная задача метрической геометрии в плоскости. Нёймейстер (Définition axiomatique des déplacements et le problème fondamental de la géométrie métrique dans le plan. Neumeister Robert), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 191, 198—212 (франц.)

Предполагается известной принадлежащая автору аксиоматика линейных пространств, состоящая из 4 аксиом о полупрямой, 3 аксиом о линейных пространствах и аксиомы Дедекинда (РЖМат, 1958, 3197). Вместе

с даваемыми в настоящей статье аксиомами о перемещениях и аксиомой о параллельных они составляют полную аксиоматику геометрии (евклидовой или Лобачевского в зависимости от выбора последней аксиомы). Вводится понятие о позиционных элементах P^n: $P^0 = A_0$ — точка; $P^1 = \overline{A_0 A_1}$ — полупрямая с началом в точке A_0; $P^2 = {}^*\overline{P^1 A_2} = {}^*A_0 A_1 A_2$ — совокупность полупрямой P^1 и ограниченной основанием этой полупрямой полуплоскости, определяемой заданием точки A_2. Вообще, P^n — это совокупность P^{n-1} и полупространства E^n, ограниченного основанием элемента P^{n-1} и выделяемого заданием точки A_n:

$$P^n = {}^*\overline{P^{n-1} A_n} = {}^*\overline{A_0 A_1 A_2 \ldots A_n}.$$

Каждому позиционному элементу P^n соответствует элемент ориентации O^n, который получается из P^n заменой в нем полупрямой P^1, соответствующей ориентированной прямой. Рассматриваются линейные взаимно однозначные преобразования, которые определяются как точечные преобразования, сохраняющие полупрямые. Совокупность этих преобразований образует группу. Преобразования эти отображают, в частности, позиционный элемент P^2 на позиционный элемент того же измерения P'^2. Линейные преобразования, сохраняющие ориентацию — положительны; меняющие ориентацию — отрицательны.

Перемещение в плоскости определяется как линейное взаимно однозначное отображение плоскости на себя, однозначно задаваемое соответствием двумерных позиционных элементов — Dèpl (P^2, P^2). Произведение двух перемещений является перемещением. Совокупность перемещений плоскости образует группу; положительные перемещения составляют ее подгруппу. Две плоские фигуры равны, если они являются соответствующими при некотором перемещении. Все фигуры, равные данной, образуют класс эквивалентности, определяющий форму фигуры. Доказывается, что в плоскости существует единственное отрицательное перемещение, при котором точки данной прямой (D) остаются неподвижными, такое преобразование называется симметрией относительно прямой (оси) D; соответствующие точки при этом называются симметричными относительно оси D. Множество перемещений на прямой образует группу; при этом отрицательное перемещение имеет неподвижную точку — центр симметрии, положительное же перемещение (перенос) можно рассматривать как произведение двух симметрий, причем один из центров симметрии может быть выбран на прямой произвольно. Доказывается существование середин отрезков, биссектрис углов, перпендикуляра, вертикальных углов; рассматривается перенос в плоскости и вращение; последнее всегда можно рассматривать как произведение двух симметрий относительно двух осей, проходящих через центр вращения. Симметрия плоскости относительно точки (центра) определяется как вращение, угол которого — развернутый. Заключительные теоремы утверждают, что любое положительное перемещение всегда можно рассматривать как произведение двух симметрий относительно прямых, а любое отрицательное перемещение как произведение симметрии относительно точки и симметрии относительно прямой. А. Г. Школьник

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8405. Теорема Польке и ее обобщение на случай центрального проектирования. Риуш-ди-Соза (Pohlke's theorem and its generalizaton to the case of central projection. Rios de Souza Jayme Eduardo. Ciencias, 1953, **18**, 735—752) (порт.)

8406. Построение аксонометрических изображений методом двух пар перспективно-аффинных пучков. Юдицкий М. М., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1958, **14**, 223—235

Предлагается способ построения аксонометрической проекции предмета по его двум ортогональным проекциям при помощи двух пар перспективно-аффинных пучков (без использования вторичных проекций). Разрабатываются особенности построения этим методом косоугольных и прямоугольных аксонометрических проекций на плоскостях общего и некоторых частных положений. Показано применение метода к построению метрически определенных аксонометрических изображений; дано решение обратной задачи. З. И. Прянишникова

8407. Преобразование проекций при решении метрических и позиционных задач. Кон А. А., Тр. Ленингр. воен.-механ. ин-т, 1957, № 6, 261—293

Рассматривается вопрос о применении способа вспомогательного проектирования к решению различных задач начертательной геометрии. Автор приводит примеры, когда этот способ позволяет упростить решение. Рассмотрев сначала случай параллельного проектирования, автор приводит схему аффинных преобразований, которые возникают при выполнении построений на чертеже. Он отмечает, что на основе соответствующих проекционных связей им предложена конструкция аксонографа (прибор, позволяющий по комплексному чертежу предмета строить его аксонометрическое изображение).

Переходя затем к способу центрального вспомогательного проектирования, автор применяет его к решению графических задач на поверхности второго порядка. Здесь он также отмечает наличие известных геометрических преобразований при выполнении построений на плоскости чертежа. Н. Ф. Четверухин

8408. Примеры построения теней на кривых поверхностях в перспективе. Евстифеев М. Ф., Изв. высш. учебн. заведений. Стр-во и архитект., 1958, № 4, 130—136

Рассматривается построение теней на линейчатых поверхностях в перспективе. Приводится несколько примеров построения теней на архитектурных деталях в перспективе, для чего используются точки схода параллельных плоскостей, линии схода поверхностей, а также вспомогательное проектирование на некоторые плоскости, в том числе на бесконечно удаленную плоскость.

Н. В. Наумович

8409. Построение линии пересечения поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии. Числов П. А. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1956, вып. 28, 46—59

8410. Аналитическое исследование развертки линии пересечения параболоида с цилиндром. Бутова Г. В. Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1957, вып. 31, 214—221

Рассматривается построение развертки линии пересечения параболоида и цилиндра по координатам точек. Для этого автор выводит уравнение линии пересечения поверхностей, развернутой на плоскости.

Уравнение выведено для случая пересечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра и получается довольно сложным, так как содержит эллиптический интеграл второго рода. Уравнение значительно упрощается, если одна из поверхностей или обе представляют собой поверхности вращения. Эти случаи также рассмотрены в статье. В. Н. Журавлева

8411. Изображение фигур четырехмерного пространства по способу аксонометрической проекции с числовыми отметками. Гарант (Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom Euklidovskom priestore. Harant M.), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1956, № 9, 455—485 (словацк.; рез. русск., нем.)

Для изображения какой-либо четырехмерной фигуры по рассматриваемому способу ее предварительно проектируют ортогонально на трехмерную картинную плоскость. Полученную проекцию изображают в свою очередь на двумерной плоскости проекций по известному способу ортогональной аксонометрии трехмерного пространства. Затем характерные точки изображения фигуры на двумерной плоскости дополняют числовыми отметками, выражающими расстояния соответствующих точек оригинала до трехмерной картинной плоскости.

Сочетание аксонометрической проекции с числовыми отметками используется в наших отечественных трудах по физико-химическому анализу для изображения диаграмм состояния или диаграмм растворимости четырехкомпонентных систем.

Чертеж четырехмерной фигуры, построенный по этому способу, позволяет однозначно определять форму и размеры оригинала, а следовательно, решать в нем позиционные и метрические задачи.

Кроме простейших задач указанного типа, во второй части приводятся примеры решения задач на сечение гиперплоскостью таких гиперповерхностей 2-го порядка, как гиперсфера, косой гиперцилиндр и косой гиперконус со сферическими основаниями. Естественно, что между рассматриваемым способом и такими известными способами изображения четырехмерных фигур, как способ Монжа-Скоуте, способ ортогональных проекций с числовыми отметками, способ ортогональной аксонометрии и способ циклографического изображения, существует определенная связь и возможность перехода от одного из них к любому другому. В. Н. Первикова

8412. Введение в одну из возможных начертательных геометрий четырехмерного пространства. Дальман (Einführung in eine Darstellende Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Dallmann Herbert), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, 6, № 3-4, 211—217 (нем.)

Разрабатывается метод изображения точек четырехмерного пространства векторами плоскости, т. е. метод, предложенный акад. Е. С. Федоровым. При помощи формулы расстояния между двумя точками устанавливается определяемое по чертежу условие ортогональности двух прямых, что дало возможность очень просто изобразить плоскости, параллельные плоскости чертежа $[x_1, x_2]$. В указанных плоскостях рассматриваются окружности постоянного радиуса r с центрами в точках пересечения плоскостей окружностей с перпендикулярной к плоскости $[x_1, x_2]$ плоскостью $[x_3, x_4]$:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2, \qquad x_3 = a, \qquad x_4 = b.$$

Изменением значений параметров a и b при постоянном r получается трехмерное пространство 2-го порядка $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, называемое гиперцилиндром и рассматриваемое как геометрическое место точек, удаленных от плоскости $[x_3, x_4]$ на данное расстояние r. Приводится изображение такого гиперцилиндра на плоскости $[x_1, x_2]$. Рассматриваются изображения цилиндров, являющихся пересечением гиперцилиндра с гиперплоскостями уровня. З. И. Прянишникова

8413. Построение и использование плоских сечений многогранников. Трифонов П. А., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1958, 116, 225—241

Предлагается ввести построение плоских сечений многогранников, выполняемое на проекционном чертеже, в курсе первых глав стереометрии, изучаемых в средней школе. Разрабатывается методика, согласно которой рекомендуется производить решение простейших позиционных и метрических задач на многогранники во фронтальной косоугольной монопроекции.

З. И. Прянишникова

8414 К. Начертательная геометрия. Аран, Авиньян (Géométrie descriptive. 6 ème éd. entièr. refond. Harang F., Avignant J. Paris, Dunod, 1957, VII, 183 p., ill.) (франц.)

Элементарный учебник начертательной геометрии для национальных профессиональных школ, технических колледжей, профессиональных курсов и т. д.

Излагается только метод ортогональных проекций. Гл. 1—4 посвящены задачам на точку, прямую и плоскость, гл. 5, 6 — методам преобразования проекций, гл. 7, 8 — многогранникам, гл. 9—11 — поверхностям (цилиндры, конусы, сфера), гл. 12 — винтовой линии и связанным с ней поверхностям. Во всех разделах делается упор на простейшие и наиболее часто встречающиеся в практике положения тел (так, вопрос о пересечении двух плоскостей общего положения рассматривается как дополнительный). После каждой главы даны примеры для решения; в конце книги приведены образцы задач на конкурсных экзаменах. Необходимые по ходу дела сведения из геометрии сообщаются без доказательств.

В. В. Рыжков

8415 К. Начертательная геометрия. Класс математики. Лепинар, Перне (Géométrie descriptive. Classe de mathématiques. Lespinard Victor, Pernet Roger. Lyon, A. Desvigne, 1958, 128 p., ill., 395 fr.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 52, 1271 (франц.)

8416 К. Метод центрального проектирования. Лекции по начертательной геометрии. Кавальин (Método de projecão central. Lições de geometria descritiva. Cavallin José. Curitiba, Tip., João Haupt, 1958, 126 p., il., 140,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1958, 6, № 7, 408 (порт.)

8417 К. Начертательная геометрия. Картези (Ábrázoló geometria. Kárteszi Ferenc. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 203 l., ill.) (венг.)

8418 К. Построение сечений тел проектирующими плоскостями. Шоломов А. М. Харьков, Харьковск. ун-т, 1958, 52 стр., илл., 1 р. 55 к.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8419. Стереометрические обобщения теоремы Фаньяно. Мордухай-Болтовской Д. Д., Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 25—30

Фаньяно, Эйлер и другие математики указали спрямляемые суммы дуг алгебраических кривых. Автор обобщил эти результаты на пространство трех измерений, показав возможность сведения суммы площадей „вырезок" поверхности к площади, ограниченной алгебраической кривой с коэффициентами, являющимися алгебраическими функциями коэффициентов поверхности $f(x, y, z) = 0$.

В основу своего исследования автор положил формулы для величины замкнутой поверхности, ограниченной кривыми пересечения данной поверхности с некоторыми цилиндрами. Сведя задачу к абелеву интегралу, автор для решения поставленной задачи использовал известную теорему Абеля. М. П. Черняев

8420. О некоторых матрицах и уравнениях для параметров особых точек рациональных кривых. Фидлер (O jistých maticích a rovnici pro parametry singulárních bod bodů racionální křivky. Fiedler Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1952—1953, **77**, № 3, 243—265; № 4, 321—346 (чешск.)

Статья состоит из трех частей. В первой части выводятся общие теоремы для матриц, которые во второй и третьей частях применяются к алгебраической геометрии рациональных кривых.

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 6, 681.

8421. О парах ветвей с общим началом и одним и тем же соприкасающимся пространством. Терracини (Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli

stessi spazi osculatori. Terracini Alessandro. Rend. Sem. mat. Univ. Politecn. Torino, 1953, 12, 256—281) (итал.)

8422. **Рациональные точки на одной кубической поверхности. Шатле** (Points rationnels sur une surface cubique. Châtelet F.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 27 (франц.)

Автор нашел кубическую поверхность, для которой существует конечное число параметрических представлений, таких, что рациональной точке соответствует рациональное значение параметра в одном из этих представлений. В. В. Морозов

8423. **Об инвариантных системах некоторых алгебраических поверхностей. Годо** (Sur les systèmes invariants de certaines surfaces algébriques. Godeaux Lucien), J. math. pures et appl., 1958, 37, № 2, 161—172 (франц.)

Используя свой обычный метод (рассмотрение образа циклической инволюции с конечным числом слитых точек), автор строит поверхность, каноническая система которой содержит 7 постоянных компонент (рациональных кривых), из коих одна — виртуальной степени — 1, а остальные — виртуальной степени —3. Таким образом, рациональная кривая виртуальной степени — 1 может не быть исключительной. В. В. Морозов

8424. **О циклических инволяциях, принадлежащих алгебраической поверхности. Годо** (Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica. Godeaux L.), Rend. Seminar mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), 25, 101—112 (итал.; рез. англ.)

Пусть F — алгебраическая поверхность, инвариантная относительно бирационального преобразования T, порождающего на F циклическую инволюцию I_p порядка p (p — простое) с конечным числом единичных точек A. В работе изучаются особенности точек дирамации A' поверхности Φ — проективной модели I_p, которые соответствуют точкам A поверхности F. О. А. Котий

8425. **Проблема минимальных моделей для алгебраических поверхностей. Зариский** (Le problème des modèles minimum pour les surfaces algébriques. Zariski Oscar), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 24-1—24-12 (франц.)

Подробное изложение этого доклада см. РЖМат, 1959, 5141. В. В. Морозов

8426. **О критерии Кастельнуово рациональности $P_a=p_2=0$ алгебраической поверхности. Зариский** (On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a=P_2=0$ of an algebraic surface. Zariski Oscar), Illinois J. Math., 1958, 2, № 3, 303—315 (англ.)

Критерий рациональности ($p_a = P_2 = 0$) несингулярной неприводимой алгебраической поверхности F над алгебраическим замкнутым полем, данный для классического случая Кастельнуово, доказывается для поля любой характеристики и $(k^2) = 1$, где k — канонический дивизор F (общее доказательство для $(k^2) \neq 1$ см. РЖМат, 1959, 5141).

Следствие — теорема о рациональности плоских инволюций: Если $k(x, y)$ — чисто трансцендентное (степени трансцендентности 2) расширение алгебраически замкнутого поля k и Σ — промежуточное между k и $k(x, y)$ поле степени трансцендентности 2 над k и если $k(x, y)$ — сепарабельное расширение Σ, то Σ — чисто трансцендентное расширение k. На примере показывается, что условие сепарабельности $k(x, y)/\Sigma$ существенно. В. В. Морозов

8427. **Кратные плоскости и алгебраические косы. Леви-Брюль** (Plans multiples et tresses algébriques. Lévy-Bruhl), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris. 1956—1957, 10. Paris, 1958, 3—1—3—18 (франц.)

Обзор работ по теории кратных плоскостей, особенно алгебраических кос. В. В. Морозов

8428. **Арифметика и классы дивизоров на алгебраических многообразиях. Нерон** (Arithmétique et classes de diviseurs sur les variétés algébriques. Néron André), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 139—154 (франц.)

Автор применяет теорию „распределений" Вейля (Weil A., Ann Math., 1951, 53, 412—444) к изучению классов дивизоров на алгебраическом многообразии В частности, им вводится понятие высоты точки проективного пространства и — с помощью проективного вложения — высоты дивизора. Исследуются свойства этого понятия. Результаты прилагаются к упрощению одного доказательства работы автора в Bull. soc. math. France, 1952, 80, 101—166. В. В. Морозов

8429. **Циклы и дивизоры на алгебраической поверхности. Абельянас** (Ciclos y divisores sobre una superficie algebraica. Abellanas Pedro), Rev. mat. hisp.-amer., 1956, 16, № 1-2, 3—10 (исп.)

Краткое предварительное сообщение к работе автора: РЖМат, 1959, 3140. В. В. Морозов

8430. **Критерий единичной кратности и обобщение леммы Гензеля. Чжоу Вэй-лян** (The criterion for unit multiplicity and a generalization of Hensel's lemma. Chow Wei-Liang), Amer. J. Math., 1958, 80, № 2, 539—552 (англ.)

Доказывается следующая уточненная форма критерия единичной кратности (ср. Van der Waerden, Math. Ann., 1934, 110, 128—133): Пусть V^n — алгебраическое многообразие в S^m над полем k, X^r и Y^s $(r+s=n)$—два рациональных над k положительных цикла на V, v — вещественное дискретное нормирование k и пусть надчеркивание означает специализацию относительно этого нормирования. Если α—точка $\overline{V}$, рациональная над $\overline{k}$, причем $\overline{V}$ простев α, а $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ в ней трансверсальны, то в специализации над v каждой системы точек из $|X| \cap |Y|$ (включающей все изолированные точки) α имеет кратность 1. Если k — полное относительно v, то в $|X| \cap |Y|$ найдется точно одна точка, специализирующаяся в α; она рациональна над k_v, простая для V, и X с Y в ней трансверсальны.

Если в предпосылках заменить требование трансверсальности X и Y требованием собственного их пересе, чения в α, то с привлечением результатов Нагати получается обобщение леммы Гензеля: на V существует точно один положительный O-цикл Z с носителем в $|X| \cap |Y|$, рациональный над k и такой, что $\overline{Z} = i(\alpha; \overline{X} \cdot \overline{Y})\alpha$; точка $\alpha | \in |X| \cap |Y|$ специализируется над $(X, Y) \to (\overline{X}, \overline{Y})$ в α тогда и только тогда, когда она входит в Z с положительным коэффициентом $\mu(\alpha, Z)$; при этом $i(\overline{\alpha}; \overline{X} \cdot \overline{Y}) = \mu(\alpha, Z)$. В. В. Морозов

8431. **Характеристическое графическое свойство поверхности Веронезе в конечном пространстве. Заметка I. Таллини** (Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota I. Tallini Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 24, № 1, 19—23 (итал.)

Рассмотрение ведется в пространстве $S_{5,\,q}$ однородных проективных координат $X_{ij} = X_{ji}$ ($S_{5,\,q}$ — конечное пятимерное линейное пространство над полем Галуа порядка $q = p^h$; простое p — характеристика поля; $S_{k,\,q}$ содержит $q^k + q^{k-1} + \ldots + q + 1$ точек). Параметрические уравнения

$$X_{ij} = x_i x_j \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

определяют поверхность Веронезе, содержащую q^2+q+1 точек и допускающую такое же число касательных плоскостей, которые, при q нечетном, попарно имеют общую точку, причем более двух плоскостей через одну точку не проходят. Это свойство касательных плоскостей оказывается характерным для поверхности Веронезе. Доказательство этого будет дано в следующей заметке. В нас-

тоящей статье рассматривается множество $\mathfrak{F}$ плоскостей, обладающих вышеуказанными особенностями, и устанавливаются некоторые его свойства.

Пусть τ — некоторая плоскость из множества $\mathfrak{F}$ q^2+q+1 плоскостей пространства $S_{5,q}$ ($q=p^h$, $p\neq 2$), попарно имеющих одну общую точку и таких, что более двух плоскостей не проходят через одну и ту же точку. Плоскость τ, содержащая всего q^2+q+1 точек, пересекается в q^2+q точках с остальными плоскостями из $\mathfrak{F}$ и лишь одна ее точка T остается свободной. Обозначая совокупность таких точек T всех плоскостей из l через F, говорят, что плоскость τ касается F в точке T. Доказывается, что гиперплоскость пространства $S_{5,q}$, имеющая с $\mathfrak{F}$ более одной общей плоскости, содержит $q+1$ плоскостей из $\mathfrak{F}$, которые касаются F множества F в $q+1$ точках, расположенных в некоторой плоскости π и образующих там невырожденное коническое сечение C, касательными к которому служат прямые, по которым плоскости из $\mathfrak{F}$ пересекают плоскость π. Гиперплоскость пересекает F только в точках C. Плоскость π однозначно определяется тремя точками: двумя точками T_1 и T_2 касания с F двух плоскостей τ_1 и τ_2 из $\mathfrak{F}$, лежащих в одной гиперплоскости, и точкой P пересечения этих плоскостей. Меняя точки касания T_1 и T_2, получают совокупность $\mathfrak{F}^*$ плоскостей π, содержащую всего $\binom{q^2+q+1}{2}/\binom{q+1}{2}=q^2+q+1$ различных плоскостей. Через любую секущую или касательную к F прямую (никакие три точки не лежат на одной прямой) проходит одна и только одна плоскость из $\mathfrak{F}^*$. А. Г. Школьник

8432. **Обобщенные многообразия Сегре. Стейн** (Generalised Segre varieties Stein E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 110 (англ.)

Сообщается, что автор с помощью метода бирациональных представлений веронезеанов получил обобщение на этот случай свойств классических многообразий Сегре. В. В. Морозов

8433. **О теореме Торелли. Мацусака** (On a theorem of Torelli. Matsusaka T.), Amer. J. Math., 1958, 80, № 3, 784—800 (англ.)

Вейль (РЖМат, 1958, 8206), развивая идеи Андреотти, дал строгое доказательство теоремы Торелли для случая произвольного поля. Здесь дается доказательство, развивающее идеи самого Торелли. В. В. Морозов

8434. **Обобщенные матрицы инцидентности над групповой алгеброй. Хьюз** (Generalized incidence matrices over group algebras. Hughes D. R.), Illinois J. Math., 1957, 1, № 4, 545—551 (англ.)

Система v точек и v прямых, связанных соотношениями инцидентности, называется (v,k,l)-системой π (v, k, l — натуральные числа, $v>k>l>0$, $l(v-1)=k(k-1)$), если каждая точка (прямая) принадлежит k прямым (содержит k точек) и каждая пара различных точек (прямых) принадлежит l общим прямым (содержит l общих точек) (РЖМат, 1956, 4070); $n=k-l$ называется порядком π, если $l=1$, то π — проективная плоскость. Коллинеацией π называется однозначное отображение π в себя, переводящее точки в точки и прямые в прямые и сохраняющее инцидентность.

Автор показывает, что если π-конфигурация допускает группу G коллинеаций, то некоторые матрицы с элементами из групповой алгебры для G должны удовлетворять определенным уравнениям, обобщающим уравнения, исследованные им в работах: РЖМат, 1958, 5084 и 1959, 1920. Изучение этих уравнений приводит к следующим выводам.

Если π — проективная плоскость порядка $n\equiv 2 \pmod 4$, то $n=2$ в каждом из следующих случаев: 1) π допускает коллинеацию четного порядка (ср. РЖМат, 1958, 709); 2) π допускает точечно дважды транзитивную группу коллинеаций; 3) π допускает группу коллинеаций, оставляющую инвариантной некоторую прямую и точечно транзитивную вне ее.

Если π — проективная плоскость порядка n, где n — четное, но не квадрат, и если π допускает точечно дважды транзитивную группу коллинеаций, то π дезаргова. В. В. Морозов

8435. **Поляризованные многообразия, поля модулей и обобщенные куммеровы многообразия поляризованных абелевых многообразий. Мацусака** (Polarized varieties, fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized abelian varieties. Matsusaka T.), Amer. J. Match., 1958, 80, № 1, 45—82 (англ.)

Развернутое изложение работы автора (РЖМат, 1958 1510), на которую автор, однако, не ссылается и о существовании которой не упоминает. Добавлен значительный подготовительный материал и новые результаты, в частности показано, что группа всюду бирегулярных бирациональных преобразований полного неособенного поляризованного многообразия в себя алгебраична и что группа его автоморфизмов конечна. В. В. Морозов

8436. **Главные однородные пространства над абелевыми многообразиями. Ланг, Тейт** (Principal homogeneous spaces over abelian varieties. Lang Serge, Tate John), Amer. J. Math., 1958, 80, № 3, 659—684 (англ.)

Рассматривается коммутативное многообразие-группа A над полем k и расширение Галуа K/k; группа когомологии для группы A_k точек A, рациональных над K, обозначается $H^r(k, A)$, причем предполагается, что K — сепарабельное замыкание k. Основной объект исследования — группа $H^1(k, A)$.

Обобщив на бесконечный случай основные предложения теории когомологий Галуа, авторы изучают связь между классами k-изоморфных главных однородных пространств над A и группой H^1, называемой ими группой Шатле. Устанавливается однооднозначное соответствие этих двух объектов (сохраняющееся и в некоммутативном случае, когда H^1 будет не группой, а просто множеством); ряд выводимых предложений указывает на глубокую аналогию между группой Шатле классов главных однородных пространств над k и брауеровской группой классов центральных простых алгебр над k.

Далее группа H^1 изучается на основе теории редукции и устанавливается ряд ее свойств арифметического характера. В. В. Морозов

8437. **Некоторые результаты в теории дифференциальных форм первого рода на алгебраических многообразиях. Накаи** (Some results in the theory of the differential forms of the first kind on algebraic varieties. Nakai Yoshikazu), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 155—173 (англ.)

Рассматривается нормальное многообразие $V^r=V$ (размерности r, над некоторым полем k) в проективном пространстве S^n, с общей точкой $P=(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть C_t — его сечение гиперплоскостью $\sum_j u_{ij} X_j=0$, $i=0,1,\ldots,r+1$, с неопределенными коэффициентами (присоединяемыми к основному полю). Пусть $\eta_{it}=\sum_j u_{ij}\xi_{jt}$ и $y_i=\eta_{it}/\eta_{0t}$. Многообразие V^* с общей точкой $(\eta_{0t}, \eta_{1t}, \ldots, \eta_{r+1,t})$ является общей проекцией V в проективное пространство S^{r+1}, определяемой некоторым неприводимым однородным многочленом $F^*(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{r+1})$, степени m.

Предварительно доказывается несколько вспомогательных предложений: об униформизации $(r-1)$-мерного подмногообразия V с помощью $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$, о дивизорах $(dy_{i_1}, dy_{i_2}, \ldots, dy_{i_s})$ и др. Отметим такой результат: Если $\deg V<r+2$, то геометрический род P_g равен нулю; при $\deg V=r+2$ он не превосходит 1, а если $P_g=1$, то

V содержится в линейном подпространстве размерности $(r+1)$, т. е. является гиперповерхностью.

Далее устанавливаются условия, необходимые и (для неособого многообразия) достаточные для того, чтобы дифференциальная форма $\omega=\Sigma f_{i_1}\dots_{i_q} dy_{i_1}\dots dy_{i_q}$ была формой первого рода. Если обозначить через Y_i положительный дивизор $(dy_1\dots dy_{i-1}dy_{i+1},\dots,dy_{r+1})+(r+1)C_0$, через $L(D)$ совокупность функций f таких, что $(f)+D\sim 0$, то указанные условия состоят в том, чтобы к $L(Y_{r+1}-qC_0)$ принадлежали функции $f_{i_1 i_2\dots i_q}$,

$$\Sigma_\alpha y_\alpha f_{\alpha i_1 i_2\dots i_{q-1}} \quad \text{и} \quad 1, F_{r+1}\sum_\alpha (-1)^\alpha F_{i_\alpha} f_{i_0,\dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1}\dots i_q},$$

где $F_i=\dfrac{\partial}{\partial y_i}F^*(1, y_1,\dots,y_{r+1})$.

Пусть C—сечение V общей гиперплоскостью и ω—$(r-1)$-мерная форма первого рода на C. Для того чтобы существовал положительный дивизор Z в $|K+C|$ (где K—канонический класс) такой, что $(\omega)=Z\cdot C$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась r-мерная дифференциальная форма Ω, для которой $(\Omega)+C\sim 0$ и $\omega=\mathrm{Res}_C\,\Omega$ (вычет Пуанкаре). Изучаются $(r-1)$-мерные формы первого рода на V, след которых на C обладает этим свойством (в классическом случае такие формы отсутствуют). Наличие их связано с соотношениями вида $\Sigma_i A_i\dfrac{\partial t^*}{\partial y_i}\equiv 0$, где A_i—присоединенные формы степеней $<m-r$. В предположении, что такие соотношения отсутствуют, автор показывает (для арифметически нормального, неособого многообразия, степень которого не делится на характеристику основного поля), что пространство q-мерных дифференциальных форм первого рода ($q<\dim V$) на V изоморфно отображается в пространство соответствующих форм на C.

И. З. Розенкноп

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8438. Архимедовы винтовые линии. Ап-Саймон (Archimedean screws. Ap Simon H. G.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 335, 38—40 (англ.)

8439. Комплексное продолжение обыкновенной винтовой линии. Хоэнберг (Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraublinie. Hohenberg F.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 107—108 (нем.)

8440. О кривой погони с постоянным углом отклонения. Вундерлих (Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel. Wunderlich Walter), Monatsh. Math., 1957, **61**, № 4, 277—311 (нем.)

Рассматривается обобщение известной задачи о кривой погони: в плоскости π цель Q', начиная от точки Q_0, перемещается с постоянной скоростью v_Q по прямой l', преследователь P', начиная от точки P_0, гонится за целью с постоянной скоростью v_P таким образом, что его направление движения образует с направлением на цель в каждый момент времени постоянный угол σ. Ставится вопрос о нахождении k'-траектории точки P', обобщенной кривой погони, и о том, достигнет ли преследователь цель и если да, то когда, где и под каким углом.

Вместо обычного аналитического приема составления и решения соответствующего дифференциального уравнения автор исследует и решает все вопросы геометрическим путем, введя так называемую диаграмму путь-время: от каждой точки искомой кривой k' откладывается по перпендикуляру к π отрезок $z=v_P\tau$, где τ—время, истекшее от начала движения, на полученном цилиндре с основанием k' образуется под углом 45° к плоскости π линия откоса k. Аналогичным изображением l' в пространстве будет прямая l под углом $\nu=\mathrm{arc\,tg}(v_P/v_Q)$ и пересекающая π в точке Q_0. Построение k полностью решает вышепоставленные вопросы.

Если из любой точки O на l как из центра построить k^c центральную проекцию на π кривой k, то любой точке P^c на k^c будет соответствовать касательная $t^c=P^cT^c$, вполне определяемая заданием Q_0, угла σ и d^c окружностью в плоскости π с центром O' (ортогональная проекция O) и радиусом OO'; на d^c лежит точка T^c, являющаяся центральной проекцией бесконечно удаленной точки T касательной t к кривой k в точке P на ней. Показывается, что среди интегральных кривых поля направлений $\{P^c, t^c\}$ будет коническое сечение и выбором точки O на l это коническое сечение можно взять как кривую k^c.

Исследование проективных свойств всякого конического сечения, имеющего с окружностью d^c две общие точки касания, позволяет построить искомое коническое сечение k^c при помощи заданных точек P_0, Q_0, прямой l', угла σ и отношения $v_Q:v_P=\varepsilon$, являющегося эксцентриситетом k^c. Конус Γ с вершиной O и основанием k^c, на котором будет лежать линия откоса k, дважды касается в точках U и V бесконечно удаленной окружности откоса d, образованной точками T; окружность d^c является центральной проекцией d на π. Можно построить аффинитет, переводящий конус Γ, как и его бесконечно удаленное коническое сечение c, в самого себя и оставляющий без изменения касание c с окружностью d, и тогда оказывается, что искомая линия k лежит на некотором цилиндре или конусе 2-го порядка и является специальной „кривой W“ (по Клейну), как траектория некоторой непрерывной, одночленной группы автоморфных аффинитетов $\mathfrak{T}$ бесконечно удаленной окружности. Обобщенная линия погони k' будет являться ортогональной проекцией k на π, причем при $\varepsilon<1$, $\sigma\neq 90°$ линия откоса k попадает в вершину конуса O. Относительной траекторией преследователя в системе цели является параллельная проекция W по направлению l. На плоскости π можно образовать бесчисленное множество кривых, подобных k^c, на конусе получится бесчисленное множество линий, подобных k, с одним и тем же подъемом, им соответствуют подобные линии погони.

В зависимости от величины ε получаются следующие линии погони при $|\sigma|<90°$: $\varepsilon<1$, преследователь достигает цели; $\varepsilon=1$, преследователь достигает цели в бесконечности; $\varepsilon>1$, преследователь не достигнет цели, так как с некоторого момента он удаляется от цели. При $|\sigma|=90°$ преследователь тоже не достигнет цели.

Рассматривается классификация линий погони по отношению к точкам касания U и V конуса Γ и окружности d: $|\sin\sigma|<\varepsilon$, точки U и V действительные и разные; $|\sin\sigma|=\varepsilon$, U и V совпадают; $|\sin\sigma|>\varepsilon$, U и V—сопряженные комплексные; при детальном изучении имеют место восемь действительных типов кривых, если не считать случая обыкновенной линии погони при $\sigma=0$.

В наиболее важном случае, когда $v_P>v_Q>0$ и одновременно $0\leqslant\sin\sigma<\varepsilon<1$, сначала находятся элементы эллипса k^c с эксцентриситетом ε, что позволяет вычислить полное время, за которое достигается цель. Затем составляются уравнения группы преобразований $\mathfrak{T}$, для чего используются координаты точек U, V. Требование, чтобы касательные кривых, порожденных преобразованиями $\mathfrak{T}$, проходили через d, и использование инвариантов Γ и d приводит к простой системе дифференциальных уравнений, а их интегрирование к

уравнениям линии откоса k в косоугольных координатах:

$$\xi=\xi_0\vartheta^{1-n},\quad \eta=\eta_0\vartheta^{1+n},\quad \zeta=\zeta_0\vartheta,$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты точки P_0, параметр ϑ изменяется на отрезке $1\geqslant\vartheta\geqslant 0$, постоянное $n=w/\cos\sigma<1$, $w=\sqrt{\varepsilon^2-\sin^2\sigma}$; уравнения линии погони с углом отклонения σ:

$$2w^2\cdot x=-(\xi+\eta)\sin\sigma+2\varepsilon\zeta,\quad 2w\cdot y=\eta-\xi.$$

Аналогичные построения и исследования проводятся во всех других случаях. В. С. Люкшин

8441. Кривые преследования. II. Бернхарт (Curves of pursuit. II. Bernhart Arthur), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 49—65 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 3234.

Рассматриваются кривые преследования в том частном случае, когда преследуемая точка движется по окружности и отношение скоростей движения преследуемой точки к скоростям движения преследующей точки постоянно. Излагаются подробно исторические сведения, приводятся различные формы систем дифференциальных уравнений движения преследующей точки, а также изучается кривизна кривой преследования и ее асимптотическое поведение при $t\to\infty$.

В. И. Ведерников

8442. Геометрическая характеристика некоторой системы ∞^5 кривых на V_3 Тантурри (Caratterizzazione geometrica di alcuni sistemi ∞^5 di curve sopra una V_3. Tanturri Giuseppe. Univ. Politecn. Torino, Rend. Sem. mat., 1953, **12**, 177—194) (итал.)

8443. Основные точки в плоской кинематике. Стюард (The cardinal points in plane kinematics. Steward G. C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh. Univ. Edinburgh, 1958, 146 (англ.)

Определено счетное множество основных (кардинальных) точек, которое одной своей конфигурацией полностью определяет все свойства пути любой точки или системы точек, или огибающую любой кривой, фиксированной на плоскости, которая подвергается компланарному движению: свойство, аналогичное свойству гауссовых основных точек в элементарной теории симметричных оптических систем. Таким образом, мы имеем простой и компактный синтез всей области плоской кинематики. Более ранние исследования Чебышева, Шёнфлиса, Бурместера и других связаны с конфигурацией основных точек. К. М. Белов

8444. Особые соответствия, установленные параллелизмом касательных плоскостей двух поверхностей. Дрэджилэ (Correspondances singulières par parallélisme des plans tangents des deux surfaces. Drăgilă Pavel), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 518—521 (франц.)

В сообщении приводятся примеры пар поверхностей трехмерного пространства с соответствием параллелизма касательных плоскостей для случая, когда сеть параллелизма сводится к одному семейству асимптотических, что неосновательно рассматривается автором (равно как и случай комплексно-сопряженной сети параллелизма) как опровержение известной теоремы Петерсона. В. В. Рыжков

8445. Исследования поверхностей Дарбу, связанных с бесконечно малыми изгибаниями поверхностей квазисдвига. Бауман (Untersuchungen über den Darbouxschen Flächenkranz von Quasi—Rückungsflächen. Baumann Richard), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957 (1958), 65—91 (нем.)

Каждое бесконечно малое изгибание определяет по Дарбу 12 поверхностей, между которыми существует точечное соответствие попеременно либо с ортогональными линейными элементами, либо с параллельными касательными плоскостями.

Поверхности Дарбу изучаются в статье для частного случая, именно для поверхностей квазисдвига, введенных Зауэром (это поверхности, у которых асимптотические линии проектируются на плоскость в сеть переноса), а также для поверхностей, у которых касательные к асимптотическим одного семейства, вдоль асимптотических второго семейства, принадлежат линейным комплексам. Я. П. Бланк

8446. О внутренних римановых геометриях постоянной кривизны на поверхностях проективного пространства. Тевзадзе Г. Н., Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1955, **56**, 145—171 (рез. груз.)

Рассматриваются такие нормализации, которые индуцируют на поверхностях трехмерного проективного пространства внутренние римановы геометрии постоянной кривизны, равной или не равной нулю. Наряду с новыми выводами известных ранее результатов, решены некоторые вопросы частного характера.

А. П. Норден

8447. О замкнутых геодезических. Бляшке (Sulle geodetiche chiuse. Blaschke Wilhelm), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 2, 240—247 (итал.; рез. англ.)

Краткий обзор исследований по теории замкнутых геодезических. Вначале приводятся шесть известных эквивалентных между собой определений геодезической линии „в малом". Затем рассматриваются глобальные свойства геодезических. Пусть S — овалоид. Его противоположными точками называются точки, обладающие тем свойством, что каждая геодезическая, проходящая через одну из них, проходит и через другую. До сих пор остается нерешенной проблема: является ли сфера единственным овалоидом, для которого соответствие противоположных точек является инволюцией? Доказано, что такое соответствие есть всегда изометрия, а овалоид, на котором это имеет место, необходимо имеет центр. Функ (P. Funk) в 1923 г. доказал, что при изгибании сферы противоположные точки могут перестать быть противоположными. Каратеодори нашел поверхности Лиувилля, имеющие пары противоположных точек. Каратеодори же высказал предположение, что каждый овалоид содержит по крайней мере одну пару противоположных точек. Автор высказывает сомнение в истинности этого предположения. В пример приводится вырожденный овалоид, за каковой можно считать дважды считаемую область, ограниченную некоторым овалом. Тогда каждая геодезическая будет представлять собой ломаную, состоящую из хорд овала, из которых каждые две соседние пересекаются на контуре под равными углами к нормали к нему. Если такой овалоид содержит противоположные точки, то овал необходимо должен быть эллипсом, а указанные точки совпадают с его фокусами. Дарбу определил овалоиды вращения, у которых все геодезические являются замкнутыми. Томсен перенес этот результат на поверхности, не являющиеся поверхностями вращения. Высказывается элементарное соображение о существовании на каждом овалоиде замкнутой геодезической. С такой линией совпадает минимальная замкнутая нерастяжимая нить при протягивании через нее овалоида. Приводится теорема, доказанная А. В. Погореловым: Если гауссова кривизна в каждой точке овалоида удовлетворяет условию $K\leqslant 1$, то минимальная длина замкнутой геодезической на нем $L_0\geqslant 2\pi$. Клингенбергу удалось распространить это неравенство на компактное пространство Римана. Приводится краткое доказательство теоремы о существовании на каждом овалоиде замкнутой геодезической без двойных точек, доказанной впервые Пуанкаре в 1905 г. Поясняется предложение о существовании на каждом овалоиде трех замкнутых гео-

дезических. На поверхности с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ всякая линия $y = ax + b$ есть геодезическая. Эта геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда a — рационально. Если поверхность несет гиперболическую метрику, то, беря для этой метрики карту Пуанкаре на полуплоскости $y > 0$, мы можем на этой последней задать каждую геодезическую полуокружность двумя точками x, x' ее пересечения с прямой $y = 0$. С помощью преобразований, не влияющих на дальнейшие результаты, всегда можно добиться того, чтобы $x > 0, -1 < x' < 0$. Разложим x и x' в цепные дроби $x = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $-x' = (0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots)$. Следовательно, с каждой геодезической можно сопоставить цепь $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$, и наоборот. Перенося это на исходную поверхность, мы заключим, что геодезическая на ней будет замкнута тогда и только тогда, когда цепь — периодическая $a_{k+m} = a_k$. Эти результаты получены Артином (E. Artin) по внушению Герглотца (G. Herglotz). Отмечаются особые заслуги русских геометров. Н. И. Кованцов

8448. **Об основах интегральной геометрии. Видаль-Абаскаль** (Über die Grundlagen der Integralgeometrie. Vidal Abascal E. Mem. Real Acad. Cienc. exact., fis. nat., 1953, **4**, № 4, 29 p.) (исп.)

Доказывается несколько теорем о геодезических линиях на поверхности, основанных на известных формулах вариационного исчисления. W. Blaschke

Перевод из Zbl. Math., 1955, **52**, № 1-5, 186.

8449. **Кривизна и кручение геодезических линий на линейчатых развертывающихся поверхностях. Макарова З. Т.**, Тр. Ростовск.-н/Д. ин-та с.-х. машиностр., 1957, вып. 8, ч. 1, 357—361

В работе из известных формул дифференциальной геометрии получено, что на развертывающихся поверхностях кривизна k и кручение τ геодезической линии связаны уравнением $k/\tau = \operatorname{tg}\theta$, где θ — угол между геодезической линией и прямолинейной образующей. Также даны уравнения, выражающие кривизну и кручение геодезической через кривизну, кручение и длину дуги ребра возврата развертывающейся поверхности.

П. Ю. Катилюс

8450. **К теории конгруэнций прямых. Швец** (Sulla teoria delle congruenze di rette. Švec Alois), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 3, 446—457 (итал.; рез. англ.)

Некоторые результаты, полученные в последнее время в Чехословакии Чехом и Швецом по теории конгруэнций прямых и их фокальных поверхностей, были изложены автором в 1957 г. на конференциях Института геометрии Л. Кремоны при Болонском университете. В этой статье дается сводка результатов, изложенных на конференциях.

Большинство этих результатов изложено в других работах автора (См. РЖМат, 1957, 2628, 4322, 5130, 5131, 8281, 8900; 1958, 670, 671). К. И. Гринцевичюс

8451. **О поверхности комплекса, связанного с евклидовым винтовым движением. Штрубеккер** (Über Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen. Strubecker Karl), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 4, 297—323 (нем.)

Рассматривается совокупность касательных к траекториям винтового движения, ось которого совпадает с осью z и параметр равен 1. Эта совокупность представляет собой квадратичный комплекс $\mathfrak{K}$ с характеристикой Сегре [(11), (22)], который изучался автором и Фрей в работе „Теория преобразований квадратичного линейчатого комплекса [(11), (22)]“ (РЖМат, 1957, 7313, 7314). Уравнения луча этого комплекса могут быть записаны в комплексной форме

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha), \quad z = z_0 + \alpha,$$

где $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка винтовой линии, касательной к которой является этот луч, α — параметр точки на луче и i — мнимая единица. Этот луч может быть представлен также двойственным образом при помощи тангенциальных координат.

Рассматриваются кривые, принадлежащие комплексу $\mathfrak{K}$, уравнения которых имеют вид

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^m, \quad z = z_0 + m\alpha,$$

где α — снова параметр, а m — некоторое постоянное действительное число — кривые k_m, и двойственные им однопараметрические семейства плоскостей — торсы k^*_m, а также поверхности, параметрические уравнения которых имеют вид

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n, \quad z = z_0 + m\alpha + n\beta,$$

несущие на себе два семейства кривых, принадлежащих комплексу $\mathfrak{K}$, и двойственные им двупараметрические семейства плоскостей.

Эти геометрические образы обладают рядом интересных свойств. Например, соприкасающиеся плоскости кривой k_m образуют торс k^*_{2-m}, а совокупность плоскостей, касательных к поверхности $\Pi_{m,n}$, — двупараметрическое семейство плоскостей $\Pi^*_{1-m,1-n}$ и т. п. Далее, совокупность касательных к траекториям винта в точках некоторой кривой k_m образует развертывающуюся поверхность $\Pi_{m,1}$, ребром возврата которой будет кривая k_{m+1}, и т. п. Совокупность касательных к траекториям винта в точках поверхности $\Pi_{m,n}$ образует конгруэнцию, фокальными поверхностями которой являются поверхности $\Pi_{m+1,n}$ и $\Pi_{m,n+1}$, а ее развертывающиеся поверхности пересекают поверхность $\Pi_{m,n}$ по линиям k_m и k_n. Наконец, линии k_m и k_n образуют на поверхности $\Pi_{m,n}$ сопряженную сеть и касательные к линиям k_m образуют конгруэнцию, второй фокальной поверхностью которой будет поверхность $\Pi_{m-1,n+1}$, а касательные к линиям k_n — конгруэнцию со второй фокальной поверхностью $\Pi_{m+1,n-1}$. Отдельно рассматривается случай симметричных поверхностей $\Pi_{m,m}$.

В заключение автор рассматривает поверхность $\Pi_{1/2,1/2}$, которая оказывается гиперболическим параболоидом $z = xy$. Применение к ней развитой выше теории позволяет доказать ряд предложений, часть из которых другим, более сложным, путем была получена Берайсом и Браунером (РЖМат, 1958, 5115).

При исследовании применяются введенные в упомянутой работе автора и Фрей проективные и непроективные автоморфизмы комплекса $\mathfrak{K}$. М. А. Акивис

8452. **Об основании проективной дифференциальной геометрии. Эйбиан** (On foundations of projective differential geometry. Abian Smbat), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I., 1957, **3**, № 1-2, 77—124 (англ.; рез. русск., рум.)

Рассматривается система $n \geqslant 2$ обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений порядка $m \geqslant 2$ с n зависимыми вещественными переменными y_i и одним независимым переменным x, меняющимся в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$y_i^{(m)} + \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{qij}(x)\, y_j^{(m-q)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где

$$y_i^{(t)} = \frac{d^t}{dx^t} y_i, \; y_i^{(0)} = y_i$$

и A_{qij} суть функции от x, обладающие рядом производных.

Задаются, далее, точечные преобразования

$$y_i = \sum K_{ij}(x)\, \bar{y}_j \quad \bar{x} = \xi(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

которые преобразуют систему (1) в другую систему той же самой формы, где y_j — новые зависимые переменные, а $\tilde{x}$ новый аргумент; K_{ij}, ξ — функции, обладающие производными, причем определитель

$$|K_{ij}(x)|, \quad ij = 1, 2, \ldots, n,$$

не обращается в нуль при изменении x в интервале $[x_1, x_2]$.

Показывается, что существуют функции коэффициентов $A_{qij}(x)$ системы (1) и их производных, которые сохраняют свой вид, когда система (1) подвергается преобразованию (2). Это так называемые инварианты. В том случае, когда эти функции, наряду с $A_{qij}(x)$ и производными от них содержат также и $y_i(x)$ с их производными, они являются ковариантами. Рассматривается также и частный случай преобразования (2), когда преобразованию подвергаются только зависимые переменные, аргумент же x остается неизменным. В этом случае инварианты и ковариантны именуются полуинвариантами и полуковариантами соответственно.

В работе широко используется матричный счет; при этом определяется как число независимых полуинвариантов и полуковариантов, так и число независимых инвариантов и ковариантов. Для пояснения общих положений приведен ряд иллюстрирующих примеров. Работа относится к области проективной дифференциальной геометрии. Библ. 19 назв. В. А. Яблоков

8453. Поверхностные элементы второго порядка с заданным центром. Лонго (Le calotte del secondo ordine di S_3, con centro assegnato. Longo Carmelo), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 1-3, 49—58 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается множество всех поверхностных элементов второго порядка с заданным центром (а также с заданным центром и фиксированной касательной плоскостью и множество параболических элементов с данным центром) и представляющие его алгебраические многообразия в духе соответствующих работ Бомпиани.

Так как при заданных a_i, a_{jk} все квадрики линейной серии $a_i x = (a_{jk} + p_j a_k) x^j x^k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, с параметрами p_j представляют один и тот же поверхностный элемент второго порядка, то, применяя изображение квадрик гиперплоскостями в R_9, автор получает представление элементов в виде R_5, соответствующих указанным линейным сериям квадрик, и получает затем новым путем представление, ранее найденное Бомпиани.

В грассмановом многообразии всех R_5 данного R_9 определяется тем самым V_5, образованное теми R_5, которые представляют какой-либо поверхностный элемент σ_2. Устанавливается, что это V_5 есть V_5^{61}. Для множества параболических элементов аналогичным образом строится многообразие V_4^{21}. Эти V_5^{61} и V_4^{21} характеризуются как минимальные модели соответствующих совокупностей σ_2 среди всех V_5 и V_4, им бирационально эквивалентных. В. В. Рыжков

8454. Характеристика кривых n-го порядка в n-мерном проективном пространстве. Хаупт (Zur Kennzeichnung der Kurven n-ter Ordnung im n-dimensionalen projektiven Raum. Haupt Otto. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 289—299) (нем.)

8455. Кривые Цицейка в проективной геометрии. Георгиу Г. Т., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 169—187

Рассматриваются кривые Цицейка, т. е. асимптотические линии поверхности Цицейка (так называются поверхности, на которых отношение метрической кривизны к расстоянию от начала координат до касательной плоскости есть величина постоянная). Центроаффинное определение таких линий дано Цицейка, аффинное — Майером. Автор дает проективные свойства этих кривых, такие, которые могут считаться их определением. С этой целью строятся аффинные и проективные инварианты кривой, последние выражаются через первые и, используя аффинные свойства кривых Цицейка, делаются выводы с проективной точки зрения. В частности, кривые, найденные Фубини и Чехом, для которых нормальные координаты являются в то время и декартовыми, оказывается являются кривыми Цицейка и это свойство характеризует их с проективной точки зрения. В. И. Коровин

8456. О прямых канонического пучка. Тевзадзе Г. Н., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 18, № 5, 513—519 (груз.)

8457. О релятивно минимальной поверхности. Хиракава (On the relative minimal surface. Hirakawa Junkō), J. Math., 1953, **1**, № 2-3, 67—70 (англ.)

В трехмерном евклидовом пространстве фиксируется поверхность $\mathfrak{f}(u^1 u^2)$ в качестве единичной и рассматриваются поверхности, отображающиеся на нее с параллелизмом касательных плоскостей. Вектор $-f = \mathfrak{x}$ называется r-нормалью поверхности $r(u^1, u^2)$. „Псевдо r-линейный элемент“ поверхности $r(u^1, u^2)$ определяется формулой

$$dS^2 = Q^2 \bar{g}_{ij}\, du^i\, du^j \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

где $Q = \left| \mathfrak{x}, \frac{\partial r}{\partial u^1}, \frac{\partial r}{\partial u^2} \right| (\det \| \bar{g}_{ij} \|)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\bar{g}_{ij} = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j} \right)$$

„r-фундаментальная квадратичная форма второго рода“ определяется равенством

$$D_{ik} du^i du^k = -\left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^k} \right) du^i du^k$$

и „r-средняя кривизна“ $H = \frac{1}{2} D_{ik} \bar{g}^{ik}$. „$r$-площадь поверхности“ равна $\iint Q (\det g_{ij})^{1/2}\, du^i\, du^j$.

Доказано, что для обращения в нуль вариации „r-площади поверхности“ необходимо и достаточно, чтобы $H = 0$. Получен ряд теорем, аналогичных известным теоремам о минимальных поверхностях; например, теорема: „r-асимптотические“ линии „r-минимальной поверхности“ образуют ортогональную сеть. Приведен пример релятивно минимальной поверхности. Д. В. Беклемишев

8458. Метрическая характеристика конгруэнций окружностей, обладающих семействами каналовых поверхностей. Гейдельман Р. М., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 281—284

С конгруэнцией окружностей трехмерного евклидова пространства связана прямолинейная конгруэнция осей этих окружностей. В работе доказывается, что если конгруэнция окружностей обладает одним или двумя семействами каналовых поверхностей, то ее каналовые поверхности соответствуют развертывающимся поверхностям связанной с ней конгруэнции осей, а соответствующие фокусы осей являются центрами сдвоенных фокальных сфер конгруэнции окружностей. В частности, если конгруэнция окружностей является циклической системой Рибокура, то, так как сдвоенные фокальные сферы такой конгруэнции ортогональны, отсюда получается известная теорема о том, что окружность этой конгруэнции лежит на сфере, диаметром которой является фокальный отрезок оси окружности (Фиников С. П., Теория конгруэнций, М. — Л., 1950, стр. 108).

Далее доказывается, что к произвольной конгруэнции осей можно с произволом одной функции двух аргументов и одной функции одного аргумента присоединить

конгруэнцию окружностей так, чтобы она имела одно семейство каналовых поверхностей, и с произволом двух функций одного аргумента присоединить конгруэнцию окружностей так, чтобы она имела два семейства каналовых поверхностей. М. А. Акивис

8459. О конгруэнциях сфер Рибокура. Дершен (Sur les congruences de sphères de Ribaucour. Derchain C., Mlle), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, 27, № 11-12, 272—279 (франц.)

Пусть (M) — поверхность (не развертывающаяся и не сфера), отнесенная к параметрам u, v линий кривизны, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в точке M поверхности, а M_u, M_v — соответствующие центры кривизны.

Обращаясь к однородным координатам, автор вводит точки M_u^*, M_v^*, геометрически совпадающие с центрами M_u, M_v:

$$M_u^* = \frac{1}{g(R_1 - R_2)} M_u, \quad M_v^* = \frac{1}{e(R_2 - R_1)} M_v,$$

где $e = \sqrt{E}/R_1$, $g = \sqrt{G}/R_2$.

Точки M_u^*, M_v^* входят в бесконечную последовательность Лапласа:

$$\ldots M_{un}^*, \ldots, M_{u1}^*, M_u^*, M_v^*, M_{v1}^*, \ldots, M_{vn}^*, \ldots \quad (m)$$

(слева направо преобразования в направлении u).

Автор рассматривает конгруэнцию сфер, предположив, что поверхность (M) служит одной из полостей огибающей совокупности ∞^2 сфер. Радиус R порождающей сферы задается функцией параметров u, v точки прикосновения сферы к полости (M). Ставится еще требование: линии кривизны второй полости $(\overline{M})$ огибающей должны соответствовать линиям кривизны первой полости (M), так что в результате сферы образуют конгруэнцию Рибокура. Случаи вырождения $(\overline{M})$ в кривую или совпадения с (M) исключаются.

Линии u, v на поверхности (C) центров сфер составляют сопряженную сеть. R выражается через R_1 и R_2:

$$R = \frac{\lambda R_1 - \mu R_2}{\lambda - \mu} \quad (\lambda \neq \mu \neq 0).$$

Вводятся λ^*, μ^*:

$$\lambda^* = \frac{1}{e(R_2 - R_1)} \lambda, \quad \mu^* = \frac{1}{g(R_1 - R_2)} \mu.$$

Центр C сферы геометрически совпадает с точкой C^*:

$$C^* = \lambda^* M_u^* - \mu^* M_v^*,$$

которая входит в последовательность Лапласа, вписанную в последовательность (m). Отмечаются частные случаи. К. Н. Тихоцкий

8460. Характеристические аналлагматические свойства изотермических поверхностей. Баккес (Une propriété anallagmatique caractéristique des surfaces isothermiques. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, 44, № 2, 94—100 (франц.)

Пусть точка M описывает поверхность (M), а точки C_1 и C_2 — поверхности ее главных центров кривизны. Если характеристические точки сферы, имеющей диаметром отрезок C_1C_2 нормали к поверхности (M), инверсионны относительно касательной сферы S поверхности (M), то последняя имеет постоянную среднюю кривизну. Справедливо и обратное утверждение. Вторая характеристическая точка M' сферы S также лежит на нормали C_1C_2, причем $(MM'C_1C_2) = -1$. Сфера S', касательная к поверхности M, имеющая центром точку M', называется гармонической. Сферы, касательные к поверхности с центрами в точках C_1 и C_2, называются главными. Если характеристические точки сферы, касательной к главным сферам в точках, где они пересекают нормаль к поверхности (M), инверсионны относительно касательной сферы к поверхности (M), то эта сфера — гармоническая, а поверхность (M) — постоянной средней кривизны. Справедлива и обратная теорема. Если характеристические точки сферы, касательной к главным сферам в точках, где последние пересекают круг, нормальный к поверхности, описывающий циклическую систему, инверсионны относительно сферы, касательной к поверхности, то эта касательная сфера — гармоническая, а поверхность — изотермическая. Обратно, для всякой изотермической поверхности существует нормальный круг, описывающий циклическую систему, такой, что характеристические точки сферы, касательной к главным сферам, в точках, где последние пересекают нормальный круг, инверсионны относительно гармонической сферы. Р. М. Гейдельман

8461. О двупараметрическом семействе сфер, характеристические точки которых лежат на некоторой окружности. Баккес (Sur les sphères à deux paramètres dont les points caractéristiques sont répartis sur un cercle. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 2, 153—162 (франц.)

Методом подвижного пентасферического репера получены уравнения, определяющие двупараметрическое семейство сфер с характеристическими точками на окружности, описывающей конгруэнцию, сферические фокальные семейства которой соответствуют линиям кривизны на огибающей двупараметрического семейства сфер. А. М. Березман

8462 К. Сочинения. Т. 4. Часть 1. Изгибание квадрик, теория преобразования поверхностей, наложимых на квадрики. Бианки (Opere. Vol 4. Parte 1. Deformazioni delle quadriche, teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. Bianchi Luigi. Roma, Ed. Cremonese, 1956, 481 p., 4500 L.) (итал.)

8463 Д. Теория комплексов. Кованцов Н. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, Запорожье, 1958

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8464. Об асимптотах в метрическом пространстве неположительной кривизны. Насу (On asymptotes in a metric space with non-positive curvature. Nasu Yasuo), Tohoku Math. J., 1957, 9, № 1, 68—95 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — G-поверхность неположительной кривизны в смысле Буземана, гомеоморфная евклидову пространству, из которого выколоты k точек. $K(l)$ обозначается множество всех точек поверхности, асимптотически сопряженных лучу l. Доказывается, что для всякого луча l число колучей, выходящих из некоторой точки, не превосходит $k+1$. Кроме того, из каждой точки множества $K(l)$ выходят по крайней мере две асимптоты к l. Далее предполагается, что для всякой точки $p \in \mathfrak{R}$ существуют локально дифференцируемые окружности с центром в p в смысле Буземана. Доказывается, что тогда отношение между лучами и колучами является симметрическим и транзитивным. Для всякого луча l множество $K(l)$ замкнуто и распадается на конечное число попарно непересекающихся кривых. Каждая из этих кривых имеет конечное число точек ветвления, и число ветвей в каждой точке равно числу асимптот к l, выходящих из этой точки. А. Л. Онищик

8465. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Рыжков В. В., Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, 7, 179—226

Два направления δ_1 и δ_2 на n-мерной поверхности аффинного пространства E_N называются сопряженными, если $\delta_1\delta_2 x$ лежит в касательной плоскости E_n. Это определение распространяется на направления произвольной размерности. Направления E_p и E_q сопряже-

ны на $\{x\}$, если сопряжены любые δ и δ', соответственно принадлежащие E_p и E_q.

Направления $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_r}$ образуют сопряженную систему $S\{E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_r}\}$, если они попарно сопряжены и изолированы. Асимптотическое, т. е. самосопряженное направление E_s, также считается сопряженной системой. Сопряженная система $S\{E^a_{p_0}, E_{p_1}, \ldots, E_{p_r}\}$, где $E^a_{p_0}$ — асимптотическое, называется полной, если $2p_0 + p_1 + \ldots + p_r \geqslant n$. Если линейная оболочка направлений $E^a_{p_0}, E_{p_1}, \ldots, E_{p_r}$ совпадает со всем E_n и $p_0 > 0$, то поверхность тангенциально вырождается. Сопряженная система голономна, если E_{p_α} огибают координатные подповерхности.

Голономная сопряженная система $S\{E_{p_1} \ldots E_{p_r}\}$ называется расслояемой, если для любой пары Ep_i, Ep_j $d_{Ep_i} d_{Ep_j} x$ принадлежит (E_{pi}, E_{p_j}), и вполне расслояемой, если для любой пары направлений δ_1, δ_2, принадлежащих различным E_{p_i}, $\delta_1\delta_2 x$ лежит в $(\delta_1 x, \delta_2 x)$. Условие полной расслояемости сопряженной системы равносильно требованию существования преобразований Лапласа для любой голономной пары направлений, принадлежащих двум различным E_{p_i}. Доказывается, что для существования на поверхности $\{x\}$ полной сопряженной системы направлений достаточно, чтобы поверхность удовлетворяла уравнению

$$[\omega^\alpha, dx_\alpha] = \sigma^\alpha x_\alpha . \qquad (1)$$

Поверхность, допускающая преобразования Петерсона, отличные от подобного, несет полную сопряженную систему.

Если на поверхности имеется полная сопряженная система $\{E^a_{p_0}, E_{p_1}, \ldots, E_{p_r}\}$, где $p_0 \leqslant 1$, то поверхность удовлетворяет нетождественному уравнению вида (1). Эта теорема верна и для $p_0 = 2$, если дополнительно потребовать, чтобы асимптотическое E^a_2 не было асимптотическим высшего порядка ($d^3_{E^a_2} x \not\equiv 0$).

Доказывается теорема: Если размерность соприкасающейся плоскости поверхности $\{x\}$, несущей полную сопряженную систему $S\{E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_r}\}$, имеет максимальное значение, то сопряженная система вполне расслояема.

Произвольная n-сопряженная система допускает преобразования Петерсона с произволом в n функций одного аргумента. Для конических и цилиндрических систем уравнения, определяющие преобразования Петерсона, интегрируются.

Определяются синтетически и аналитически все поверхности, несущие системы, обладающие тем свойством, что на двумерных поверхностях (u^i, u^j) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ линии u^i, u^j образуют конические системы. Исследуются преобразования Лапласа таких обобщенных конических систем. Преобразование Лапласа в сторону линий u^i, соответствующее линиям u^j, не зависит от u^j и несет полную сопряженную систему, образованную $n - 1$ линиями.

Всякая поверхность с вполне расслояемой сопряженной системой $S\{E_1, E_{n-1}\}$ определяется уравнениями

$$x_k = U_k(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}) + \int_{v_0}^{v} h(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}, v) V_k dv \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Выводятся также уравнения поверхности, несущей вполне расслояемую сопряженную систему $S\{E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \ldots, E_1^{(p)}, E_{n-p}\}$ с одной многомерной компонентой, а также поверхности, несущей полную вполне расслояемую систему $S\{E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_r}\}$, $p_\alpha > 1$. Получены конечные уравнения всех поверхностей, несущих вполне расслояемые системы с двумя многомерными и одной одномерной компонентами. Решается вопрос о существовании вполне расслояемых сопряженных систем с заданным числом компонент наперед указанных размерностей и о существовании преобразований Петерсона у вполне расслояемых сопряженных систем. Я. П. Бланк

8466. Проблема Коши в многомерной дифференциальной геометрии. II. Существование и однозначность специальных многообразий. Лейхтвейс (Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. II. Existenz und Eindeutigkeit spezieller Mannigfaltigkeiten. Leichtweiss Kurt), Math. Ann., 1956, **132**, № 1, 1—16 (нем.)

Вторая часть статьи автора (РЖМат, 1957, 1757). Доказывается теорема: Через заданную аналитическую $(m-1)$-мерную полосу ($(m-1)$-мерная поверхность, в каждой точке которой задана касательная m-мерная плоскость) в римановом n-мерном пространстве $V_n (n > m)$ проходит единственная аналитическая m-мерная поверхность с заданным вектором средней кривизны (Схоутен — Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II, М., 1948, стр. 99). Из этой теоремы как следствие вытекает: Через произвольную аналитическую $(m-1)$-мерную полосу в V_n проходит точно одна аналитическая минимальная m-мерная поверхность; что решает обобщенную задачу Бьёрлинга о минимальных поверхностях. m-мерная поверхность в аффинном n-мерном пространстве называется p-торсом, если совокупность ее касательных m-мерных плоскостей зависит точно от p параметров. Автор доказывает для любых целых p, m, n таких, что $1 \leqslant p < m < n$, теорему: Существует нетривиальный m-мерный p-торс. („Тривиальным" торсом в статье называется многомерное обобщение цилиндрической или конической поверхности.) Все результаты автора носят локальный характер. А. Е. Либер

8467. Проблема Коши в многомерной дифференциальной геометрии. III. Натуральные уравнения. Лейхтвейс (Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. III. Natürliche Gleichungen. Leichtweiss Kurt), Math. Ann., 1956, **132**, № 3, 201—245 (нем.)

Третья часть статьи автора (реф. 7241), в которой используются методы и результаты, полученные в предыдущих частях. В этой части ставится задача — охарактеризовать поверхность в многомерном пространстве с помощью „натуральных уравнений", т. е. соотношений между инвариантами поверхности и специальными параметрами, подобно тому, как кривая на плоскости характеризуется соотношением между кривизной и длиной дуги. Так как во всех рассматриваемых автором случаях на поверхности определяется риманова метрика, то в качестве специальных параметров автор использует полугеодезические координаты. Прежде всего автор показывает, что для аналитической гиперповерхности в римановом пространстве „натуральное уравнение" получается из одного инварианта, в качестве которого берется дробно-линейная функция от элементарных симметрических функций, составленных

из главных кривизн гиперповерхности. Затем подобного рода „натуральное уравнение" получено для относительной геометрии пары гиперповерхностей аффинного пространства, откуда, в частности, вытекает „натуральное уравнение" для гиперповерхности в аффинном пространстве. В заключение автор указывает „натуральные уравнения" для всякой аналитической m-мерной поверхности в евклидовом n-мерном пространстве (главный результат). Чтобы составить эти уравнения, автор строит полную систему независимых инвариантов поверхности, которые получены на алгебраическом пути из фундаментальных тензоров рассматриваемой m-мерной поверхности. Обращение в нуль всех нетривиальных инвариантов указанной системы характеризует m-мерную плоскость. А. Е. Либер

8468. О теореме Егорова-Яно. Хуан Чжэн-чжун (Hwang Cheng-chung), Нанцзин дасюэ сюэбао, Acta Scient. Univ. Nankinensis., 1956, № 4, 13—24 (кит.; рез. англ.)

Автор дает другое доказательство так называемой Егорова-Яно теоремы: n-мерное собственно риманово пространство V_n допускает группу движений порядка $n(n-1)/2+1$, $n \geqslant 4$, тогда и только тогда, если V_n — пространство постоянной отрицательной кривизны или же если V_n — произведение прямой линии и $(n-1)$-мерного пространства постоянной кривизны (Егоров И. П., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 4, 182—183). Метод доказательства тот же самый, что у Кручковича (РЖМат, 1957, 5899), который рассматривал случай $n = 3$. G. Wu

8469. О конформной эквивалентности римановых многообразий, на которых задана внешняя форма. Кларк (On conformal equivalence of riemannian manifolds which admit an exterior form. Clark R. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59** № 2, 198—203; Indagationes math., 1956, **18**, № 2, 198—203 (англ.)

Если на римановом многообразии n измерений задана внешняя p-форма f, коэффициенты которой удовлетворяют в пределах заданной координатной окрестности условию $f_i^{k_1 \ldots k_{p-1}} f_{jk_1 \ldots k_{p-1}} = g_{ij}$, где g_{ij} — метрический тензор, то многообразие называется $V(n, p)$. Если форма является соответственно замкнутой, козамкнутой, гармонической, то оно называется $S(n, p)$, $S^*(n, p)$, $H(n, p)$. Если ковариантная производная соответствующего кососимметрического тензора, т. е. $f_{i_1 \ldots i_p}$, есть нуль, то оно представляет собой $K(n, p)$, и если $R^i_{jkl} = f_j^{ih_2 \ldots h_p} S_{klh_2 \ldots h_p}$, то оно будет $G(n, p)$. Примеры некоторых из этих многообразий при $p = 2$ получаются в случае почти комплексной, симплектической и келеровой структур; группа Ли есть $G(n, 3)$.

Введя эти определения, автор определяет для $V(n, p)$ некоторые конформные инварианты, в терминах которых он дает необходимые и достаточные условия того, что $V(n, p)$ конформно $S(n, p)$, $S^*(n, p)$ и т. д.

Большинство из них справедливы не только локально, но также и в целом, если фундаментальная группа многообразия не содержит элементов с бесконечным периодом. W. M. Boothby

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 149.

8470. Об обобщенных особых аффинных плоскостях. Фадини (Su particolari piani affini generalizzatti. Fadini Angelo. Ricerca, Riv. Mat. pur. appl., 1954, **5**, № 1-2, 57—64) (итал.)

8471. Евклидовы модели вариационных метрик. Буллиган (Modèles euclidiens de métriques variationnelles. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 3, 345—347 (франц.)

Намечено доказательство того, что всякая вариационная метрика на плоскости, имеющая выпуклую центральную индикатрису, представима в виде $\mu(u, v, du, dv) = \int_0^{2\pi} |\sin\alpha \cdot du - \cos\alpha\, dv|\, df(\alpha, u, v)$, где f при фиксированных u и v является неубывающей функцией от α. Индикатриса такой метрики задается в плоскости координат x, y уравнением $\int_0^{2\pi} |x\sin\alpha - y\sin\alpha|\, df = 1$. Рассматриваются также метрики, которые задаются аналогичным интегралом с ядром вида

$$\sqrt{\sin^2\alpha \cdot du^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\varepsilon \cdot du dv + \cos^2\alpha \cdot dv^2}.$$

А. Л. Онищик

8472. О тензорных связностях для контравариантных и ковариантных тензоров m-го порядка. Мастроджакомо (Sulle connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti m-pli. Mastrogiacomo Pasquale), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 2, 305—321 (итал.)

Тензорные связности, относящиеся к тензорам второго порядка, были введены Бомпиани (Bompiani E., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur., ser. 8, 1946, **1**, fasc. 5), а затем изучены и обобщены на случай смешанного тензора второго порядка Коссу (Cossu A., РЖМат, 1957, 854, 857; 1958, 10258). В настоящей работе понятие тензорной связности распространяется на случай контравариантного (или соответственно ковариантного) тензора m-го порядка. Объект тензорной связности вводится, исходя из строения выражения ковариантного дифференциала, от которого требуется, чтобы он был тензором того же рода и, кроме дифференциала тензора, содержал линейную комбинацию компонент этого же тензора. Так, для контравариантного тензора $\xi^{i_1 \ldots i_m}$ имеем $D\xi^{i_1 \ldots i_m} = d\xi^{i_1 \ldots i_m} + \mathcal{L}^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_m l} \xi^{j_1 \ldots j_m} dx^l$. Из этих требований легко устанавливается закон преобразования компонент объекта тензорной связности $L^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_m l}$ и его выражение через объект какой-либо обычной (векторной) аффинной связности, через символы Кронекера и тензорное слагаемое. Автору, по-видимому, была неизвестна работа Георгиу (РЖМат, 1958, 10251), в которой вводится аналогичный, но более общий объект, относящийся к смешанному тензору произвольного порядка. Далее автор отыскивает условия, налагаемые на объект связности, при которых ковариантный дифференциал сохраняет характер симметрии или антисимметрии исходного контравариантного (соответственно ковариантного) тензора. Это приводит к рассмотрению двух тензоров Ф и Ψ, выражающихся через тензорную связность, которые используются при образовании двух специальных тензорных связностей, получающих определенное геометрическое истолкование. Из тензорной связности можно получить путем соответствующего свертывания некоторую векторную связность. Автор устанавливает условия того, что данная тензорная связность выводима из этой векторной. В заключение рассматривается примечательный класс тензорных связностей, выводимых из серии векторных связностей $\overset{a}{L}{}^i_{jk}$ $(a = 1, \ldots, m)$, аналогично задаче, рассмотренной Коссу в случае $m = 2$ (РЖМат, 1958, 10258). Автор находит условия, характеризующие этот класс связностей, и отыскивает те преобразования векторных связностей $\overset{a}{L}{}^i_{jk}$, при которых соответствующая тензорная связность остается инвариантной. Б. Л. Лаптев

8473. Производная Ли геометрических объектов в пространстве опорных элементов. Лаптев Б. Л., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 16—18

Понятие производной Ли для геометрических дифференциальных объектов в пространстве опорных элемен-

тов (x, ω), данное ранее автором (РЖМат, 1957, 4345), автор обобщает теперь на такие объекты, у которых в законе преобразования компонент правая часть зависит, кроме всего, еще и от старых и новых координат опорного элемента. Доказывается, что и для таких объектов производная Ли обладает обычными свойствами. Приведены примеры, в частности, вычислена производная Ли от объекта H^α, появляющегося в теории путей в пространстве линейных элементов. Уравнение $LH^\alpha = 0$ (где L — символ производной Ли) определяет псевдогруппу автоморфизмов пространства путей. А. Е. Либер

8474. Общие метрические пространства скалярной кривизны. Моор (Allgemeine metrische Räume von skalarer Krümmung. Moór Arthur), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 207—228 (нем.)

Пусть $\mathfrak{P}_n$ — многообразие элементов (x^i, u^i), где x^i определяют точку, а u^i — векторную плотность веса p. Многообразие $\mathfrak{P}_n$ называется общим метрическим пространством $\mathfrak{R}_n$ элементов (x^i, u^i), если в нем для каждого элемента определен скаляр, $L(x, u)$ — основная метрическая функция. Длина кривой $x^i = x^i(t)$ в $\mathfrak{R}_n$ по отношению поля векторных плотностей $u^i = u^i(t)$ определяется следующим образом:

$$s_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t),\ u(t))\,\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}}\ dt\ ,$$

где

$$g_{ij} = \mathfrak{A}^{-\frac{p}{np-1}}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}L^2\right)}{\partial u^i\,\partial u^j}\ ,\qquad \mathfrak{A} = \det\left\|\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}L^2\right)}{\partial u^i\,\partial u^j}\right\|,\ np\neq 1\ .$$

Инвариантный дифференциал вектора $\xi^i(x, u)$ пространства $\mathfrak{R}_n$:

$$D\xi^i = d\xi^i + (\Gamma^i_{jk}\,dx^k + C^i_{jk}\,du^k)\,\xi^j\ , \qquad (1)$$

где величины Γ^i_{jk} и C^i_{jk} определяются при помощи основной метрической функции $L(x, u)$. Если обозначить инвариантный дифференциал единичного вектора l^i через ω^i, то (1) можно переписать так:

$$D\xi^i = d\xi^i + (\Gamma^{*i}_{jk}\,dx^k + A^i_{jk}\omega^k)\,\xi^j\ , \qquad (2)$$

где $A^i_{jk} = L\sqrt{g^p}\,C^i_{jk}$, $g = \det\|g_{ij}\|$,

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - A^i_{js}\,\Gamma^s_{0k},\quad \Gamma^s_{0.} = \Gamma^s_{pk}\,l^p\ .$$

(Schouten J. A., Haantjes, J., Monatsh. Math. Phys., 1933, 43, 161 — 176.) В теории кривизны пространства $\mathfrak{R}_n$ основную роль играет тензор главной кривизны

$$R^i_{jkm} = \partial_m\,\Gamma^{*i}_{jk} - \partial_k\,\Gamma^{*i}_{jm} - \Gamma^{*i}_{jk}\,\|_r\,\Gamma^{*r}_{0m} + \Gamma^{*i}_{jm}\,\|_r\,\Gamma^{*r}_{0k} + \Gamma^{*r}_{jk}\,\Gamma^{*i}_{rm} - \Gamma^{*r}_{jm}\,\Gamma^{*i}_{rk} \qquad (3)$$

и тензор полной римановой кривизны

$$R^i_{jkm} = \bar{R}^i_{jkm} + A^i_{jr}\bar{R}^r_{0km}\ , \qquad (4)$$

где

$$\|_k = L\sqrt{g^p}\,\frac{\partial}{\partial u^k}\ ,\quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\ .$$

(Davies E. T., Proc. London Math. Soc. (2), 1947, 49, 241—259.)

В работе автор рассматривает инварианты кривизн пространства $\mathfrak{R}_n$. Если $p = 0$, то $\mathfrak{R}_n$ является финслеровым пространством. В финслеровом пространстве при построении инвариантов кривизн используется тензор R_{oioj}, который определяется при помощи тензора R^i_{jkm}:

$$R_{oioj} = g_{ri}\,R^r_{pqj}\,l^p\,l^q \qquad (5)$$

Аналогично можно определить тензор $\bar{R}_{oioj}$, пользуясь тензором $\bar{R}^i_{jkm}$. Оказывается, что в финслеровом пространстве $\bar{R}_{oioj} = R_{oioj}$. Так как в $\mathfrak{R}_n$ вообще $\bar{R}_{oioj} \neq R_{oioj}$, то строить инварианты кривизн этого пространства можно двояким образом. Выражение

$$\bar{B}(x,\ u,\ \eta) = \frac{\bar{R}_{oioj}\eta^i\eta^j}{(g_{ij} - l_i l_j)\,\eta^i\eta^j}\ , \qquad (6)$$

где $l_i = g_{ik}l^k$, η^i и l^i — линейно независимы, автор называет главной кривизной пространства $\mathfrak{R}_n$, а

$$B(x,\ u,\ \eta) = \frac{R_{oioj}\eta^i\eta^j}{(g_{ij} - l_i l_j)\eta^i\eta^j} \qquad (7)$$

— полной кривизной пространства $\mathfrak{R}_n$. Общее метрическое пространство $\mathfrak{R}_n$ называется пространством главной (полной) скалярной кривизны, если $\bar{B}$ (B) не зависит от η^i. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\bar{B}(x, u, \eta) = B(x, u, \eta)$ является $\bar{R}_{oooi} = 0$. Устанавливается, какой вид должны иметь каждый из тензоров $\bar{R}_{oioj}$ и R_{oioj}, чтобы кривизны (6) и (7) были независимы от η^i. Эти тензоры имеют вид:

$$\bar{R}_{o(i|o|j)} = \bar{B}(x, u)(g_{ij} - l_i l_j),\ R_{o(i|o|j)} = B(x, u)(g_{ij} - l_i l_j).$$

Если инварианты (6) и (7) пространства R_n одновременно не зависят от η^i, то это пространство является пространством скалярной кривизны (как главной, так и полной). Пусть $\mathfrak{R}_n$ — пространство скалярной кривизны. Если $\bar{R}_{oioj} = \bar{R}_{ojoi}$ и $\bar{R}_{oioj} \neq 0$, то $\mathfrak{R}_n$ является или финслеровым пространством или пространством с $A_i = 0$ ($A_i = A^k_{ki}$).

Подробно рассматривается пространство $\mathfrak{R}_2$.

В. И. Близникас

8475. Параллелизм аффинный и келиевый. Росье (Parallélismes affin et cayleyen. Rossier Paul), Arch. sci., 1958, **11**, № 1, 130—133 (франц.)

В келиевой плоскости общие перпендикуляры кодной и той же прямой пересекаются, а в евклидовой плоскости они параллельны. Между тем евклидова геометрия считается частным случаем келиевой. Дело в том, что в случае вырождения келиевой метрики, приводящего к евклидовой геометрии, абсолют как линия второго класса вырождается в пару пучков прямых с мнимыми центрами. Прямые, пересекающиеся на линии, соединяющие центры этих пучков, образуют нулевой угол, но точка их пересечения не бесконечно удалена. Прямые, принадлежащие пучкам, пересекаются в бесконечно удаленной точке, но угол между ними не определен. Таким образом, два основных свойства келиевых параллельных разделяются. Евклидова геометрия, в которой параллельные прямые не пересекаются и образуют нулевой угол, фактически возникает при совмещении аффинной плоскости и келиевой плоскости, при условии совпадения несобственной прямой с прямой, соединяющей центры пучков вырожденного келиева абсолюта. Образованная путем совпадения этих прямых прямая и принимается за абсолют евклидовой геометрии.

Примечание референта. Приведенные в статье формулы содержат ошибки, не влияющие, однако, на выводы автора.

В. П. Белоусова

8476. К проективной и конформной геометрии пространств Финслера. Лаугвиц (Zur projektiven und konformen Geometrie der Finsler-Räume. Laugwitz Detlef), Arch. Math., 1956, **7**, № 1, 74—77 (нем.)

Исследуются два вопроса геометрии финслеровых пространств: 1. Отыскание конформных преобразований для общих пространств Минковского (пространство Минковского $g_{ij}(x, x')$ называется общим, если группа линейно однородных изометрических преобразований

дискретна); 2. Отыскание финслеровых пространств, конформных данному и имеющих общие с ним геодезические, т. е. конформно-проективных данному. Показано, что если потребовать, чтобы отображение было двукратно непрерывно дифференцируемо с дифференцируемым множителем ρ ($\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$), то для общих пространств Минковского конечного ($n \geqslant 2$) или бесконечного числа измерений (реф. 7273) конформное отображение имеет вид $y^i = \rho L^i_j x^j + c^i$, где L^i_j определяют изометрическое линейное однородное преобразование, ρ и c^i — произвольные постоянные. Таким образом конформные между собою общие пространства Минковского будут и проективно-эквивалентны. Если рассмотреть две произвольные проективно-эквивалентные дифференцируемые по x финслеровы метрики $g_{ij}(x, x')$ и $\bar{g}_{ij}(x, x')$ и потребовать, чтобы они были и конформно-эквивалентны

$$\bar{g}_{ij}(x, x') = \rho^2(x)\, g_{ij}(x, x'),$$

то, допустив, что форма

$$g_{ij}(x, x')\, y^i y^j$$

положительно определенная, мы получим

$$\rho^2(x) = \text{const},$$

причем это имеет место как для конечномерного, так и для бесконечномерного пространства. Б. Л. Лаптев

8477. О порядке групп аффинных коллинеаций в обобщенных пространствах путей. I, II, III. Окубо (On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. I, II, III. Okubo Tanjiro), Tensor, 1956, **6**, № 3, 141—158; 1957, **7**, № 1, 1—17; 18—33 (англ.)

В работе изучается вопрос о классификации обобщенных пространств путей в зависимости от порядка допускаемых ими групп аффинных коллинеаций.

Как было показано Кнебельманом (Knebelman M. S., Amer. J. Math., 1929, **51**, 527—564), для того чтобы обобщенное пространство путей допускало бесконечно малую аффинную коллинеацию

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta u,$$

необходимо и достаточно, чтобы обобщенные коэффициенты связности $\Gamma^i_{jk}(x, \dot{x})$, которыми задается это пространство, удовлетворяли системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathfrak{L}\, \Gamma^i_{jk} = 0,$$

где через $\mathfrak{L}$ обозначена производная Ли по направлению, определяемому вектором ξ^i. Кнебельманом же были получены условия интегрируемости этой системы уравнений, которые представляют собой уравнения, линейные и однородные относительно ξ^i и $\xi^i_{,j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}\xi^k$, и было показано, что для того, чтобы обобщенное пространство путей допускало группу аффинных коллинеаций порядка r, необходимо и достаточно, чтобы эти условия интегрируемости сводились к n^2+n-r линейно независимым уравнениям.

В реферируемой работе эти условия интегрируемости преобразуются, подобно тому как это было сделано Муто (см., например, РЖМат, 1957, 6639) при исследовании групп аффинных коллинеаций в пространствах аффинной связности. Подробное изучение этих уравнений приводит автора к следующим выводам:

1) Если обобщенное пространство путей допускает группу аффинных коллинеаций порядка r, где $n^2+n \geqslant r > n^2$ и $n>2$, то оно является простым аффинным пространством. При доказательстве этой теоремы использована аналогичная теорема И. П. Егорова, доказанная им для пространства аффинной связности (Докл. АН СССР, 1947, **57**, 860—870; 1952, **84**, 209—212).

2) Если в обобщенном пространстве путей, размерность которого $n \geqslant 7$, существует группа аффинных коллинеаций порядка $r > n^2-n+1$, то это пространство будет пространством аффинной связности.

3) Существует обобщенное пространство путей, размерность которого $n \geqslant 7$, допускающее группу аффинных коллинеаций порядка $r = n^2 - n + 1$, не сводящееся к пространству аффинной связности. Это пространство будет проективно-плоским пространством. Его обобщенные коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = -(\delta^i_j \varphi_{\cdot k} + \delta^i_k \varphi_{\cdot j} + \dot{x}^i \varphi_{\cdot j \cdot k}),$$

где $\varphi = -\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^2}$ и индекс после точки обозначает дифференцирование по соответствующему $\dot{x}^i$.

В работе подробно изложены не только результаты автора, но и все необходимые предварительные сведения. М. А. Акивис

8478. Контактные структуры. Грей (Contact structures. Gray J. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 113 (англ.)

Многообразие M^{2n+1} называется контактным, если на нем задана форма α первого порядка, имеющая максимальный ранг. Преобразование $f: M \to M$ называется контактным, если $f^*\alpha = \tau\alpha$, $\tau \neq 0$. Пусть Θ — пучок ростков бесконечно малых контактных преобразований, Θ_0 — пучок ростков преобразований с $\tau = 1$, S_α — пучок ростков форм, кратных α, A — пучок ростков дифференцируемых функций, A_0 — пучок ростков первых интегралов формы α. Тогда 1) $\Theta \cong A$, $\Theta_0 \cong A_0$ и последовательность $0 \to H^0(\Theta_0) \to H^0(\Theta) \to H^0(S_\alpha) \to H^2(\Theta_0) \to 0$ точна; 2) $\dim H^0(\Theta_0)$ и $\dim H^1(\Theta_0) \neq 0$; малые деформации α_t формы α являются контактными и можно найти такие $f_t: M \to M$, что $f_t^* \alpha = \tau_t \alpha_t$, но τ_t нельзя заменить на 1.

8479. Теория аффинных связностей пространства касательных направлений дифференцируемого многообразия. III. Оцуки (Theory of affine connections of the space of tangent directions of a differentiable manifold. III. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1957, **7**, № 2, 95—122 (англ.)

Продолжение одноименной статьи (РЖМат, 1958, 8246). В пространстве касательных направлений дифференцируемого многообразия вводится финслерова метрика и исследуется ее связь с аффинными связностями, введенными в предыдущих двух частях этой работы. Строится метрическая связность, присоединенная к финслеровой метрике, и рассматриваются ее соотношения с изученными в I и II частях связностями, а также с метрической связностью Картана. Изучаются группы голономии метрической связности. Исследуются аффинные связности, индуцируемые на подмногообразиях рассматриваемого пространства. Ю. И. Левин

8480. Симплектическая интегральная геометрия. Легради (Symplektische Integralgeometrie. Legrady Kurit), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 139—159 (нем.)

Следуя Зигелю (Siegel C. L., Amer. J. Math., 1943, **65**), автор рассматривает аналитическое многообразие $W^{\frac{n(n+1)}{2}}$ измерений, каждой точке p которого соответствует матрица

$$Z_p = (z_{\alpha\beta}(p)) = X_p + iY_p,\ z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha} = x_{\alpha\beta} + iy_{\alpha\beta}.$$

Выражая неравенством $A > 0$, что эрмитова матрица A положительно определенная, и полагая $p \in E$, если

$(2i)^{-1}(Z_p-\overline{Z}_p)>0$; $p\in H$, если $(I-Z_p\overline{Z}_p)>0$ (I — единичная матрица), можно ввести в рассмотрение подмножества E и H, соответственно являющиеся обобщением понятий верхней полуплоскости и единичного круга. E и H аналитически гомеоморфны. H отображается в себя подстановками $\begin{pmatrix}AZ+B\\ \sigma p\quad \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CZ+D\\ \sigma p\quad \sigma\end{pmatrix}^{-1}$ симплектической группы Ω, где A, B, C, D — вещественные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\begin{pmatrix}A' C'\\ B' D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 I\\ -I 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A B\\ C D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 I\\ -I 0\end{pmatrix}.$$

Зигель показал, что всякое аналитическое отображение H в себя симплектично, т. е. получается указанным способом. Эрмитова дифференциальная форма $ds^2 = S_p(Y^{-1}dZY^{-1}d\overline{Z})$ инвариантна относительно Ω и определяет риманову метрику в H. В этой метрике существует одна и только одна геодезическая, соединяющая две точки из H.

Аналитическое многообразие M называется симплектическим, если оно аналитически гомеоморфно H. Основной целью работы является распространение теории Чжень Шэн-шеня (Chern S. S., Ann. Math., 1942, 43) в интегральной геометрии на симплектические многообразия. Доказываются теоремы: 1. В симплектической геометрии существуют плотности точек (приведены формулы); 2. В симплектической геометрии существуют плотности геодезических 3. Каждая точка p определяет в каждом классе геодезических подкласс геодезических, которые инцидентны с p; эти подклассы обладают плотностями; 4. Для геодезических имеет место формула, аналогичная классической формуле Крофтона.

Привести в реферате эту и другие формулы нет возможности, так как при всей продуманности обозначений автора, расшифровка основных формул требует много места. Г. И. Дринфельд

8481 К. Курс дифференциальной геометрии. Жюлиа (Cours de géométrie infinitésimale. 3e fasc. Géometrie infinitésimale. 1-e Partie. Méthodes générales. Théorie des courbes. (Cours de l'École Polytechnique). 2e ed. entièrem. ref. Julia Gaston. Paris, Gauthier-Villars, 1955, 220 p.) (франц.)

8482 К. Геодезические линии и геодезические круги поверхностей вращения постоянной кривизны. Шиллинг (Die geodätischen Linien und geodätischen Kreise der Rotationsflächen konstanter Krümmung. Bd. 1—2. Schilling F. München, R. Oldenbourg, 1953, XII, 162 S., ill., 40,—DM) (нем.)

8483 К. Введение в дифференциальную геометрию. Хантьес (Einführung in die Differentialgeometrie. Haantjes J. Groningen—Djakarta, P. Noordhoff N. U., 1954, 173 S.) (гол.)

8484 К. Алгебраическая теория спиноров. Шевалле (The algebraic theory of spinors. Chevalley Claude, Columbia University Press, New York, 1954, VIII, 131 pp., 3.75 doll.) (англ.)

Излагается алгебраическая теория спинорных представлений ортогональных групп над произвольным полем K, частный случай которой для вещественных групп изложен в книге основоположника теории Э. Картана „Теория спиноров" (Изд-во ин. лит., 1948) и в книге рецензента „Неевклидовы геометрии" (ГТТИ, 1955, гл. V). В большинстве случаев предполагается, что характеристика поля K не равна 2. Большинство излагаемых фактов справедливы в вещественном случае.

В гл. I „Квадратичные формы" рассматриваются квадратичные формы $Q(x)$ и билинейные формы $B(x, y)$, связанные с формами $Q(x)$ соотношением $Q(x)=B(x, x)$, в m-мерном векторном пространстве M над полем K. Определяется ортогональная группа G как группа линейных преобразований пространства M, переводящих в себя форму $Q(x)$. Подгруппа группы G, состоящая из преобразований с определителем 1, обозначается G^+.

В гл. II „Алгебра Клиффорда" определяется алгебра Клиффорда (алгебра альтернионов) формы $Q(x)$ как фактор-алгебра $C=T/I$ тензорной алгебры T векторного пространства M по ее идеалу I, порожденному элементами $x^2-Q(x)\cdot 1$. Если T^h — подпространство элементов алгебры T степени (валентности) h, а T_+ и T_- — суммы всех T^h, для которых h соответственно четно или нечетно, то $C_+=T_+/(I\cap T_+)$ и $C_-=T_-/(I\cap T_-)$. Пространство M рассматривается как подпространство алгебр T и C. Алгебра C — прямая сумма пространств C_+ и C_-, C_+ — алгебра. Из $x^2=Q(x)\cdot 1$ следует, что $xy+yx=2B(x, y)\cdot 1$. В алгебре C определяется „главная инволюция" — инволюционный автоморфизм $u\to\tilde{u}(u)$: $\tilde{u}(u)=u$, если $u\in C_+$ и $=-u$, если $u\in C_-$, и „главный антиавтоморфизм" $u\to a(u)$, порождаемый всеми преобразованиями вида $x_1 x_2, \ldots, x_h\to x_h x_{h-1}, \ldots, x_1$. Доказывается, что если $m=2r$, C — центральная простая алгебра размерности 2^m, а C_+ — простая алгебра с 2-мерным центром или прямая сумма двух центральных простых идеалов; если $Q(x)$ — индекса r, C изоморфна алгебре всех матриц порядка 2^r над K. Если $m=2r+1$ и $B(x, y)$ — невырожденная форма, центр Z алгебры C имеет размерность 2 и порождается 1 и элементом z, для которого $z^2=2(-1)^r D$, где D — дискриминант $B(x, y)$, в этом случае C_+ — центральная простая, а C изоморфна произведению Z и C_+ и является или простой, или суммой двух простых идеалов.

В случае, когда B — невырожденная форма, в алгебре C выделяется группа Γ такая, что для всех $s\in\Gamma$ и $x\in M$ $sxs^{-1}\in M$. Линейное преобразование $x\to\varkappa(x)=sxs^{-1}$ в M является линейным представлением группы Γ. Так как $Q(sxs^{-1})\cdot 1=(sxs^{-1})^2=sx^2s^{-1}=Q(x)\cdot 1$, x отображает Γ в ортогональную группу. Доказывается, что при четном m $\varkappa(\Gamma)=G$, а при нечетном m $\varkappa(\Gamma)=G^+$. Если $\Gamma^+=\Gamma\cap C_+$, то $\varkappa(\Gamma^+)=G^+$. Группой Γ_0 называется подгруппа всех элементов Γ, для которых $\alpha(s)=s^{-1}$, а $\Gamma^+_0=\Gamma_0\cap\Gamma^+$.

Если m четно, неприводимое линейное представление ρ алгебры C называется спиновым (спинорным) представлением, а векторы пространства S этого представления называются спинорами. Отображение ρ определяет спинорное представление ρ группы Γ и спинорные представления ρ^+ и ρ^+_0 соответственно C_+ или Γ^+ и Γ^+_0; ρ неприводимо на Γ, ρ^+ может быть неприводимо или S — сумма двух пространств S_1 и S_2 неприводимых неэквивалентных представлений C_+, называемых полуспинорными представлениями.

Если m нечетно, спиновым (спинорным) представлением называется единственное неприводимое представление ρ алгебры C_+, определяющее неприводимые представления групп Γ^+ и Γ^+_0. В случае, когда C не проста, это представление порождает два представления C, называемых спинорными представлениями этой алгебры. В случае, когда K — вещественное поле и Q — знакоопределенная форма, Γ^+_0 — универсальная накрывающая группа для группы G.

В гл. III „Формы максимального индекса" рассматривается геометрическое истолкование спинорных представлений в случае, когда G — форма максимального индекса. Показывается, что некоторые 1-мерные подпространства пространства S находятся в соответствии с максимальными вполне изотропными подпространствами пространства M (подпространство называется вполне изотропным, если для всех векторов x этого подпространства $Q(x)=0$). В гл. IV „Принцип тройственности" специально рассматривается случай $m=8$ и форма Q индекса 4. В этом случае пространства полуспиноров S_1 и S_2 имеют ту же размерность 8, что и M,

и каждое из этих трех пространств служит моделью каждого из двух других (принцип тройственности). В этом случае в M строится альтернативная алгебра „октонионов" (октав, чисел Кели), определяемая формой Q. Б. А. Розенфельд

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8485. Об отношении между геометрией и физикой и понятии пространства-времени. Данциг (On the relation between geometry and physics and the concept of space-time. Dantzig D. van), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 48—53 (англ.)

Автор критикует традиционный взгляд на теорию пространства и времени как на необходимую предпосылку любой физической теории. На примерах (механика системы точек, электродинамика, термо-гидродинамика) показывается 1) что основные уравнения соответствующих теорий можно разбить на два класса, из которых первый содержит только физические величины, а второй (быть может, в неявном виде) — предположения относительно геометрии пространства-времени, 2) что некоторые физические выводы можно делать на основе одних уравнений первого класса. Автор считает возможным и желательным построение модели физики, в котором пространственно-временной континуум был бы заменен конечным множеством „мировых точек". Г. К. Энгелис

8486. Принцип Ферма и общая теория относительности. Фам (Le principe de Fermat en relativité générale. Pham M. Q.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 153 (франц.)

В римановом пространстве, определяемом квадратичной метрической формой

$$d\bar{s}^2 = \left[g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta \right] dx_\alpha dx_\beta ,$$

распространение электромагнитных волн (лучей) происходит по геодезическим линиям. Это позволяет расширить точку зрения на экстремальный принцип Ферма. Я. И. Пугачев

8487. Об одном методе квантования гравитационного поля. Лихнерович (Sur un procédé de quantification du champ de gravitation. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 4, 433—436 (франц.)

Для описания гравитационного поля вводится тензор $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, заданный в пространстве Минковского и удовлетворяющий основным уравнениям поля

$$S\partial_\alpha H_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0,$$

$$\partial_\alpha H^{\alpha}_{\ \beta,\lambda\mu} = 0$$

(S — символ циклической перестановки индексов α, β, γ, $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$) и дополнительным условиям

$$H_{\alpha\beta} = 0.$$

Благодаря этому квантование поля H удается осуществить по аналогии с квантованием электромагнитного поля. Спецификой предлагаемой процедуры является введение спиновых переменных в обобщенные импульсы. В общем случае введенный формализм приводит к существованию смеси частиц спина 0 и 2. Из дополнительных соображений теории групп частицы нулевого спина исключаются. Я. И. Пугачев

8488. Гипотеза гравитационного эффекта спина. Коста-де-Борегар (L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin. Costa de Beauregard Olivier), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 15, 1092—1094 (франц.)

Гравитационный эффект, обусловленный наличием спина у источника поля, учитывается с помощью несимметричного тензора энергии-импульса $\overset{ij}{T^\vee}$, связанного с оператором $\overset{ijk}{\sigma^\vee}$ соотношением

$$2\overset{ij}{T^\vee} \equiv T^{ij} - T^{ji} = \partial_k \overset{ijk}{\sigma^\vee} .$$

В уравнениях Эйнштейна

$$\Box \overset{ij}{G^\vee} = a\varkappa \overset{ij}{T^\vee}$$

(a, $\varkappa$ — константы) потенциалы поля также лишены обычного свойства симметрии.

Пробная частица в таком гравитационном поле движется согласно уравнениям

$$\frac{dV^i}{d\tau} = -\frac{d\overset{ij}{G^\vee}}{d\tau} V_j,$$

где V^i — четырехмерная скорость, τ — собственное время частицы. Эти уравнения движения не совпадают с обычными уравнениями геодезической, что интерпретируется как гравитационный эффект спина. Я. И. Пугачев

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

8489. О векторных полях, определяющих группу гомеоморфизмов дифференцируемого многообразия. Лелон-Ферран (Sur les champs de vecteurs définissant un groupe d'homéomorphismes d'une variété différentiable. Lelong-Ferrand Jacqueline), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 18, 1491—1493 (франц.)

На n-мерном дифференцируемом многообразии V^n класса C^1_1 (это значит, что функции, определяющие замену локальных координат $x^1,\ldots,x^n$, имеют частные производные, удовлетворяющие условию Липшица) с регулярным (т. е. определенным локально соотношением $x^n = 0$) краем ∂V^n задано векторное поле ξ, координаты которого ξ^i удовлетворяют условию Липшица. Для того чтобы соответствующее инфинитезимальное преобразование $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ определяло однопараметрическую группу глобальных гомеоморфизмов многообразия V^n, необходимо, чтобы векторное поле ξ было касательным к ∂V^n (в тех точках, где $\xi \neq 0$). Довольно просто показывается, что для конечных многообразий это условие будет и достаточным. Далее рассматриваются бесконечные многообразия V^n без края. Предполагается, что на V^n можно определить положительную функцию $r(x)$, удовлетворяющую условию Липшица, такую, что при всяком R множество $\{x;\ r(x) \leqslant R\}$ будет компактным. Производным числом Ли $Xr(x)$ называется произвольное предельное значение выражения $|r(x^1+\varepsilon\xi^1,\ldots,x^n+\varepsilon\xi^n) - r(x^1,\ldots,x^n)|/\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$. Полагаем $\theta_s(u) = \sup_{r(x)=u} |Xr(x)|$, $\theta_i(u) = \inf_{r(x)=u} |Xr(x)|$. Оказывается, что для того чтобы векторное поле ξ определяло группу преобразований многообразия V^n в целом, достаточно, чтобы интеграл $\int_R^\infty du/\theta_s(u)$ расходился при

любом R, а если существует такое значение u_0, что при $r(x)>u_0$ производные числа Ли $Xr(x)$ сохраняют постоянный знак, то для этого необходимо, чтобы интеграл $\int_R^\infty du/\theta_i(u)$ расходился при $R>u_0$. Принимая, в частности, за $r(x)$ геодезическое расстояние от фиксированной точки на римановом многообразии, получаем следующий результат: всякое инфинитезимальное конформное преобразование, определенное на полном римановом многообразии класса C^1_1 векторным полем ξ с ограниченной дивергенцией, координаты которого удовлетворяют условию Липшица, отвечает группе конформных преобразований многообразия в целом (отсюда вытекает, в частности, результат Кобаяси, РЖМат, 1957, 860). Формулируется также более общая теорема: Для того чтобы векторное поле ξ с координатами, удовлетворяющими условию Липшица, на многообразии V^n класса C^1_1 определяло непрерывную глобальную однопараметрическую группу гомеоморфизмов этого многообразия, необходимо и достаточно, чтобы V^n можно было рассматривать как объединение (не обязательно счетное) инвариантных областей W_i, каждая из которых является пределом при $T\to+\infty$ подобласти W_i^T, определенной неравенством $r_i(x)<T$ и относительно компактной, где $r_i(x)$ есть определенная на W_i функция, удовлетворяющая условию Липшица, производные числа Ли которой в каждой точке W_i удовлетворяют неравенству $|Xr_i(x)|<1$. Инвариантной областью здесь называется каждая открытая область многообразия V^n, граница которой, класса C^1_1, является в каждой своей точке касательной к векторному полю ξ. М. Ф. Бокштейн

8490. К инвариантным свойствам лагранжевых функций полей. Мицкевич (Zu den Invarianzeigenschaften der Lagrange-Funktionen der Felder. Mizkjewitsch Nikolaj), Ann. Physik, 1958, **1**, № 6-8 319—333 (нем.)

Рассмотрим поле в смысле общей релятивистской теории, описываемое потенциалами A_i (i пробегает совокупность всех волновых функций), которые при преобразовании координат

$$x'^\alpha = x^\alpha + Sx^\alpha \tag{1}$$

преобразуются по следующему закону:

$$SA_i = A'_i(x') - A_i(x) = a_i, \quad \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Выводятся условия инвариантности функции

$$L = L(A_i; A_{i,\alpha}; A_{i,\alpha\beta}; g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\alpha}; g_{\mu\nu,\alpha\beta}),$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства. Если считать, что вариации координат и их первых производных произвольны, то условия инвариантности функции L, учитывая соотношение $\delta g = -g\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\alpha}$, можно представить в виде

$$\Im^i A_{i,\alpha} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\Im^i a^\beta_{i,\alpha} + \mathfrak{T}^\beta_\alpha\right) = 0; \tag{2}$$

$$\mathfrak{N}^\alpha_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}^{\beta\alpha}_\sigma}{\partial x^\beta}, \quad \mathfrak{M}^{\beta\tau}_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma}{\partial x^\alpha} + \mathfrak{T}^{\beta\tau}_\sigma, \quad \mathfrak{T}^{\{\beta\tau\}}_\sigma = 0,$$

$$\mathfrak{N}^{\{\alpha\tau\beta\}}_\sigma = 0, \tag{3}$$

где

$$\Im^i = \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i}, \quad \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta A_i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\beta}},$$

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\, L,$$

$$g = \det \| g_{\nu\mu} \|, \quad A_{i,\alpha} = \frac{\partial A_i}{\partial x^\alpha}, \quad \mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} =$$

$$= -2\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{\mu\nu}};$$

$$\mathfrak{U}^\alpha_\sigma = \mathfrak{L}\delta^\alpha_\sigma + \Im^i a^\alpha_{i,\sigma} + \mathfrak{T}^\alpha_\sigma - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\beta}}\right) A_{i,\sigma} - \tag{a}$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha,\beta}} A_{i,\sigma\beta} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\beta}}\right) g_{\mu\nu,\sigma} -$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\beta}} g_{\mu\nu,\sigma\beta};$$

$$\mathfrak{M}^{\alpha\tau}_\sigma = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\beta}}\right) a^\tau_{i,\sigma} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\tau}} A_{i,\sigma} + \tag{b}$$

$$+ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\beta}}\frac{\partial a^\tau_{i,\sigma}}{\partial x^\beta} - 2\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu,\tau,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}}\right) g_{\nu\sigma} -$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\tau}} g_{\mu\nu,\sigma} - 2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}} g_{\nu\sigma,\beta};$$

$$\mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{i,\alpha\beta}} a^\tau_{i,\sigma} - 2\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}} g_{\nu\sigma}. \tag{c}$$

Величины $\mathfrak{U}^\alpha_\sigma$, $\mathfrak{M}^{\alpha\tau}_\sigma$, $\mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma$ являются тензорами только относительно линейных преобразований координат.

Функция L называется лагранжианом (лагранжевой функцией), если уравнения поля, получаемые посредством вариации интеграла действия, образованного при помощи этой функции, совпадают с уравнениями поля, установленными экспериментальным путем. Так как условие инвариантности $SL=0$ вполне эквивалентно условию инвариантности интеграла

$\delta\cdot\Im = \int_{R'}\mathfrak{L}'(x')(dx') - \int_R \mathfrak{L}(x)(dx) = 0$ (R — произвольная область), то следствия теоремы Нётер (Noether E., Göttingen. Nachr., 1918, 235) можно получить в безынтегральной форме. Лагранжиан поля, дифференциальные уравнения которого не выше второго порядка, имеет вид $L_f = L(A_i; A_{i,\alpha})$, а лагранжиан свободного гравитационного поля —

$$L_g = L(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\alpha}; g_{\mu\nu,\alpha\beta}).$$

Лагранжиан L_t системы этих полей имеет вид $L_t = L_g + L_f$, а из (a), (b) и (c) следует, что

$$\mathfrak{U}^\alpha_{t\sigma} = \mathfrak{U}^\alpha_{g\sigma} + \mathfrak{U}^\alpha_{f\sigma}, \quad \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{f\sigma} = \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{g\sigma} + \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{f\sigma} \text{ и т. д.}$$

При помощи новой формулировки теоремы Нётер дается классификация законов сохранения величин, образованных из $T^{\mu\nu}$, $\mathfrak{N}^\alpha_\sigma$, $\mathfrak{M}^{\alpha\tau}_\sigma$ и $\mathfrak{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma$, типа энергии, момента вращения, мультимомента и спина. Например, закону сохранения энергии и импульса соответствует условие

инвариантности лагранжиана относительно преобразований (1), где $\delta x^\alpha = \text{const}$, $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$ и в этом случае величины $T^{\mu\nu}_g$ автор называет тензором энергии-импульса гравитационного поля, $T^{\mu\nu}_t$ — тензором энергии-импульса системы полей, а канонический квазитензор энергии-импульса определяет по формуле

$$t^\alpha_\beta = \mathfrak{T}^\alpha_\beta - \mathfrak{U}^\alpha_\beta$$

для всех трех полей соответственно, где $\mathfrak{U}^\alpha_\beta$ — спиновая энергия. Доказывается, что

$$\mathfrak{U}^\alpha_{f\beta} + \mathfrak{U}^\alpha_{g\beta} = -(t^\alpha_{f\beta} + t^\alpha_{g\beta}),$$

откуда следует закон сохраняемости канонического квазитензора полной системы. В. И. Близникас

8491. О характеристических классах и кривизне. Илс (On characteristic classes and curvature. Eells J., Jr), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 112—113 (англ.)

Пусть B_n — дифференцируемое главное расслоенное пространство, структурной группой которого является группа вращений R_n. В терминах аффинной связности в расслоении B_n строятся некоторые внешние многочлены от форм связности и кривизны. Эти многочлены индуцируют дифференциальные формы в ассоциированных расслоениях B_r (со штифелевым многообразием $V_{n,n-r}$ в качестве слоя) и определяют характеристическое кольцо расслоения B_n по модулю 2. В том случае, когда B_r есть расслоенное пространство $(n-r)$-реперов на n-мерном ориентируемом римановом многообразии X, получаются интегральные формулы для классов Штифеля—Уитни многообразия X в терминах форм обобщенной гауссовой и геодезической кривизн на X.

8492. О псевдокелеровых пространствах постоянной аналитической кривизны. Яно (On pseudo-kählerian spaces of constant holomorphic curvature. Yano K.), Rapp. Math. centrum, 1954, № 012, 1—5 (англ.)

В работе сформулированы без доказательства следующие теоремы о псевдокелеровых пространствах постоянной аналитической кривизны:

1) Тензор кривизны такого пространства имеет вид:

$$R_{ijih} = \frac{k}{4}[(g_{ih}g_{ji} - g_{ii}g_{jh}) + (F_{ih}F_{ji} - F_{ii}F_{jh}) - 2F_{ij}F_{ih}],$$

где g_{ij} — метрический тензор, а F_{ij} — тензор, задающий почти комплексную структуру. Здесь k — абсолютная постоянная.

2) Кривизна K в произвольном (не аналитическом) двумерном направлении удовлетворяет условиям: $\frac{k}{4} \leqslant K \leqslant k$ для $k > 0$ и $k \leqslant K \leqslant \frac{k}{4}$ для $k < 0$.

3) Для того чтобы через любую точку в любом аналитическом двумерном направлении проходила плоскость, необходимо и достаточно, чтобы пространство имело постоянную аналитическую кривизну. Под плоскостью здесь понимается подпространство двух вещественных измерений, которое содержит целиком любую геодезическую, имеющую с ним две общие точки.

4) В пространствах постоянной аналитической кривизны и только в них существует движение, которое переводит любую точку и любое аналитическое направление в ней в произвольную другую точку с заданным в ней аналитическим направлением.

Пусть луч геодезической между точками P и Q осуществляет относительный минимум, но для точки Q и точек, отстоящих по этому лучу от P далее, чем Q, относительный минимум не осуществляется. В этом случае P и Q называем последовательно сопряженными точками.

5) В псевдокелеровом пространстве постоянной аналитической кривизны $k > 0$ расстояние между последовательно сопряженными точками постоянно и равно $2\pi/\sqrt{k}$.

Д. В. Беклемишев

8493. Инвариантные тензоры при действительном представлении унитарной группы и их приложения. Фуками (Invariant tensors under the real representation of unitary group and their applications. Fukami Tetsuzo), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 2, 135—144 (англ.)

Рассмотрим $2n$-мерное пространство $R^{2n}(x^k)$ $(i, j, k, h = 1, \ldots, 2n)$ и соответствующее комплексное пространство $C^n(z^\alpha = x^\alpha + ix^{n+\alpha})$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Всякому линейному преобразованию σ в C^n с матрицей $A_1 + iA_2$ отвечает линейное преобразование σ' в R^{2n} с матрицей $\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$, которая характеризуется перестановочностью с $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n.

Если σ — унитарное преобразование в C^n, то соответствующее σ' называется унитарным преобразованием в R^{2n}. Оно сохраняет две билинейные формы $\varphi = \sum_{i=1}^{2n} x^i y^i$ и $\psi = \sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha y^{n+\alpha} - x^{n+\alpha} y^\alpha)$, коэффициенты которых обозначаются g_{ij} и φ_{ij}. При этом $\varphi_{ij} = g_{ik}\varphi^k_j$, где φ^k_j — элементы матрицы I, δ^i_j — символ Кронекера. Доказана следующая основная теорема:

Если тензоры v_i, h_{ij}, T^k_{ij} и $R^h_{ijk} = -R^h_{ikj}$ инвариантны относительно всей унитарной группы в R^{2n}, то $v_i = 0$, $R_{ij} = k_1 g_{ij} + k_2 \varphi_{ij}$, $T^h_{ij} = 0$, $R^h_{ijk} = c_1(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}) + c_2(\varphi^h_k g_{ij} - \varphi^h_j g_{ik}) + c_3(\delta^h_k \varphi_{ij} - \delta^h_j \varphi_{ik}) + c_4(\varphi^h_k \varphi_{ij} - \varphi^h_j \varphi_{ik}) + c_5\delta^h_i \varphi_{ik} + c_6\varphi^h_i \varphi_{ik}$ при $n > 1$. При $n = 1$ $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. ($k_\lambda$ и $c_\mu = \text{const}$).

Если, кроме того, $R^h_{[ijk]} = 0$, то $2c_3 + c_5 = 0$ и $2c_4 + c_6 = 0$. Если $g_{ai}R^a_{hjk} + g_{ha}R^a_{ijk} = 0$, то $c_2 + c_3 = 0$, $c_5 = 0$. Если $\varphi^a_i R^h_{ajk} - \varphi^h_a R^a_{ijk} = 0$, то $c_2 - c_3 = 0$, $c_1 + c_4 = 0$.

Из этой теоремы делаются следующие геометрические выводы:

1. Пусть M — $2n$-мерное почти комплексное многообразие и φ — тензорное поле, определяющее почти комплексную структуру ($\varphi^2 = -E$). Если G — транзитивная группа Ли, сохраняющая почти комплексную структуру, и группа изотропии содержит линейное преобразование $-\delta^i_j$, тогда многообразие комплексное аналитическое.

2. Пусть M — связное $2n$-мерное почти эрмитово пространство и G — $(n^2 + 2n)$-мерная эффективная группа автоморфизмов в нем. Тогда G транзитивна на M и линейная связность в M, инвариантная относительно G, есть Леви — Чивитова связность, а само многообразие M является келеровым с постоянной голоморфной кривизной.

3. Пусть M — келерово многообразие с Леви — Чивитовой связностью и однородная группа голономии в M является унитарной группой. Если тензор кривизны имеет нулевую ковариантную производную, то многообразие имеет постоянную голоморфную кривизну.

Заметим, что теорема, аналогичная основной, для ортогональной группы была получена Кейпером и Яно (РЖМат, 1958, 3548) О почти комплексных структурах и связанных с этим вопросах см. РЖМат, 1956, 6819.

Г. И. Кручкович

8494. Некоторые аспекты теории локальных структур. Дедеккер (Quelques aspects de la théorie des structures locales. Dedecker Paul), Bull. Soc. math. Belgique, 1952 (1953), 26—43 (франц.)

Работа посвящена развитию теории локальных структур и содержит подробное изложение определений и результатов, о которых ранее сообщалось в заметке того же автора (РЖМат, 1953, 624). По поводу различных используемых определений см. также Бурбаки, Общая топология (Приложение), Эресман (РЖМат, 1955, 3668).

В работе введено понятие парагруппы преобразований, обобщающее понятие псевдогруппы преобразований. Пусть E — некоторое множество, γ — семейство взаимно однозначных отображений f части A_f множества E на его часть B_f. Псевдогруппа может быть определена наложением на γ следующих требований: 1) если f и $f' \in \gamma$, и совпадают в $A_f \cap A_{f'}$, то и их ограничение областью $A_f \cap A_{f'}$ также принадлежит γ; 2) пусть $f : A_f \to B_f$, $A_f = \cup_{i \in I} A_i$; если f_i (ограничения f областями A_i) принадлежат γ, то и $f \in \gamma$; 3) если $f : A_f \to B_f$, $f \in \gamma$, то и $f^{-1} : B_f \to A_f$, $f^{-1} \in \gamma$; также при $f' : A_{f'} \to B_{f'}$, $f' \in \gamma$, $B_f \subset A_{f'}$ должно быть $f' \circ f \in \gamma$; 4) E совпадает с объединением A_f, $f \in \gamma$. Если оставить только требования 1), 2), 4), то получим определение парагруппы. Далее, через $o(\gamma)$ обозначается множество всех A_f, $f \in \gamma$, и через $\omega(\gamma)$ — множество объединений частей $o(\gamma)$ (для псевдогруппы $o(\gamma) = \omega(\gamma)$).

Доказывается теорема: Пусть γ — парагруппа преобразований E. Топология в E, задаваемая семейством $o(\gamma)$, совпадает с топологией, порожденной $\omega(\gamma)$. По отношению к этой топологии любое $f \in \gamma$ есть гомеоморфизм $A_f \to B_f$; множество γ_A отображений $f \in \gamma$, область определения которых лежит в $A \in \omega(\gamma)$, есть парагруппа преобразований A (индуцированная парагруппа; если γ — псевдогруппа, то и γ_A — псевдогруппа).

Далее вводится понятие нормализатора парагруппы. Для взаимно однозначных отображений f и F таких, что $A_f \cup B_f \subset A_F$, через f^F обозначается $F_b \circ f \circ F_a^{-1}$, где F_a, F_b — ограничения F областями A_f, B_f. Пусть $A \in \omega(\gamma)$, $B \in \omega(\gamma)$; локальным автоморфизмом F парагруппы γ называется отображение $F : A \to B$ такое, что отображение $f \to f^F$ есть взаимно однозначное отображение γ_A на γ_B (F можно назвать изоморфизмом парагруппы γ_A на парагруппу γ_B). Парагруппа γ называется инвариантной по отношению к другой парагруппе Γ, если топологии $\omega(\gamma)$ и $\omega(\Gamma)$ тождественны и всякий элемент Γ является локальным автоморфизмом γ. Множество локальных автоморфизмов γ — наибольшая парагруппа, по отношению к которой γ инвариантна, она называется нормализатором γ; так, всякая псевдогруппа имеет нормализатор Γ, который, однако, не обязан быть псевдогруппой (приведен пример).

Далее рассматриваются отношения гомологичности и изомерности между структурами одного типа. Две структуры s и s' одного типа на E называются гомологичными, если они соответствуют одной и той же топологии и всякая точка $x \in E$ обладает открытой окрестностью, в которой индуцированные структуры имеют одну и ту же псевдогруппу локальных автоморфизмов.

Пусть Γ_{sx} — подпарагруппа Γ_s (нормализатора γ_s), образованная элементами, действующими в окрестности x и сохраняющими x. Структура s'' на E изомерна структуре того же типа s, если для каждой точки $x \in E$ существует $f \in \Gamma_{sx}$, переводящее структуру, индуцированную s в A_f, в структуру, индуцированную s'' в B_f. В связи с этими понятиями рассматриваются также некоторые группоиды струй.

Наконец в связи с понятием совместимости структур разных типов (РЖМат, 1953, 624) вводится общее понятие погруженного подпространства, содержащее в себе, как частный случай, соответствующее понятие по Эресману.

В. В. Рыжков

8495. Некоторые исследования об однородных келеровых пространствах. Хано, Мацусима (Some studies on kaehlerian homogeneous spaces. Hano Junichi, Matsushima Yozô), Nagoya Math. J., 1957, **11**, 77—92 (англ.)

Авторы представляют полное односвязное келерово пространство, имеющее вещественно аналитическую метрику, как произведение келеровых пространств $V_0, V_1, \ldots, V_n$, причем V_0 — унитарное пространство, а $V_1, \ldots, V_n$ имеет неприводимую однородную группу голономии. Такое разложение называют разложением де Рама. Доказано, что наибольшая связная группа автоморфизмов односвязного полного келерова пространства, имеющего вещественно аналитическую метрику, есть прямое произведение наибольших связных групп автоморфизмов множителей разложения де Рама.

Рассматривается однородное келерово пространство G/B. Известно, что если G приводима, то G/B есть прямое произведение пространств $W_0, W_1, \ldots, W_m$, где W_0 — центр G, обладающий инвариантной келеровой метрикой, а $W_1, \ldots, W_m$ — односвязные однородные келеровы пространства, в которых действуют простые группы. В работе доказано следующее: пусть G/B — однородное келерово пространство, причем G — простая группа и действует на G/B эффективно, тогда однородная группа голономии G/B неприводима. Из этого результата вытекает, что вышеприведенное разложение совпадает с разложением де Рама.

Пусть полупростая группа G эффективно действует в келеровом пространстве G/B. Если риманова связность, порожденная на G/B келеровой метрикой, есть каноническая связность первого рода, то G/B — эрмитово симметрическое пространство. Аналогичный результат получен для случая, когда G — приводимая группа.

Д. В. Беклемишев

8496. Комплексы с недопустимыми автоморфизмами. Гуггенхеймер (Complexes avec automorphismes non admissibles. Guggenheimer H.), Bull. Res. Council Israel, 1957, **A6**, № 2, 83—93 (франц.; рез. англ.)

Пусть $C = \sum' C_r$ — градуированное линейное пространство над нормированным полем K, в котором действует дифференциал ∂ степени — 1. Предположим, что каждое пространство C_r обладает линейно независимым набором элементов, конечные линейные комбинации которых заполняют все C_r. Пусть $C^* = \sum' C_r^*$ — двойственное к C градуированное пространство над K, $\langle x, x^* \rangle$ — естественное скалярное произведение между C и C^*, δ — дифференциал в C^*, сопряженный к ∂. Допустим, что задан однородный мономорфизм $S : C \to C^*$, сохраняющий степени, и пусть $\sum$ — его образ. Потребуем, чтобы: а) $\|x\| = \sqrt{|\langle x, Sx \rangle|}$ являлась

нормой в каждом пространстве C^r; б) $|\langle x, Sy\rangle| = |\langle y, Sx\rangle| \ (x,y\in C)$; в) $\delta\Sigma\subset\Sigma$. Положим $d = S^{-1}\delta S$. Элемент $x\in C$ называется гармоническим, если $dx = dx = 0$. Пусть $A(\partial) = \sum^{\cdot} A_r(\partial)$ — пространство гармонических элементов. Доказывается, что $A(\partial)$ изоморфно пространству $H(\partial)$ гомологий пространства C относительно ∂. Пусть в C существует другой дифференциал ∂' степени -1 и пусть δ' — сопряженный к нему дифференциал в C^*, причем $\delta'\Sigma\subset\Sigma$. Допустим, что в каждом пространстве C_r имеют место соотношения: $\mu_r\partial\partial' + \nu_r\partial'\partial = 0$, $\sigma_r d\partial' + \rho_r\partial' d = 0$, где μ_r, ν_r, σ_r, ρ_r — ненулевые элементы K. Доказывается, что тогда $A(\partial) = A(\partial')$. В то же время, если $\partial\neq 0$, операторы ∂ и ∂' не пропорциональны. Положим $A(C) = A(\partial)$ и пусть $C'\subset C$ — градуированное подпространство, инвариантное относительно ∂ и ∂', $Q = C/C'$. Тогда $A(C)\cong A(C') + A(Q)$. Отсюда выводится, что если M — аналитическое подмногообразие компактного келерова многообразия V, то число линейно независимых элементов пространства $H^r(V, M)$ относительных когомологий с комплексными коэффициентами, содержащих гармонические формы, равно $\dim H^r(V) - \dim H^r(M)$.

А. Л. Онищик

8497. Модификации келеровых многообразий. Гуггенхеймер (Modifications of Kähler Manifolds. Guggenheimer Heinrich), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 87—93 (англ.)

Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, P — его аналитическое подмногообразие. Комплексное многообразие V' называется модификацией многообразия V в подмногообразии P, если существует такое подмногообразие $P'\subset V'$, что $V\setminus P$ и $V'\setminus P'$ аналитически изоморфны. Модификация называется растяжением, если P' имеет те же числа Бетти, что $P\times P^{v-p-1}$, где v и p — комплексные размерности многообразий V и P, P^r — комплексное проективное пространство размерности r. Через $X(M)$ обозначается эйлерова характеристика произвольного многообразия M. Доказывается, что если V' — растяжение многообразия V в P, то $X(V) - X(V') = X(P)(1 - v + p)$. Этот результат был ранее получен Сегре для алгебраических многообразий (РЖМат, 1956, 2452). Далее доказано, что если V' — модификация многообразия V, причем V и V' компактны и келеровы, то геометрические r-роды многообразий V и V' совпадают.

А. Л. Онищик

8498. Основания геометрии бесконечномерных финслеровых пространств. Лаугвиц (Grundlagen für die Geometrie der unendlichdimensionalen Finslerräume. Laugwitz Detlef), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 21—41 (нем.)

Топологическое пространство, в котором можно ввести достаточное число раз дифференцируемую систему координат банахова пространства B, называется бесконечномерным дифференцируемым многообразием (локально линейное пространство B). Совокупность непрерывных линейных функционалов пространства B называется пространством Банаха B_1, сопряженным пространству B, если норма в B_1 определена следующим образом:

$$\|z_i\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|z_i x^i|}{\|x^k\|}.$$

Совокупность мультилинейных непрерывных форм, аргументами которых являются элементы пространств B и B_1 (n элементов из B и m из B_1), называется банаховым пространством B_n^m. Отображение $F^\alpha(x^i)$ открытого множества банахова пространства $B = \{x^i\}$ в банахово пространство $c = \{y^\alpha\}$ называется дифференцируемым в точке (x_0^i), если существует непрерывный линейный оператор L_i^α, отображающий B в C так, что

$$F^\alpha(x_0^i + dx^i) - F^\alpha(x_0^i) = L_k^\alpha dx^k + 0^\alpha(dx^j).$$

Этот линейный оператор называется производной Фреше функции F^α в точке (x_0^i) и обозначается

$$L_k^\alpha = \frac{\delta F^\alpha(x_0^k)}{\delta x^k}.$$

Тензорное исчисление бесконечномерных дифференцируемых многообразий строится как обычно, но только в качестве производных берутся производные Фреше. Например, если координаты точки банахова пространства преобразуются так: $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^i)$, то координаты точки касательного пространства преобразуются по следующему закону: $\bar{\xi}^k = \frac{\delta\bar{x}^k(x^i)}{\delta x^i}\xi^i$.

Компоненты m раз контравариантного и n раз ковариантного тензора можно в каждой координатной системе представить через элементы пространства B_n^m. Вещественное банахово пространство, в котором функция расстояния определяется при помощи положительно определенного функционала $F(\xi)$, обладающего свойствами: 1) F — положительно однородный первой степени и принадлежит классу C^3; 2) $F(\xi+\eta)\leqslant F(\xi) + F(\eta)$; $F(\xi)\neq 0$, $\xi\neq 0$; 3) $\frac{1}{M'}\|\xi\|\leqslant F(\xi)\leqslant M\|\xi\|$, где $M, M' > 0$; 4) $\frac{1}{2}\frac{\delta^2F^2(\xi)}{\delta\xi^i\delta\xi^j}\eta^i\eta^j$ — положительно определенная квадратичная форма для любого ξ,— автор называет бесконечномерным (или конечномерным) пространством Минковского. Автор называет бесконечномерное дифференцируемое многообразие, с каждой точкой которого связано касательное пространство Минковского с метрической функцией $F(x;\xi)$, бесконечномерным финслеровым пространством. Геодезические линии бесконечномерного финслерова пространства определяются уравнениями

$$\frac{\delta^2x^i}{ds^2} + \left[\begin{matrix} i \\ kj\end{matrix}\right]_{\left(x;\frac{\delta x}{ds}\right)}\frac{\delta x^k}{ds}\frac{\delta x^j}{ds} = 0,$$

где

$$\left[\begin{matrix} i \\ kj\end{matrix}\right]_{(x;\xi)} = \frac{1}{2}g^{ir}(x;\xi)\left\{\frac{\delta g_{rk}(x;\xi)}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{rj}(x;\xi)}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{ji}(x;\xi)}{\delta x^r}\right\},$$

$$g_{ij}(x;\xi) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2F^2(x;\xi)}{\delta\xi^i\delta\xi^j}.$$

При помощи векторного поля, определенного вдоль кривой, строится соприкасающееся риманово пространство, которое используется для определения связностей бесконечномерного финслерова пространства, которые являются непосредственным обобщением связностей Тейлора, Синга, Рунда, Бартеля и Картана конечномерных финслеровых пространств.

В. И. Близникас

8499. Аффинные связности в многообразии с кватернионной структурой и преобразования, сохраняющие структуру. Обата (Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure. Obata Morio), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 4, 406—416 (англ.)

На $4m$-мерном многообразии кватернионная структура определяется двумя тензорами (комплексными структурами), удовлетворяющими условиям:

$$\varphi_i{}^a \varphi_a{}^h = -\delta_i{}^h,\ \psi_i{}^a \psi_a{}^h = -\delta_i{}^h,\ \varphi_i{}^a \psi_a{}^h + \psi_i{}^a \varphi_a{}^h = 0.$$

На многообразии кватернионной структуры вводятся аффинные связности, в которых $\varphi_i{}^a$ и $\psi_i{}^a$ ковариантно постоянны. Каждая такая связность однозначно определяется своим тензором кручения. Для того чтобы преобразование, сохраняющее кватернионную структуру, было аффинным по отношению к какой-либо связности, необходимо и достаточно, чтобы оно оставляло инвариантным ее тензор кривизны. На рассматриваемом многообразии можно ввести четыре канонические связности, тензоры кривизны которых выражаются через тензоры $\varphi_i{}^a$ и $\psi_i{}^a$. Любое преобразование, сохраняющее кватернионную структуру, является аффинным по отношению к каждой из этих связностей. Отсюда следует, что группа всех преобразований, сохраняющих кватернионную структуру, есть группа Ли. Рассмотрено многообразие кватернионной структуры, допускающее группу максимальной размерности. Д. В. Беклемишев

8500. Система циклических кривых подпространств, вложенных в риманово пространство. Прванович (Système des courbes cycliques d'un sous-espace plongé dans un espace riemannien. Prvanović Mileva), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, **12**, № 4, 233—243 (франц.; рез. серб.-хорв.)

В римановом пространстве V_n рассматривается вектор

$$v^i = p^i - \frac{1}{\zeta^2}\zeta_j (g^{ij} - t^i t^j),$$

где t_i, p_i — касательный орт кривой и вектор ее геодезической кривизны, а g_{ij} — основной метрический тензор пространства, называемый вектором циклической кривизны этой линии по отношению к векторному полю ζ_i. Система интегральных кривых уравнений $v^i = 0$ называется циклической по отношению к полю ζ_i. Предполагая, что V_n вложено в риманово пространство V_m, автор дает другие характеристики циклических систем и, в частности, показывает, что в случае V_2, вложенного в евклидово V_3, кривые циклической системы характеризуются тем, что их соприкасающиеся круги пересекают круг, ортогональный V_2, диаметр которого совпадает с вектором $2\zeta_i$. При любых m и n, если V_n омбилическое, то кривые циклической системы являются одновременно кривыми соединения (courbes d'union), т. е. их соприкасающиеся плоскости в любой точке V_n пересекают некоторую фиксированную плоскость $m-n$ измерений, исходящую из этой точки. Показывается, что при конформном преобразовании циклическая система остается циклической, и устанавливаются некоторые связи между циклическими системами пространств V_m и V_n. А. П. Норден

8501. О проблеме вложения абстрактного многообразия в проективное многообразие. Нагата (On the imbedding problem of abstract varieties in projective varieties. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1956, A-Math., **30**, № 1, 71—82 (англ.)

Понятие абстрактного многообразия соответствует понятию модели в смысле Нагата (Nagata M., Amer. J. Math., 1956, 78, 78—116). Пусть x, y, z, w — алгебраически независимы над полем K. Положим $u = xy + zw$, $x' = y/u^2$, $y' = u^2 x$, $z' = w/u^2$, $w' = u^2 z$, $\mathfrak{o} = K[x,y,z,w]$, $\mathfrak{o}' = K[x',y',z',w']$ и A, A' — аффинные модели, определенные посредством $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}'$ соответственно. Тогда $M = A \cup A'$ есть несингулярная модель.

Обозначим $P = \mathfrak{o}(y, w)$, $P' = \mathfrak{o}'(y', w')$; F и F' — замыкания для P и P' в M и $P^* \in F$, $P^{**} \in F'$. Если функция f на M вполне определена в P^* и P^{**}, то $f(P^*) = f(P^{**})$, и поэтому M не может быть подмножеством какой-либо проективной модели. Моноидальное преобразование M^* модели M с центром P' есть подмножество проективной модели.

Пусть теперь M — модель над основным кольцом I. Модель M является подмножеством проективной модели тогда и только тогда, если существуют аффинные модели A_i $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, определенные посредством соответствующих колец $\mathfrak{o}_i$, и система элементов a_{ij} такая, что: 1) M есть объединение моделей A_s, 2) $a_{ij} \in \mathfrak{o}_i$, 3) $\mathfrak{o}_i[\mathfrak{o}_j] = \mathfrak{o}[a_{ij}]$, 4) $a_{ii} = 1$, 5) $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$.

Если множества $P_1, \ldots, P_n$ содержатся одновременно в модели M и в аффинной модели A, то существует аффинная модель A^*, которая содержит все P_i и сама содержится в M. Пусть P — множество в модели M. Если индуцированная модель $\Phi_P(M)$ является полной и если моноидальное преобразование M^* модели M с центром P есть подмножество полной модели, то и M есть подмножество полной модели. В. Т. Базылев

8502 К. Теория и применения гармонических интегралов. Ходж (Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale. Hodge W. V. D. Übers. aus dem Engl. Leipzig, Teubner, 1958, VIII, 246 S., 15.75 DM); Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 49, 3612 (нем.)

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

8503. Изотопия параболоидов. II. Захаров Д. А., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1958, **18**, 117—145

Вторая (заключительная) часть статьи автора (РЖМат, 1958, 4221). В первой части было доказано, что всякий параболоид $z = F(x, y)$, где F — однородный многочлен степени n с вещественными коэффициентами, сильно изотопен в E^3 параболоиду $z = r^n \sin^{p_1}\varphi \ldots \sin^{p_k}\left(\varphi - \frac{k-1}{k}\pi\right)$, где z, r, φ — цилиндрические координаты в E^3, при этом все нечетные показатели p_j можно считать равными единице. При соблюдении последнего условия циклическая последовательность $(p_1, \ldots, p_k) = (p_2, \ldots, p_k, p_1) = \ldots$ называется правильным циклом. Основной результат (теорема 8): Для того чтобы два параболоида (указанного выше типа), неизотопных плоскости, были сильно изотопны, необходимо и достаточно, чтобы их степени были равны, а правильные циклы — одинаковые. То же условие остается в силе и для инфинитезимальной изотопии параболоидов, т. е. (теорема 10) инфинитезимальная классификация параболоидов $z = F(x, y)$ совпадает с почти топологической. В. А. Ефремович

8504. Топологические проективные плоскости. Зальцман (Topologische projektive Ebenen. Salzmann H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 101 (нем.)

По аналогии с топологическими группами определяются топологические проективные плоскости. Рассматриваются преимущественно компактные двумерные проективные плоскости. Они оказываются гомеоморфными вещественной проективной плоскости. Все их коллинеации непрерывны. Так же, как для конечных проективных плоскостей, каждый гомоморфизм на невырожденную проективную плоскость является изоморфизмом. Далеко идущая аналогия с конечными проективными плоскостями проявляется также в теоремах, позволяющих вывести справедливость теоремы Дезарга из существования некоторых коллинеаций или некоторых центральных коллинеаций. В частности, компактная двумерная проективная плоскость дезаргова, если группа коллинеаций транзитивна на невырожденных четырехугольниках.

8505. **Одна проблема о покрытии. Нурдландер** (Ett övertäckiningsproblem. Nordländer Göte), Nord. mat. tidskr., 1958, **6**, № 1, 29—31, 56 (шведск.; рез. англ.)

Известна следующая теорема (Rado R., Proc. London Math. Soc., 1950, (2), **51**, 232—264): Если множество n-мерных кубов с параллельными ребрами покрывает часть пространства с (n-мерным) объемом V, то из него можно выделить подмножество кубов без общих внутренних точек, покрывающее часть пространства объема $\varkappa_n V$, где $\varkappa_n \geqslant 3^{-n}$, а если все кубы равны, то $\varkappa_n \geqslant 2^{-n}$. В статье дается новое простое доказательство этого факта. Г. К. Энгелис

8506. **Определение плоских кривых, характеризующихся неравенством, связывающим абсолютные значения функций линейного элемента. Пароди** (Détermination de courbes planes définies par une inégalité entre les valeurs absolues de fonctions des éléments de contact en un point courant. Parodi Maurice), Bull. sci. math., 1958, **68**, № 9, 217—218; **82**, № 1, 14—16 (франц.)

По теореме Адамара, чтобы определитель n-го порядка $A = \| a_{ij} \|$ был отличен от нуля, достаточно, чтобы

$$| a_{ii} | > \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} | a_{ij} | \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что интегральные кривые дифференциального уравнения $\Delta(x, y, y') = 0$, где $\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_1 \end{vmatrix}$, удовлетворяют неравенству

$$| \varphi_1(x, y, y') | \leqslant | \varphi_2(x, y, y') | + | \varphi_3(x, y, y') |.$$

Я. П. Бланк

8507. **Упорядоченные проективные плоскости. Крампе** (Angeordnete projektive Ebenen. Crampe Sibylla), Math. Z., 1958, **69**, № 5, 435—462 (нем.)

Тернар, являющийся упорядоченным множеством, называется упорядоченным тернаром, если из $b_1 < b_2$ вытекает $am \circ b_1 < a \cdot m \circ b_2$, из $m_1 < m_2$ и $x > x_s$ — $xm_1 \circ b_1 < x \cdot m_2 \circ b_2$, а из $m_1 < m_2$ и $x < x_s$ — $xm_1 \circ b_1 > x \cdot m_2 \circ b_2$, где $x_s m_1 \circ b_1 = x_s m_2 \circ b_2$. Аффинная плоскость над упорядоченным тернаром оказывается упорядоченной, если считать, что точка (x_2, y_2) лежит между (x_1, y_1) и (x_3, y_3) в следующих случаях: а) если $x_1 = x_2 = x_3$ и $y_1 < y_2 < y_3$ или $y_1 > y_2 > y_3$, б) если $y_i = x_i \cdot m \circ b$, $i = 1, 2, 3$, и $x_1 < x_2 < x_3$ или $x_1 > x_2 > x_3$. Если тернар является полным упорядоченным множеством (т. е. каждое ограниченное сверху непустое подмножество тернара обладает точной верхней гранью), то он оказывается упорядоченным тернаром, если из $b_1 < b_2$ вытекает $am \circ b_1 < am \circ b_2$, из $x_1 < x_2$ и $u > 0$ — $x_1 u \circ v < x_2 u \circ v$, из $x_1 < x_2$ и $u < 0$ — $x_1 \cdot u \circ v > x_2 \cdot u \circ v$, из $u_1 < u_2$ и $x > 0$ — $xu_1 \circ v < xu_2 \circ v$, из $u_1 < u_2$ и $x < 0$ — $xu_1 \circ v > x \cdot u_2 \circ v$. Исследуется независимость перечисленных условий. Выясняется связь между упорядоченностью и функцией порядка (РЖМат, 1956, 5490). Л. А. Скорняков

8508. **Основы N-мерной конечной проективной геометрии. Каструччи** (Foundations of N-dimensional finite projective geometry. Castrucci Benedito. Bol. Soc. Mat. São Paulo, 1952—1954, **7**, i—ii, 83 p.) (порт.)

Статья представляет собой изложение диссертации, защищенной в 1951 г. в Сан-Пауло. Она грамотно написана и может быть интересна для начинающего специализироваться студента. Предметом изучения является N-мерная проективная геометрия над произвольным конечным полем со значительным ударением на вычисления. Насколько рецензент может судить в 1956 г., в статье нет ничего, чтобы было для него новым в 1951 г., когда она была написана. Библиография (46 названий) несколько вводит в заблуждение тем, что она содержит много статей (например, семь статей Муфанг (R. Moufang)), которые по существу не относятся к теме работы. R. H. Bruck

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 522

8509. **Аффинное пространство S_4 как плоскость над квазителом в связи с конфигурационным предложением T_2'. Панелла** (Lo S_4 lineare affine come piano sopra un quasicorpo, in relazione alla proposizione configurazionale T_2'. Panella Gianfranco), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, **8**, № 1-3, 207—214 (итал.)

Строится пример такого веблен-веддербарнова тела (квазитела) характеристики 3, что каждая точка соответствующей веблен-веддербарновой плоскости принадлежит как четырехвершиннику с коллинеарными диагональными точками, так и четырехвершиннику с неколлинеарными диагональными точками (см. РЖМат, 1956, 749, 3254). Л. А. Скорняков

8510. **О полных k-дугах над $GF(q)$. Сегре** (On complete k-arcs over $GF(q)$. Segre B.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 110 (англ.)

k-дуга, т. е. множество из k точек проективного пространства размерности 2 над полем Галуа $GF(q)$, никакие три из которых не коллинеарны,— называется полной, если она не содержится ни в какой $(k+1)$-дуге. Тогда $k \leqslant q+1$ или $k \leqslant q+2$ в соответствии с тем, нечетно или четно q. Исследуются (очевидным образом полные) k-дуги с максимальным k (для нечетного q и $k = q+1$ их точки обязательно являются точками конической кривой). Даются критерии полноты и другие примеры полных k-дуг. Показано также, что если k достаточно мало или достаточно велико по сравнению с q и меньше, чем указанный выше максимум, то ни одна k-дуга не является полной.

8511. **Обобщение одной редукционной теоремы о геометрических порядках. Хаупт** (Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes. Haupt Otto), J. reine und angew. Math., 1958, **200**, № 3-4, 170—181 (нем.)

Под точечным порядком множества M в проективном пространстве P_n относительно гиперплоскости L_{n-1} понимают мощность пересечения $D = M \cap L_{n-1}$; под компонентным порядком M относительно L_{n-1} — мощность множества (число) компонент пересечения M с L_{n-1} (компонента множества — всякое его непустое максимальное связное подмножество). Говорят, что M имеет ограниченный сильный компонентный порядок, равный a, если существует натуральное число a, являющееся наибольшим среди числа компонент пересечения M с любой гиперплоскостью пространства P_n; если пересечения рассматриваются не со всеми гиперплоскостями, а исключается некоторое нигде не плотное множество гиперплоскостей, то говорят о слабом компонентном порядке. Соответственно определяются сильный и слабый точечные порядки множества. Если множество является континуумом, то, как доказывается, из того, что оно имеет слабый компонентный порядок $= a$, следует, что оно обладает и сильным компонентным порядком $a' (< 1 + 2^{n+1}(n+1)a^2)$. Для континуума C, обладающего слабым компонентным порядком, автором было доказано (Math. Ann., 1948, **120**), что при условии ограниченного слабого точечного порядка C является суммой дуг и если множество гиперплоскостей, имеющих с C разрывные пересечения (такие, компоненты которых одноточечные), будет плотным во множестве всех гиперплоскостей пространства, то C обладает слабым точечным порядком и, следовательно, является суммой дуг. В настоящей работе доказаны обратные теоремы. Теоремы эти используются при обобщении результатов Маршо (Marchaud A., Acta math., 1930, 55), доказав-

шего, что у замкнутых и открытых дуг евклидова пространства E_n сильные точечные порядки совпадают (если хотя бы один из них ограничен). Это предложение справедливо и для деревьев с ограниченным слабым точечным порядком, при условии, что вершины их линейно независимы. В настоящей работе рассматриваются более общие множества — так называемые континуумы с приводимым порядком (пп.-континуумы, ordnungsreduzibile Kontinuen); они обладают следующим свойством: в каждом k-мерном линейном подпространстве L_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, содержащемся в гиперплоскости L_{n-1}, содержится L_{k-1}, не имеющее общих точек по крайней мере с одной содержащейся в L_k опорной компонентой пересечения $C \cap L_{n-1}$ (компонента множества называется опорной, если ее замыкание не имеет общих точек по крайней мере с одной гиперплоскостью L'_{n-1}, а все точки пересечения этого множества с гиперплоскостями из окрестностного пучка L'_{n-1}, имеющими в компоненте точку сгущения, лежат по одну сторону L'_{n-1}). Примерами пп.-континуумов (не содержащих континуальных частей гиперплоскости) являются: простая дуга; дерево, вершины которого линейно независимы; сумма дуг S со следующим свойством: если множество E конечных точек S ранга t, то найдется такая точка $e \in E$, что ранг $E - e$ не больше $t-1$. Для пп.-континуума C доказывается обобщение теоремы Маршо, состоящее в том, что точечный порядок C (предполагается, что C ранга n и имеет ограниченный слабый точечный порядок) относительно множества f гиперплоскостей, пересечение которых с C не содержит опорных компонент, совпадает с точечным порядком относительно некоторого открытого подмножества f', плотного во множестве всех гиперплоскостей. Далее доказывается, что если пп.-континуум ранга n является суммой дуг, то из существования ограниченного слабого компонентного порядка вытекает существование равного ему сильного компонентного порядка и наоборот. Наконец, выводится, что если пп.-континуум ранга n имеет ограниченный слабый точечный порядок, равный k, то любой (т. е. по отношению к любому множеству гиперплоскостей), как слабый, так и сильный точечный и компонентный порядки также равны k. А. Г. Школьник

8512. **Обобщение принципа максимума Хопфа и приложение к римановой геометрии. Калаби** (An extension to E. Hope's maximum principle with an application to Riemannian geometry. Calabi E.), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 45—56 (англ.)

Речь идет о распространении принципа максимум на недифференцируемые функции, удовлетворяющие некоторому эллиптическому дифференциальному неравенству.

Пусть L — линейный оператор

$$L[u] = \sum a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x} + \sum b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i},$$

$$x = (x^1 x^2 \ldots x^n),\ u = f(x),$$

такой, что для окрестности каждой точки x существуют числа C_1, C_2, C_3 такие, что

$$|b^i(x)\xi_i| \leqslant C_1 \left(\sum_1^n \xi_i^2\right)^{1/2},$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C_2 \left(\sum \xi_i^2\right)^{1/2},$$

$$|a^{ij}(x)| \leqslant C_3$$

для любого набора $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$.

Для полунепрерывной сверху функции $u = f(x)$ в связной открытой области U и любой функции $v = \Phi(x)$, по определению,

$$L[u] \text{ (слабо)} \geqslant v$$

в любом подмножестве $K \subset U$, если для любой точки $x_0 \in K$ и произвольного малого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V_{x_0,\varepsilon} \subset U$ точки x_0 и функция $u_{x_0,\varepsilon} = f_{x_0,\varepsilon}(x)$ класса C^2 в $V_{x_0,\varepsilon}$ такие, что

$$f(x) - f_{x_0,\varepsilon}(x) \geqslant f(x_0) - f_{x_0\varepsilon}(x_0) \quad (x \in V_{x_0,\varepsilon})$$

и $u_{x_0,\varepsilon}$ удовлетворяет неравенству

$$L[u_{x_0,\varepsilon}] \geqslant v - \varepsilon \text{ в точке } x_0$$

в строгом смысле. Аналогично, если u полунепрерывна снизу,

$$L[u] \text{ (слабо)} \leqslant v,$$

если $L[-u]$ (слабо) $\geqslant -v$ в только что определенном смысле. Если $u = f(x) \in C^2$ и $V = \varphi(x)$ — произвольная функция, то $L[f] \geqslant \Phi(x)$ в обычном смысле тогда и только тогда, когда это имеет место в слабом только что определенном смысле.

Теорема. Если $u = f(x)$ — функция, полунепрерывная сверху, определенная в связной открытой области U,

$$L[u] \text{ слабо } \geqslant 0 \text{ везде в } U$$

и достигает локального минимума в некоторой точке $x \in U$, то u — постоянная в U.

Из геометрических приложений отметим три теоремы: 1. Если X — n-мерное риманово многообразие с регулярной метрикой, $p_0 \in X$, $Y = Y(p_0)$ — область определения функции геодезического расстояния $r(p) = d(p_0 p)$, R_{ij} — тензор Риччи положительно полуопределен и Δ — оператор Бельтрами — Лапласа, то везде в Y имеет место

$$\Delta r \text{ (слабо)} \leqslant \frac{n-1}{r}.$$

В частности, если X полно, то это имеет место во всем X.

2. Если функция $\Phi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируема, монотонно убывающая (возрастающая), определенная для $0 < a \leqslant t \leqslant b$, то в предположениях предыдущей теоремы функция $v(p) = \Phi(r(p))$ для $p \in Y(p_0) \cap \left(\sum(p_0 b) - \overline{\sum}(p_0 a)\right)$ удовлетворяет

$$\Delta v \text{ (слабо)} \geqslant \Phi''(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'(r),$$

$$(\Delta v \text{ (слабо)} \leqslant \Phi''(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'(r)),$$

здесь $\sum(pr) = \{q \mid q \in X;\ d(pq) < r\}$, $\overline{\sum}$ — замыкание этого шара; и, наконец,

3. Если X — полное риманово многообразие с регулярной метрикой, неотрицательной кривизной Риччи $f(t)$ — положительная монотонно возрастающая, дифференцируемая функция, определенная на всей вещественной оси такая, что

$$\int_0^\infty \left(\int_0^s f(t)\,dt\right)^{-n/2} ds < \infty,$$

то не существует глобального в X решения уравнения

$$\Delta u \text{ (слабо)} \geqslant f(u).$$

Эта теорема является обобщением теоремы Оссермана (Osserman R. Techn. Repts. 3. December 16, 1956, Stanford Univ.) и доказательство ее аналогично его доказательству. К. М. Белов

8513. Равномерное распределение на сфере. Кац (Uniform distribution on a sphere. Kac M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 5, 485—486 (англ.; рез. русск.)

Доказана следующая теорема: Пусть $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — траектория точки, движущейся по поверхности единичной сферы трехмерного пространства. Если проекция траектории $P(t)$ на любой диаметр сферы покрывает его равномерно, то и сама траектория (t) покрывает сферу равномерно, т. е. для любой области R линейная мера множества $E_t\{P(t) \in R\}$ равна $\frac{|R|}{4\pi}$, где $|R|$ — площадь области R. K. Urbanik

8514. О геометриях кругов с ограниченной группой Мёбиуса. Бенц (Über Kreisgeometrien mit eingeschränkter Möbius-gruppe. Benz W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 104 (нем.)

8515. О системах изогональных сфер. Лагранж (Sur les systèmes isogonaux de sphères. Lagrange René), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 3, 225—244 (франц.)

Рассматриваются системы n сфер (точнее гиперсфер) пространства Евклида E_N такие, что углы, которые попарно образуют сферы семейства, одинаковы, т. е. для сфер семейства u_i величины

$$(u_i\, u_j) = \frac{R_i^2 + R_j^2 - \overrightarrow{A_iA_j}^2}{2R_iR_j} = \cos\alpha,$$

где R_i, A_i — соответственно радиус и центр сферы, равны. При этом различаются „строго изогональные" семейства, когда равенство величин (u_iu_j) выполняется точно, и „изогональные в широком смысле", когда равны модули величин (u_iu_j). Изогональное семейство называется регулярным, если определитель матрицы $\|(u_iu_j)\|$ отличен от нуля. Оказывается, что регулярность имеет место, если выполняются неравенства $\cos\alpha \neq 1$, $\cos\alpha \neq -\frac{1}{n-1}$. Если изогональная система m сфер обладает тем свойством, что каждые k первые сферы семейства образуют регулярную систему, то $u_k = \sum_1^k \lambda_{ki}\omega_i$, где ω_i — система ортогональных сфер, причем величины λ_{ki} вычисляются через $\cos\alpha$. Доказываются теоремы существования: 1) „Строго изогональная" система действительных и пересекающихся сфер может быть реализована в E_N при $n < N+2$ для всех значений $\cos\alpha$, а при $n = N+2$ только для тех значений $\cos\alpha$, для которых выполняется неравенство $-\frac{1}{N+1} \geqslant \cos\alpha > -1$; 2) Можно всегда реализовать „строго изогональную" систему n сфер в E_N действительных или чисто мнимых, исключая случаи: $n = N+2$ и, $-\frac{1}{N+1} < \cos\alpha \leqslant 1$, $\cos\alpha \neq 0$. В случае $\cos\alpha = 0$, $n = N+2$ необходимо $N+1$ сфера действительная и одна чисто мнимая. Приложения не рассмотрены.

В. И. Ведерников

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

8516. Экстремальная проблема, связанная с конечной точечной системой. Картеси (Extremalaufgaben über endliche Punktsysteme. Kárteszi Fránz), Publs mat., 1955, **4**, № 1-2, 16—27 (нем.)

Автор рассматривает систему n точек на вещественной аффинной плоскости, из которых никакие три не коллинеарны. Говорят, что точка P, не принадлежащая ни одной из $\binom{n}{2}$ соединяющих эти точки прямых, покрывается k раз, если она лежит внутри ровно k из $\binom{n}{3}$ треугольников. Для заданной системы и различных положений P k имеет определенный максимум $W(n)$ и минимум $V(n)$; так, $W(3) = V(3) = 1$, $W(4) = V(4) = 2$, $W(5) = V(5) = 5$, $W(6) = V(6) = 8$. На основании остроумного соображения автор доказывает, что $W(n) = \frac{n(n^2-1)}{24}$ или $\frac{n(n^2-4)}{24}$ соответственно тому, является n четным или нечетным; например, $W(7) = 14$. Он приводит пример системы из 7 точек таких, что имеется область, где $k = 13$, но нет области, где $k = 14$, показывая таким образом, что $V(7) < W(7)$.

H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 10, 1047.

8517. Об овалах типа n. Ли Да-цянь (Lee Datsin), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 4, 623—627 (кит.; рез. англ.)

Овал C называется овалом типа n, если коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ разложения Фурье радиуса кривизны $\rho(\varphi)$ равны нулю, а оба коэффициента a_{n+1}, b_{n+1} не равны нулю. Автор показывает, что овал типа n имеет по меньшей мере $\left(\frac{n+1}{2}\right) + \Delta$ описанных квадратов (здесь $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ равно $\frac{n+1}{2}$ или $\frac{n+2}{2}$, а Δ равно 0 или 1, в зависимости от нечетности или четности n). Э. Г. Позняк

8518. Замечания по поводу ранее опубликованной статьи. Пароди (Remarque au sujet d'un travail antérieur. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 26, 3573—3574 (франц.)

В ранее опубликованной работе (РЖМат, 1958, 7117) было доказано, что решения дифференциального уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ где } \varphi_i = \varphi_i(x, y, y'),$$

удовлетворяют неравенству $|\varphi_1| \leqslant |\varphi_2| + |\varphi_3|$.

В настоящей статье доказывается, на основании одной теоремы А. Островского, что для этих функций справедливы и следующие неравенства:

$$|\varphi_1| \leqslant 2^{1-\alpha} |\varphi_2|^{1-\alpha} |\varphi_2 + \varphi_3|^{\alpha},$$

$$|\varphi_1| \leqslant 2^{1-\alpha} |\varphi_3|^{1-\alpha} |\varphi_2 + \varphi_3|^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Я. П. Бланк

8519. Определение плоских кривых, характеризующихся неравенством, связывающим абсолютные значения функций линейного элемента. Пароди (Détermination de courbes planes définies par une inégalité entre les valeurs absolues de fonctions des éléments de contact en un point courant. Parodi M.), Rev. math. spéc., 1958, **68**, № 9, 217—218 (франц.)

См. реф. 7281.

См. также: 7615, 7737, 7827, 7879, 8119

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

8520. К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей. Саульев (On the solution of the problem of eigenvalues by the method of finite differences. Saul'ev V. K.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, 8, 257—287 (англ.)
Перевод с русского (РЖМат, 1956, 4091).

8521. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Лозинский С. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 52—90

Статья является первой частью работы, посвященной оценке погрешности численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Она состоит из введения и двух глав. Введении дается краткий критический анализ существующих методов оценки погрешности численного интегрирования, некоторые обозначения, применяемые во всей работе. Здесь же кратко, без доказательств, приводятся известные свойства норм матриц и векторов, а также вводится и исследуется существенное для развиваемой теории понятие логарифмической нормы матрицы. Введение заканчивается тремя аналитическими леммами.

В первой главе дается определение метода $[A, \rho]$, который по существу является методом Адамса для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Путем некоторого преобразования уравнения ошибки дается неравенство для нормы преобразованной ошибки. Во второй, основной, главе дается априорная и апостериорная оценки для экстраполированного метода. Подробно излагается методика применения этих оценок на практике. При выводе оценок предполагается, что гарантировано существование решения рассматриваемого дифференциального уравнения (или системы) на том интервале, на котором производится численное интегрирование, и что располагаем некоторой, хотя бы весьма грубой, предварительной оценкой для расположения графика решения. Несмотря на то, что теория оценки погрешности излагается в статье в упрощенной форме (во второй части работы автор предполагает дать более сложные оценки), логическая структура двух основных теорем, касающихся оценки погрешности численного интегрирования экстраполяционным методом, очень сложна. В них много „переплетающихся" условий. По мнению автора, это обстоятельство обусловлено существом дела. М. А. Алексидзе

8522. Метод интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, подверженной одному типу численной неопределенности. Кемпбелл (A method for integrating a set of ordinary differential equations subject to a type of numerical indeterminacy. Campbell Edwin S.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 60, 229—233 (англ.)

При решении на электронных цифровых машинах некоторых систем дифференциальных уравнений, относящихся к физике горения, встретилась трудность, которая в обобщенном виде состоит в следующем.

Дана система $du_j/dz = F_j(u_1, u_2, \ldots, u_n, z)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Затруднение связано с первыми двумя уравнениями. F_1 получается в результате вычитания близких между собой чисел, одно из которых зависит от u_2. Поэтому s значащих цифр u_2 определяют $s - p$ значащих цифр F_1, но восстановить u_2 по F_1 можно без потери значащих цифр. u_1 и F_2 определяют друг друга без потери значащих цифр.

Решение обычными методами численного интегрирования, как легко видеть, быстро ведет к потере точности. Поэтому применяется метод последовательных приближений. Для получения первого приближения принимают, в частности, $F_1(z) \equiv 0$. Пусть уже получено k-е приближение: $u_1^{(k-1)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)}$, заданные в точках $z_p = z_0 + ph (z_0 \leqslant z_p \leqslant z)$. Тогда путем численного дифференцирования $u_2^{(k)}$ получаем $F_2^{(k)}$, по нему определяем $u_1^{(k)}$, путем численного дифференцирования находим $F_1^{(k)}$, а по нему $u_2^{(k+1)}$. Затем при помощи обычного численного интегрирования системы $du_j/dz = F_j$ $(j = 3, \ldots, n)$ получаем $u_j^{(k+1)}$ $(j = 3, \ldots, n)$.

По сравнению со способом релаксации, также применимым в данном случае, изложенный метод требует больше вычислений, но метод релаксации содержит действия, с трудом поддающиеся алгоритмизации, в то время как данный метод хорошо приспособлен для машинного решения. М. Л. Бродский

8523. О решении краевых задач с большим числом степеней свободы. Уорнер (On the solution of «Jury» problems with many degrees of freedom. Warner F. J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 60, 268—271 (англ.)

Предлагается следующее обобщение хорошо известного метода решения двухточечных граничных задач. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями $x(u) = a$, $x(v) = b$.

Интегрируем (1) с помощью двух различных начальных значений x_1' и x_2'. Соответствующие значения на концах обозначим через $x_1(v) = c_1$, $x_2(v) = c_2$. С помощью этих двух значений производим обратное интерполирование и находим новое значение x_3'. Производя интегрирование (1) с помощью x_3', получаем $x_3(v) = c_3$. Затем предлагается повысить степень интерполяционного многочлена для нахождения нового приближения производной в начальной точке.

Этот же метод предлагается перенести на уравнения с большим числом степеней свободы, т. е. для уравнений, которые требуют задания трех и больше условий в начальной точке. Указывается, что предлагаемый метод проверялся для различных уравнений и обеспечивал довольно быструю сходимость процесса. Приводятся числовые примеры. М. А. Алексидзе

8524. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даугавет И. К., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 158—165

Рассматривается граничная задача $L(x) = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}x +$

$$+ \lambda\left[a_1(t)\frac{d^{2k-1}}{dt^{2k-1}}x + \ldots + a_{2k}(t)x\right] = y(t), \qquad (1)$$

$$x(-1) = x'(-1) = \ldots = x^{(k-1)}(-1) = 0, \quad x(1) = x'(1) = \ldots$$
$$\ldots = x^{(k-1)}(1) = 0, \qquad (2)$$

для приближенного решения которой применяется метод Галеркина с алгебраическими координатными функциями. Изучается поведение погрешности в зависимости от числа координатных функций и свойств точного решения задачи (1), (2). Основные результаты изложены в двух теоремах:

Теорема 1. Пусть λ не есть собственное число задачи (1), (2), коэффициенты $a_i(t)$ уравнения (1) — достаточно гладкие функции, $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2), $x_n(t)$ — „приближенные решения", найденные по ме-

тоду Галеркина. Тогда для $t \in [-1, +1]$ имеют место оценки

$$\left| \frac{d^s}{dt^s}[x^*(t) - x_n(t)] \right| \leqslant C E_n^{(s)}(x^*) n^{k-s-\frac{3}{2}},$$

$$0 \leqslant s \leqslant k-3,$$

$$\left| \frac{d^s}{dt^s}[x^*(t) - x_n(t)] \right| \leqslant C E_n^{(s)}(x^*) \sqrt{n} \ln n,$$

$$s = k-2,\ k-1,\ k,$$

где $E_n^{(s)}(x^*) = \inf\limits_{Q_n} \sup\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{d^s}{dt^s}[x^*(t) - (1-t^2)^k Q_n(t)] \right|$

и inf берется по всем полиномам $Q_n(t)$ степени не выше n.

Теорема 2. Если в условиях предыдущей теоремы решение $x^*(t)$ задачи (1), (2) r раз непрерывно дифференцируемо и его r-я производная удовлетворяет условию Липшица с показателем α, то справедливы оценки

$$\left| \frac{d^s}{dt^s}[x^*(t) - x_n(t)] \right| \leqslant \begin{cases} n^{\frac{c}{r-k+\alpha+3/2}}, & 0 \leqslant s \leqslant k-3, \\ n^{\frac{c \ln n}{r-s+\alpha-1/2}}. \end{cases}$$

М. А. Алексидзе

8525. Некоторые трудности, присущие решению двухточечных граничных задач методом конечных разностей. Митчелл. (Some inherent difficulties in the solution of two-point boundary problems by finite difference methods. Mitchell A. R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 163 (англ.)

Если шаг сетки мал и вычисления ведутся с несколькими точными значащими цифрами, то, вообще, считается, что решение разностного уравнения является хорошей аппроксимацией к решению данного дифференциального уравнения. Однако, как показывается в работе на примерах двухточечных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, это часто не имеет места.

8526. Построение верхних и нижних приближений для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гетманцев (Побудова верхніх і нижніх наближень для розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Гетманцев В. Д.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1957, **26**, 65—70 (укр.)

Дано краткое изложение метода построения верхних и нижних приближений для решения системы n линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$dy/dx = A(x)y + f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, где вектор $f(x)$ и матрица $A(x)$ непрерывны. Вводя постоянную матрицу H, элементы которой h_{ij} удовлетворяют условиям

$$h_{ij} = \begin{cases} \max a_{ij}(x), & \text{если } \max a_{ij}(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \max a_{ij}(x) < 0, \end{cases}$$

и матричное уравнение

$$dY/dx = HY,\ Y(0) = E,$$

автор заменяет данную систему интегральным уравнением

$$y(x) = Y(x)y_0 + \int_0^x Y(x-\xi)f(\xi)d\xi + \int_0^x Y(x-\xi)[A(\xi) - H]y(\xi)d\xi$$

и, пользуясь рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = Y(x)y_0 + \int_0^x Y(x-\xi)f(\xi)d\xi + \int_0^x Y(x-\xi)[A(\xi) - H]y_n(\xi)d\xi,$$

доказывает, что если $y_n(x) \leqslant y(x)$, то $y_{n+1}(x) \geqslant y(x)$. Указан способ построения верхней и нижней исходных функций, решен один пример. Полученные верхние и нижние приближения к решению приведенной системы не являются функциями Чаплыгина и сходятся к искомому решению немонотонно. К. В. Задирака

8527. О приближенном решении некоторого класса дифференциальных уравнений второго порядка методом С. А. Чаплыгина. Меннам Ким, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1957, вып. 2, 257—262

Рассматривается нелинейное уравнение

$$dy'/dx = f(x, y, y') \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{2}$$

Предполагая, что непрерывная вместе с первыми производными функциями $f(x, y, y')$ конечна и положительна в области $x_0 < x < x_1;\ y_0 < y \leqslant +\infty;\ y_0' \leqslant y' \leqslant +\infty$ и, кроме того, $\partial f/\partial y < 0$, автор строит последовательности верхних и нижних функций, сходящиеся к искомому решению. Построения автора повторяют прием, примененный Л. М. Воробьевым (Успехи матем. наук, 1956, **1**, 67) к решению задачи (1), (2) в случае $\partial f/\partial y > 0$. Б. Н. Бабкин

8528. О построении оценок для собственных значений краевой задачи Штурма—Лиувилля. Буравский (Про побудову оцінок для власних значень крайової задачі Штурма—Ліувілля. Буравський Є. С.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1957, **26**, 51—63 (укр.)

Излагается способ построения верхних и нижних оценок для собственных значений краевой задачи Штурма—Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y,\ \sin\alpha y(0) + \cos\alpha y'(0) = 0,\ \sin\beta y(l) + \cos\beta y'(l) = 0, \tag{1}$$

где $q(x)$ и $\rho(x)$ — ограниченные функции на сегменте $[0, l]$. Автор использует известные результаты о том, что если известны грубые оценки λ_k и $\bar{\lambda}_k$ для k-го собственного значения задачи ($\lambda_k \leqslant \lambda_k \leqslant \bar{\lambda}_k$), то можно эти оценки улучшить следующим образом: если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на $[0, l]$ и удовлетворяет краевым условиям задачи, а

$$\tilde{\lambda} = \frac{\int_0^l f(x)[-f''(x) + q(x)f(x)]\,dx}{\int_0^l \rho(x)f^2(x)dx},$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\int_0^l [-f''(x) + q(x)f(x) - \tilde{\lambda}\rho(x)f(x)]^2 dx}{\int_0^l \rho(x)f^2(x)dx}}, \tag{2}$$

то для λ_k имеет место двусторонняя оценка

$$\tilde{\lambda} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_{k+1}\tilde{\lambda}} \leqslant \lambda_k < \tilde{\lambda}_k + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_{k+1}},\ \text{при } \tilde{\lambda}_{k-1} + \varepsilon \leqslant \tilde{\lambda} \leqslant \lambda_{k+1} - \varepsilon, \tag{3}$$

$$\tilde{\lambda} - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2 - \tilde{\lambda}} \leqslant \lambda_1 < \tilde{\lambda},\ \text{при } \tilde{\lambda} < \lambda_2 - \varepsilon. \tag{4}$$

В качестве функции $f(x)$ автор строит последовательность функций $f(x) = f(x, \lambda_1, t_1)$, $f(x) = f(x, \lambda_2, t_2) \ldots$,

представляющих собой приближения к собственным функциям задачи, где λ_i, t_i — значения параметров λ и t, при которых $f(x, \lambda, t)$ дает минимальную невязку при подстановке ее в дифференциальное уравнение задачи (1).

Подставляя в формулах (2) вместо f функции этой последовательности и пользуясь неравенствами (3) и (4), автор получает последовательность нижних и верхних оценок для собственных значений задачи (1). Для первого собственного значения краевой задачи

$$-y'' + (x-1{,}5)y = \lambda y,\ y(0) = y(1) = 0$$

получены оценки $8{,}8685225 < \lambda_1 < 8{,}8685226$.

К. В. Задирака

8529. Аппроксимация собственных значений методом наименьших квадратов. Швейцер (On approximate eigenvalues obtained by the method of least squares. Schweizer Berthold), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 3, 284—288 (англ.)

Рассматривается краевая задача $\mathfrak{M}(y) + \lambda \mathfrak{N}(y) = 0$, (1)

$$\sum_{s=0}^{m-1} [A_{rs} D^s y(a) + B_{rs} D^s y(b)] = 0 \quad (r = 1,2,\ldots,m), \qquad (2)$$

где $\mathfrak{M}(y) = \sum_{r=0}^{m} p_r D^r y$, $\mathfrak{N}(y) = \sum_{r=0}^{n} q_r D^r y$, $D^r y$ обозначает r-ю производную y, p_r и q_r непрерывные или кусочно-непрерывные вещественные функции на $[a, b]$ вещественной оси, $p_m(x) \neq 0$ на $[a, b]$, A_{rs} и B_{rs} — данные постоянные; m линейных алгебраических уравнений системы (2) предполагаются линейно независимыми. С помощью метода наименьших квадратов находятся приближения к собственным значениям и собственным функциям этой задачи. Решение задачи (1), (2) ищется в форме $v_N = a_1 f_1 + \ldots + a_N f_N$, где $a_1, \ldots, a_N$ — произвольные постоянные, а $f_1, \ldots, f_N$ — линейно независимые на $[a, b]$ и удовлетворяют m граничным условиям (2). Подставляя v_N в (1) и используя условия минимума квадрата полученной невязки

$$\varepsilon_N(x, \lambda, a_1, \ldots, a_N) = \mathfrak{M}(v_N) + \lambda \mathfrak{N}(v_N),$$

автор получает систему N однородных линейных уравнений, включающих параметр λ, для нахождения a_i

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \int_a^b (\mathfrak{M}_i + \lambda \mathfrak{N}_i)(\mathfrak{M}_j + \lambda \mathfrak{N}_j)\, dx = 0,$$

$(i, j = 1,2,\ldots,N)$, где $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}(f_i)$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}(f_i)$,

а из условия существования нетривиальных решений этой системы получает уравнение

$$D_N(\lambda) = \det \left[\int_a^b (\mathfrak{M}_i + \lambda \mathfrak{N}_i)(\mathfrak{M}_j + \lambda \mathfrak{N}_j)\, dx \right] = 0$$

для определения λ. Исследуется спектр собственных значений задачи (1), (2) в зависимости от характера корней последнего уравнения.

К. В. Задирака

8530. Новый метод вывода простых формул для собственных значений обыкновенных линейных самосопряженных дифференциальных уравнений. Уитмейер (A new method for developing simple formulae for the eigenvalues of linear ordinary self-adjoint differential equations. Wittmeyer H.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 2, 111—143 (англ.)

Рассматривается задача о кручении нецилиндрического бруса, один из концов которого жестко закреплен. Для вычисления первой собственной частоты крутильных колебаний бруса μ_1 составляется вариационная задача, которая затем преобразуется общим методом Лагранжа к задаче с тремя варьирующимися функциями. Посредством замены независимого переменного получается вариационная задача, в которой под знаком интеграла стоит квадратичная форма от варьирующихся функций и их производных, причем все коэффициенты этой формы, кроме одного, постоянны. Для приближенного решения единственный переменный коэффициент („точная задача“) заменяется постоянной b („упрощенная задача“). Непрерывный линейный переход от упрощенной задачи к точной осуществляется при помощи параметра ε так, что при $\varepsilon = 0$ получаем упрощенную задачу, а при $\varepsilon = 1$ — точную. Число b выбирается так, чтобы $\partial \mu_1(0, b)/\partial \varepsilon = 0$. Вычисление b производится также при помощи приближенных приемов. „Упрощенная задача“ имеет простое точное решение. В результате получаются сравнительно простые формулы для вычисления собственной частоты крутильных колебаний μ_1 при произвольных достаточно гладких функциях, задающих жесткость при кручении и момент инерции поперечных сечений бруса. Эти формулы в некоторых случаях дают большую погрешность (до 14%), поэтому, действуя математически недостаточно обоснованно („эвристически“), автор получает метод введения поправки, сводящий погрешность в большинстве рассмотренных им случаев к величине, меньшей 1%.

Метод обобщен на случай, когда вычисляются другие собственные частоты крутильных колебаний, на задачу о собственных частотах поперечных колебаний бруса, закрепленного консольно, и, наконец, на общую вариационную задачу, соответствующую уравнению $\sum_{m=0}^{N} (-1)^m [g_m(\cdot)\, y^{(m)}] - \lambda a_0(x)\, y = 0$ с граничными условиями $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(N-1)}(0) = 0$ и естественными граничными условиями при $x = l$, где $g_m(x) \geqslant 0$, $a_0(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, и наложены некоторые ограничения на гладкость $g_m(x)$, $a_0(x)$.

М. Л. Бродский

8531. Определение собственных функций уравнения Штурма—Лиувилля при помощи разложений в тригонометрические ряды. Деннис (The determination of eigenfuction of the Sturm—Liouville equation. Expansion in trigonometric series. Dennis S. C. R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 371—383 (англ.)

Рассматривается однородная задача Штурма—Лиувилля

$$y'' + [q(x) + \lambda r(x)]\, y = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$y'(0) = h_1 y(0), \quad y'(l) = h_2 y(l). \qquad (2)$$

Собственная функция для уравнения (1) ищется в виде:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n,$$

где X_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ есть собственные функции уравнения

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями (2) (α—действительное). Функции X_n, удовлетворяющие (3), имеют вид:

$$X_n = \sin \alpha_n x + \rho_n \cos \alpha_n x \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Условия (2) в этом случае дают:

$$\alpha_n = h_1 \rho_n, \qquad \operatorname{tg} \alpha_n l = \frac{\alpha_n (h_1 - h_2)}{\alpha_n^2 + h_1 h_2}.$$

Используя свойство ортогональности собственных функций, автор получает бесконечную систему уравнений для коэффициентов a_n:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} a_m = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots). \qquad (4)$$

Здесь

$$b_{nm} = b_{mn} = \frac{1}{2}(1+p_n^2)^{1/2}(1+p_m^2)^{1/2}\{c_{m,-n} - c_{m,n} + \lambda(d_{m,-n} - d_{m,n})\},$$

$$b_{nn} = \frac{1}{2}(1+p_n^2)\{c_{n,-n} - c_{n,n} + \lambda(d_{n,-n} - d_{n,n})\} - \delta_n \alpha_n^2,$$

$$c_{m,n} = \int_0^l q(x)\cos\{(\alpha_m + \alpha_n)x + (\beta_m + \beta_n)\}dx,$$

$$\delta_n = \int_0^l X_n^2\,dx, \quad \operatorname{tg}\beta_n = p_n.$$

Выражение для $d_{m,n}$ получается из выражения для $c_{m,n}$ путем замены $q(x)$ на $r(x)$. Выражение для $c_{m,-n}$ (соответственно для $d_{m,-n}$) получается из выражения для $c_{m,n}$ (соответственно для $d_{m,n}$) переменой знаков α_n и β_n. Система уравнений (4) имеет нетривиальное решение в том случае, если бесконечный определитель системы $\Delta(\lambda) \equiv |b_{nm}|$ равен нулю, т. е. $\Delta(\lambda) = 0$. Совокупность корней последнего уравнения определяет бесконечное число собственных значений λ_n.

Автор приводит следующую формулу для вычисления собственного значения:

$$\lambda = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\alpha_n^2\alpha_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1+p_n^2)^{1/2}(1+p_m^2)^{1/2}A_{n,m}}{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1+p_n^2)^{1/2}(1+p_m^2)^{1/2}(d_{m,-n} - d_{m,n})a_n a_m},$$

где $A_{n,m} = (c_{m,-n} - c_{m,n})a_n a_m$.

Исследуется также данный метод определения собственных значений и собственных функций при некоторых частных граничных условиях. В заключение подробно рассматривается два числовых примера на применение изложенного метода. Ю. М. Барабошкин

8532. Новый прямой метод численного решения задачи Дирихле. Сабо (Ein neues Verfahren zur unmittelbaren numerischen Lösung der Dirichletschen Randwertaufgaben. Szabó J.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 7-8, 280—284 (нем.)

Описан прямой метод для решения простейших разностных уравнений, соответствующих уравнению

$$\sum_{\alpha=0}^{2}\sum_{\beta=0}^{2} d_{\alpha\beta}\frac{d^{2\alpha+2\beta}U(x,y)}{\partial x^{2\alpha}\,\partial y^{2\beta}} = q(x,y), \qquad (1)$$

заданному на прямоугольнике с граничными условиями

$$\frac{\partial^{2\mu+2\nu}U(x,y)}{\partial x^{2\mu}\,\partial y^{2\mu}} = g_{\mu\nu}(x,y), \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \mu < \alpha \\ 0 \leqslant \nu < \beta \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Если систему разностных уравнений, аппроксимирующих задачу (1), (2), записать в виде

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}C_m^{\alpha}uC_n^{\beta} = P,$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11}\,u_{12},\ \ldots,\ u_{1,n} \\ u_{21}\,u_{22},\ \ldots,\ u_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_{m,1}u_{m,2},\ldots,u_{m,n} \end{pmatrix}$$

есть искомая матрица, доставляющая решение во всех внутренних узлах данного прямоугольника,

$$C_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \cdots & & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

есть квадратная mn-го порядка матрица и R-матрица соответствующая правой части $q(x,y)$ и граничным условиям (2), то для матрицы-решения u имеет место следующая явная формула:

$$u = v_m\{M \times (v_m P v_n)\}\,v_n,$$

где $v_m = (v_{m,1}, v_{m,2}, \ldots, v_{m,m})$, $v_{m,j}$ есть собственный вектор матрицы C_m, принадлежащий собственному значению $\lambda_{m,j}$,

$$M = (m_{ij}),\ m_{ij} = \left(\sum_{\alpha}\sum_{\beta} c_{\alpha\beta}\lambda_{m,i}^{\alpha}\lambda_{n,j}^{\beta}\right)^{-1}$$

знак „$\times$“ означает, что $A \times B = (a_{ij}) \times (b_{ij}) = (a_{ij}b_{ij})$.

В. К. Саульев

8533. О решении разностных уравнений Пуассона теории упругости для произвольных областей при помощи гиперматриц Эгервари. Ловаш-Надь (Über die Lösung der Poissonschen Differenzengleichungen der Festigkeitslehre bei beliebigem Gebiet mit Hilfe der Hypermatrizenalgorithmen von E. Egerváry. Lovass-Nagy V.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 7-8, 274—275 (нем.)

Систему обычных разностных уравнений, соответствующих уравнению Пуассона, автор записывает в виде $Au = p$. Если основная область есть прямоугольник с mn внутренними узлами, то матрица A mn-го порядка имеет вид

$$A = E_m \cdot \times C_n + C_m \times E_n,$$

где E_m есть единичная матрица m-го порядка, а знак „$\cdot\times$“ означает „прямое произведение“ соответствующих матриц:

$$A \cdot \times B = (a_{ij}) \cdot \times (b_{ij}) = (Ab_{ij}).$$

При этом

$$A^{-1} = v_m \cdot \times v_n D v_m^* \cdot \times v_n^*,$$

где D означает диагональную матрицу

$$D = \left(\frac{1}{\lambda_{m,1}+\lambda_{n,1}}, \ldots, \frac{1}{\lambda_{m,m}+\lambda_{n,n}}\right),$$ а знак „$*$“ означает операцию транспонирования (остальные обозначения те же, что и в реф. 8532).

Если же сеточная область не есть „прямоугольник“, то ее всегда можно интерпретировать как область, получающуюся из прямоугольника удалением некоторых узлов. Это соответствует тому, что матрица системы разностных уравнений для непрямоугольной области получается вычеркиванием отдельных строк и столбцов из матрицы, образованной коэффициентами системы разностных уравнений для соответствующей прямоугольной области. Обозначая обратную матрицу A через

$$A^{-1} = R = (r_1, r_2, \ldots, r_\mu) = \begin{pmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ \vdots \\ r_\mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}\,r_{12}\ldots r_{1\mu} \\ r_{21}\,r_{22}\ldots r_{2\mu} \\ \ldots\ldots \\ r_{\mu 1}r_{\mu 2}\ldots r_{\mu\mu} \end{pmatrix},$$

можно получить следующее выражение для обратной минорматрицы $A^{k,p,\ldots,s}_{k,p,\ldots,s}$ (т. е. матрицы, получающейся из A вычеркиванием k-х, p-х, . . ., s-х строк и столбцов)

$$A^{-1}_{k,p,\ldots,s\ k,p,\ldots,s} =$$

$$= R-(r_k, r_p, \ldots, r_s)\begin{pmatrix} r_{kk}\ r_{kp}\ldots r_{ks} \\ r_{pk}\ r_{pp}\ldots r_{ps} \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_{sk}\ r_{sp}\ldots r_{ss}\end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} r_k^* \\ r_p^* \\ \vdots \\ r_s^*\end{pmatrix}.$$

В. К. Саульев

8534. **О неитерационных методах решения гармонических, бигармонических и подобных им разностных уравнений. Исидзаки** (On the numerical solutions of harmonic, biharmonic and simular equations by the difference method not through successive approximations. Ishizaki Hatsuo. Bull. Disaster Prevent. Res. Inst., 1957, № 18, 21 pp., ill.) (англ.)

Описан прямой метод, по существу сводящийся к умножению обратной матрицы, которая соответствует данной системе разностных уравнений и вычисляется для данного числа узлов и их конфигурации один раз на вектор, зависящий от правой части исходного уравнения и граничных значений. Приведены различные вспомогательные таблицы для облегчения вычисления обратных матриц для случаев прямоугольных областей, имеющих до пяти рядов узлов. В. К. Саульев

8535. **О численном анализе гармонических, бигармонических и подобных им функций при помощи метода конечных разностей. Исидзаки** (On the numerical analysis of harmonic, biharmonic and similar functions by the difference method. Ishizaki Hatsuo), Proc. 7 th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957. Tokyo, Gakujutsubunken fukyu-kai, 1958, 313—316 (англ.)

Сокращенное изложение работы автора (реф. 7309).

8536. **Решение методом релаксации проблемы упругого кручения и остаточного напряжения для стержня, поперечное сечение которого разбивается на правильные шестиугольники. Каян** (Plastic torsion problem and residual stresses for the regular hexagonal cross-sectioned prismatical bars by relaxation methods. Kayan Ilhan), Istanbul tekn. üniv. bül., 1953 (1954), **6**, 45—61 (англ.; рез. турецк.)

Обычные разностные уравнения, аппроксимирующие на квадратной и шестиугольной сетке уравнение Пуассона, решаются „ручным" итерационным методом — методом релаксации. В. К. Саульев

8537. **Итерационные решения задачи Дирихле для $\Delta u = u^2$. Аблоу, Перри** (Iterative solutions of the Dirichlet problem for $\Delta u = u^2$. Ablow C. M., Perry C. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 156 (англ.)

Рассматриваются некоторые итерационные методы для решения уравнения $\Delta u = u^2$. Сходимость и скорость сходимости последовательных итераций проверяется аналитически. Применяются итерационные методы $\Delta u_{n+1} = u_{n+1} u_n$, $\Delta u_{n+1} = u^2_n$ и другие, основанные на методе Ньютона для функциональных уравнений.

Из резюме автора

8538. **О решении эллиптических дифференциальных уравнений методом разностей. Дуглас** (On the solution of elliptic partial differential equations by difference methods. Douglas A. S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 158 (англ.)

Решение эллиптического уравнения внутри замкнутой области с заданными граничными значениями методом итераций, например, методом Либмана, эквивалентно решению соответствующего уравнения диффузии. Для решения последнего типа уравнений существуют три важных метода — явный метод, неявный метод и метод Ричардсона. Неявный метод, аналогичный методу Ричардсона, был недавно описан автором. Рассмотрены дальнейшие применения этого метода, в частности для решения нелинейных уравнений на автоматических электронных вычислительных машинах.

8539. **О численном решении разностных уравнений Пуассона для произвольных областей. Эгервари** (On the numerical solution of Poisson's difference equation for an arbitrary region. Egerváry E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 158 (англ.)

Рассматриваются различные прямые алгорифмы вычисления обратных матриц разностных уравнений Пуассона для произвольных областей, основанные на факте, что данные матрицы получаются вычеркиванием отдельных строк и столбцов из матрицы, соответствующей прямоугольной области. Из резюме автора

8540. **Решение граничных задач методом «шаг за шагом». Мьюр** (A step-by-step method for the solution of boundary value problems. Muir W. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 163 (англ.)

В качестве примера рассмотрено уравнение $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$. Обычное конечноразностное уравнение записывается в виде $\varphi_1 = 4\varphi_0 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4$. Это позволяет явно определить φ_1, если известны φ_0, φ_2, φ_3 и φ_4. Решение конечноразностных уравнений просто сводится к решению небольшой системы алгебраических линейных уравнений. Она плохо обусловлена, но эту трудность можно обойти. Для решения можно получить нижнюю и верхнюю границы. Метод применен к случаю криволинейной границы, к бигармоническому уравнению и т. д. Можно получить очень точные решения конечноразностных уравнений.

8541. **Необходимость обеспечения устойчивости и сходимости при пользовании моделирующими устройствами с сетью сопротивлений. Фишер** (Stability and convergence limitations on the use of analogue computors with resistance network analogues. Fisher M. E.), Brit. J. Appl. Phys., 1958, **9**, № 7, 288—291 (англ.)

Решение уравнения $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = f(\varphi)$ при заданных значениях функции φ на границе области известным образом моделируется электрическими потенциалами в узлах квадратной сетки, составленной из сопротивлений и соединенной с устройством, подводящим к каждому узлу сетки ток, зависящий от $f(\varphi)$. При различных предположениях о работе этого устройства автор получает условие возможности решения задачи описанным способом. Оно совпадает с условием устойчивости при $t \to \infty$ решения уравнения $L(d\varphi/dt) + L\varphi = f(\varphi)$, где L — разностный аналог оператора Лапласа, и с условием сходимости последовательных приближений (по методу Зейделя) к решению разностного уравнения $L\varphi = f(\varphi)$. Грубо говоря, это условие выражается неравенством $df/d\varphi > -\lambda_1$, где $-\lambda_1$ — первое собственное значение задачи $Lu = -\lambda u$, $u/_\Gamma = 0$. Приведена более точная формулировка этого условия. Указано обобщение на случай, когда $f = f(x, y, \varphi, \partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$.

А. Ф. Филиппов

8542. **Решение плоской задачи теории упругости для стержня переменного сечения методом последовательных приближений. Баславский И. А.** Сб. научн. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 29, 46—70

Задача, указанная в заглавии, решается методом аналогичным методу, использованному Д. Ю. Пановым (Прикл. матем. и механ., 1938, **2**, 2) при исследовании кручения стержня переменного сечения. В. К. Саульев

8543. **Об отыскании одного класса частных решений для некоторых типов обыкновенных и с частными производными дифференциальных уравнений произвольного порядка. Патцельт** (Über die Gewinnung einer

gewissen Klasse von Partikulärlösungen bei bestimmten Typen gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Patzelt Gerhard), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 257—258 (нем.)

Указываются некоторые классы дифференциальных уравнений, имеющих частными решениями многочлены от независимых переменных. А. Н. Балуев

8544. Применение анализа погрешности Вайссингера при численном решении дифференциальных уравнений с частными производными. Карр (Application of the Weissinger truncation error analysis to numerical solution of partial differential equations. Carr J. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 157 (англ.)

Вайссингер при помощи теоремы о неподвижной точке Банаха—Каччиополи вывел границы погрешности для итерационных методов в нормированных линейных пространствах. Автор распространил эти результаты на ошибки округления, возникающие в каждой итерации, и затем применил их к численному решению некоторых дифференциальных уравнений, получив априорные границы для ошибок усечения и распространения на основе двух вычислений с разными шагами. Границы распространяющейся ошибки округления привели к теореме о «фиксированной сфере»; полная ошибка усечения получена рассмотрением численных решений для двух сеток, как последовательность итераций в итерационном процессе.

8545. Преодоление особенностей при численном решении дифференциальных уравнений с частными производными. Гиллес (The treatment of singularities in the numerical solution of partial differential equations. Gilles D. C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 159 (англ.)

Известно, что в одномерном случае особенности можно эффективно преодолевать при помощи метода „вычисления из особенности". Аналогично обстоит дело в случаях двух и более измерений, если дифференциальное уравнение линейное. Метод очень эффективен, прост и удобен для использования на автоматической вычислительной машине. Обсуждается применение метода к решению уравнения Лапласа и других дифференциальных уравнений в частных производных.

8546. О приближенном решении полигармонической задачи. Золин А. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 6, 971—973

В данной односвязной области Ω с границей L, состоящей из конечного числа кусочно-гладких кривых, „по методу наименьших квадратов на границе" приближенно решается граничная задача для уравнения

$$\Delta^p U \equiv \sum_{\substack{\alpha,\beta=0,\ldots,p \\ \alpha+\beta=p}} \frac{p!}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{2p} U}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} = 0 \qquad (1)$$

при условиях

$$U|_L = f_0(s), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_L = f_1(s), \ldots, \left.\frac{\partial^{p-1} U}{\partial \nu^{p-1}}\right|_L = f_{p-1}^{(s)}, \qquad (2)$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$ — заданные непрерывные на границе L функции, а ν — направление внешней нормали к L.

Автор переходит к новым граничным условиям, эквивалентным условиям (2), и указывает способ построения последовательности полигармонических функций, приближенно удовлетворяющих граничным условиям и сходящихся в данной области к точному решению задачи.

Метрика, в которой ведется приближение, определяется с помощью нормы

$$\| U \|^2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}{}' \int_L \left[(\Delta^k U)^2 + \left(\frac{\partial \Delta^k U}{\partial \nu} \right)^2 \right] ds,$$

где штрих означает, что в случае нечетного p последнее слагаемое отсутствует, а $[\,]$ — наибольшая целая часть числа.

При доказательстве сходимости автор пользуется полигармонической функцией Грина (Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М. — Л., 1948). Д. Б. Тополянский

8547. Численный метод решения задачи о теплопроводности с движущейся границей. Эрлик (A numerical method of solving a heat flow problem with moving boundary. Ehrlich L. W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 2, 161—176 (англ.)

Методом конечных разностей решается следующая задача:

$$u_\tau^{(1)} = u_{xx}^{(1)}, \quad \tau > 0, \quad x \geqslant y(\tau); \qquad (1)$$

$$u_\tau^{(2)} = \beta^2 u_{xx}^{(2)}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x \leqslant y(\tau); \qquad (2)$$

$$u^{(1)}(y(\tau), \tau) = u^{(2)}(y(\tau), \tau) = 1;$$

$$u_x^{(1)}(y(\tau), \tau) - \gamma u_x^{(2)}(y(\tau), \tau) = N dy(\tau)/d\tau;$$

$$u^{(1)}(x, 0) = c;$$

$$u_x^{(1)}(B, \tau) = 0.$$

При $x = 0$, либо

$$u_x^{(1)}(0, \tau) = -p^{(1)} f(\tau); \quad y(\tau) = 0$$

$$u_x^{(2)}(0, \tau) = -p^{(2)} f(\tau); \quad y(\tau) > 0,$$

либо

$$u^{(i)}(0, \tau) = g_i(\tau); \quad i = 1, 2.$$

Уравнения (1) и (2) аппроксимируются шеститочечным симметричным разностным уравнением (уравнение Кранка — Николсона). Остальные уравнения, в которые входит производная по x, заменяются также неявными разностными уравнениями. Это достигается при помощи использования основных уравнений (1) и (2).

Особое внимание автор уделяет составлению разностных уравнений в узлах, находящихся вблизи от движущейся границы (здесь рассматриваются отдельно четыре случая). В этих узлах разностные уравнения соответствующим образом усложняются, так как движущаяся граница, вообще говоря, не совпадает с узлами сетки, которую автор выбирает фиксированной (шаги по осям x и τ постоянны).

Просчет каждого шага по оси τ осуществляется методом итераций. При этом система разностных уравнений с трехдиагональной матрицей в каждой итерации при данном фиксированном τ решается прямым методом — методом разностной факторизации („прогонка").

На числовом примере проведен эмпирический анализ погрешности. В. К. Саульев

8548. Проблема поглощения в химических реакциях. Гудуин (A problem of absorption with chemical reaction. Goodwin E. T.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 159 (англ.)

Рассматриваются численные методы решения системы

$$C_{xx} = C_t + CN; \qquad N_{xx} = N_t + \alpha CN$$

(C и N — искомые функции, α — мало) с применением относительно больших временных шагов. Для контроля точности метода найдены аналитические решения с точностью до членов первого порядка малости относительно α. Из резюме автора

8549. **Численное решение нелинейных уравнений теплопроводности на цифровых вычислительных машинах. Албасини** (The numerical solution of nonlinear heat conduction problems on digital computers. Albasiny E. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 156 (англ.)

Рассматриваются вопросы решения на цифровой вычислительной машине методом итераций неявных разностных уравнений, аппроксимирующих нелинейное уравнение теплопроводности. Из резюме автора

8550. **Метод конечных разностей для волновых проблем. Вильсон** (A finite difference method for wave problems. Wilson S. B. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 167 (англ.)

Для решения р зностных уравнений рассматривается метод, аналогичный методу преобразований, применяемому для решения дифференциальных уравнений. Из резюме автора

8551. **Приближенные решения волнового уравнения Шредингера для атома гелия. Пекерис** (Approximate solutions of the Schrödinger wave equation for the helium atom. Pekeris C. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 164 (англ.)

Волновое уравнение Шредингера для атома гелия было решено при предположении, что $\psi(r_1, r_2, r_{12}) = f(s)\,g(x)\,h(g)$, где $s = r_1 + r_2$, $x = r_{12}/s$, $y = (r_1 - r_2)/r_{12}$, r_1 и r_2 — расстояния электронов от ядра, r_{12} — расстояние между электронами. Вариационные уравнения приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка для каждой из функций $f(s)$, $g(x)$ и $h(y)$ с коэффициентами, зависящими от интегралов-моментов от других функций и их производных. Исследуется природа точных решений этих уравнений, полученных в виде степенных рядов с помощью WEIZAC.

8552. **Замечания о координатных функциях. Михлин С. Г.**, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 5, 91—94

Рассмотрим уравнение

$$Au = f$$

и его приближенное решение, полученное методом Ритца,

$$u \approx u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

где A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, $f \in H$, φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — „координатные“ элементы пространства H; коэффициенты a_k определяются из системы Ритца

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]\, a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как энергетическая норма погрешности (РЖМат, 1958, 7813 К)

$$\| u_n - u \| = \sqrt{(A(u_n - u), u_n - u)}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, то, естественно, что для достижения большей точности следует увеличивать n. Однако при больших n определитель системы Ритца становится очень малым, что приводит к большим погрешностям в определении коэффициентов a_k.

В статье дается условие, при котором система координатных элементов будет надежной (предел при $n \to \infty$ определителя системы Ритца будет положительным). Анализируется процесс ортогонализации и показываются некоторые преимущества приема предварительной ортогонализации координатных элементов.

В качестве примера рассматривается дифференциальный эллиптический оператор. М. А. Алексидзе

8553. **О методе хорд, построенных по узлам Чебышева. Дерендяев И. М.**, Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 21—24

Рассматривается приближенное решение уравнений

$$x(t) - \int_0^1 K(s, t, x)\, dt = 0, \qquad (1)$$

$$x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0\ (x \text{ и } f \text{ — векторы}). \qquad (2)$$

Последовательные приближения для (1) находятся из линейных уравнений

$$x_{n+1}(s) - \int_0^1 \bar{K}(s, t, x_n)(x_{n+1} - z_0^{(n)})dt - \int_0^1 K(s, t, z_0^{(n)})dt = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\bar{K} = \frac{K(s, t, z_1^{(n)}) - K(s, t, z_0^{(n)})}{z_1^{(n)} - z_0^{(n)}},$$

$$z_0^{(n)} = \frac{1}{2}\left(2x_n - r_n\sqrt{2}\right),$$

$$z_1^{(n)} = \frac{1}{2}\left(2x_n + r_n\sqrt{2}\right),\ r_n = r_0\left(\frac{a}{4}\right)^{2^n - 1}$$ (a и r_0 — постоянные).

Показано, что при некоторых условиях относительно $K(s, t, x)$ (аналогичных условиям в методе Ньютона) и $a < 4$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к единственному решению x^* уравнения (1). При этом $|x_n - x^*| \leqslant r_n$.

Аналогичное видоизменение метода Чаплыгина предложено и для (2). Отмечается, что предлагаемые методы могут быть применены к приближенному решению всех классов уравнений, к которым применимы методы Ньютона и Чаплыгина. Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк

8554. **О сходимости градиентного метода для нелинейных задач минимизации. Гуань Цзи-вень** (Guan Chi-wen), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1955, № 1, 113—140 (кит.; рез. англ.)

Используя методы, развитые А. В. Канторовичем для метода Ньютона в случае функциональных уравнений, автор доказывает несколько теорем о сходимости следующего метода последовательных приближений (градиентный метод)

$$X_{n+1} = X_n - \left(\frac{dG}{dX}\right)_{x_n} G(X_n) \Big/ \left\| \left(\frac{dG}{dX}\right)_{x_n} \right\|^2$$

для уравнений $G(X) = 0$.

Теорема 1. Пусть $G(X) \in C^2$ и $G(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $G(X_0) = y_0$;

2) в сфере (S): $\| X - X_0 \| \leqslant H(By_0)^{1/2}$ имеем

$$|G(X)| \cdot \left\| \frac{dG}{dX} \right\|^{-2} \leqslant B,\ \left\| \frac{d^2G}{dX^2} \right\| \leqslant K,$$

где

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{BK}{2}}\right)^{k}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}BK\right)^{1/2}},\ BK<2.$$

Тогда в сфере (S) существует решение X^* уравнения $G(X)=0$, которое можно аппроксимировать методом градиентов, со следующей оценкой погрешности

$$\|X_n-X^*\|\leqslant H\sqrt{By_0}\left(\sqrt{\frac{BK}{2}}\right)^{n}.$$

Теорема 2. Пусть

1) $\left\|\left(\frac{dG}{dX}\right)_{X_0}\right\|\geqslant C_0=\frac{1}{B_0}$;

2) $|G(X_0)|/\left\|\left(\frac{dG}{dX}\right)_{X_0}\right\|\leqslant y_0$;

3) в сфере (C): $\|X-X_0\|\leqslant N(h_0)y_0=\frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}y_0$,

функция $G(X)$ имеет ограниченную вторую производную: $\left\|\frac{d^2G}{dX^2}\right\|\leqslant K$, где $h_0=B_0y_0K\leqslant 1/2$. Тогда существует решение X^* уравнения $G(X)=0$, которое можно аппроксимировать методом градиентов, со следующей оценкой погрешности:

$$\|X_n-X^*\|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^{n-1}}y_0.$$

Автор рассмотрел различные модификации метода градиентов и получил необходимые и достаточные условия эквивалентности методов Ньютона и градиентов. Приводятся числовые примеры. М. А. Алексидзе

8555. **Применение функционально-аналитических методов к численному решению уравнений. Шрёдер** (Anwendung funktionalanalytischer Methoden zur numerischen Behandlung von Gleichungen. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 260—261 (нем.)

Приводятся четыре теоремы о сходимости итеративного процесса $u_{n+1}=Tu_n$ к решению функционального уравнения $u=Tu$ и делаются некоторые замечания об их применении. А. Н. Балуев

8556. **К теории методов Ньютона и Чаплыгина. Слугин С. Н.**, Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 472—474

Приводится ряд теорем о построении монотонных последовательностей приближений к решению функционального уравнения в K-пространстве. А. Н. Балуев

8557. **Решение уравнений состояния в теории телефонирования на цифровой вычислительной машине. Карльссон, Эльдин** (Solving equations of state in telephone traffic theory with digital computers. Carlsson S. C., Elldin A.), Ericsson Techn., 1958, **14**, № 2, 221—244 (англ.)

Описана методика решения на шведской вычислительной машине БЭСК большой системы линейных алгебраических уравнений специального вида методом последовательной верхней релаксации. Особое внимание уделяется подходящей аппроксимации оптимального значения множителя релаксации. Подробно исследуется погрешность расчета. Приведена блок-схема программы. Для решения системы с 729 неизвестными с 6 десятичными знаками требуется 7 мин. работы машины. В. К. Саульев

8558. **О сходимости метода последовательной верхней релаксации, примененного к линейным системам уравнений с комплексными собственными значениями. Чельберг** (On the convergence of successive overrelaxation applied to a class of linear systems of equations with complex eigen-values. Kjellberg Göran), Ericsson Techn., 1958, **14**, № 2, 245—258 (англ.)

Для систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в теории телефонной связи (см. реф. 7332), устанавливается справедливость соотношения Янга (РЖМат, 1955, 1953) $(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\mu^2\lambda$, где μ — собственное значение данной матрицы, λ — собственное значение релаксационной матрицы (т. е. матрицы, которая непосредственно итерируется) и ω — множитель релаксации.

Исследуется скорость сходимости релаксационного метода в случае, когда $\mu=x+iy$. В частности, устанавливается, что если максимальное по модулю собственное значение μ находится внутри, на и вне лемнискаты $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, то лучшим является метод собственно верхней ($\omega>1$), полной ($\omega=1$, метод Гуасса—Зейделя) и нижней ($\omega<1$) релаксации. В. К. Саульев

8559. **Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу Монте-Карло. Шрейдер Ю. А.** В сб.: Вопр. теории матем. машин. I. М., Физматгиз, 1958, 167—171

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k=b_i\quad(i=1,2,\ldots,n).\qquad(1)$$

Решение этой системы равносильно нахождению минимума квадратичной формы

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k-b_i\right)^2,$$

где α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — положительные числа.

Искомое решение $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ является центром симметрии n-мерного эллипсоида $V(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leqslant C$ и, кроме того, каждая из n-мерных гиперплоскостей $x_k=\bar{x}_k$, проходящих через центр эллипсоида, делит его объем пополам. Отсюда получается следующий метод решения (1): ищутся значения $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$ такие, что объемы частей эллипсоида, лежащие в полупространствах $x_k<\bar{x}_k$, равны половине объема всего эллипсоида.

Дается несколько вариантов применения метода Монте-Карло для нахождения указанных объемов. Преимуществом предлагаемого метода является его универсальность (на собственные числа матрицы системы (1) не накладываются никакие ограничения) и малое количество ячеек памяти для хранения промежуточных результатов (n, вместо n^2 для метода исключения). Недостатком метода можно считать большое количество арифметических операций для нахождения приемлемого приближенного решения.

Даются оценки точности приближения и основные особенности специализированной вычислительной машины для решения системы (1) предлагаемым методом. М. А. Алексидзе

8560. **О приближенном решении линейных алгебраических уравнений. Альтман** (On the approximate solution of linear algebraic equations. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 4, 365—370, XXIX (англ.; рез. русск.)

Пусть X — евклидово пространство размерности m, вектор $b\in X$, X' — подпространство, натянутое на векторы $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Предлагается итерационный метод для построения составляющей b, ортогональной X', т. е. $b-Pb$, где P — оператор проектирования на X'. Метод состоит в последовательном проектировании на подпространства, ортогональные a_i:

$y_1 = b - P_1 b$, $y_2 = y_1 - P_2 y_1$, ..., $y_n = y_{n-1} - P_n y_{n-1}$, (1)

$$y_{n+1} = y_n - P_1 y_n, \ldots$$

вообще, $y_{k+1} = y_k - P_{i_k} y_k$. Легко проверяется, что $y_k \to b - P_1 b$.

Для решения системы уравнений

$$Ax = b \qquad (2)$$

с невырожденной матрицей A, строится последовательность (1), причем $a_i = Ae_i$, где $e_1, \ldots, e_m$ — произвольный базис X. Тогда $y_k \to 0$. Приближенное решение системы (2) можно получить в виде $x_k = w_1 + \ldots + w_k$, где

$$w_k = \frac{1}{\| Ae_{i_k} \|^2} (y_{k-1}, Ae_{i_k}) e_{i_k}.$$

Дается оценка погрешности $\| x_k - x \|$.

Если $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и A — положительно определенная симметрическая матрица, то в метрике $[u, v] = (A^{-1}u, v)$ этот процесс совпадает с итерациями по Зейделю. А. П. Лавут

8561. **Об устойчивости матриц и сходимости линейных итерационных процессов. Фишер, Фуллер** (On the stabilization of matrices and the convergence of linear iterative processes. Fisher M. E., Fuller A. T.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 4, 417—425 (англ.)

Показывается, что если P — действительная квадратная матрица n-го порядка, удовлетворяющая определенным условиям, тогда существует действительная диагональная матрица D такая, что характеристическое уравнение для DP устойчиво и апериодично (характеристическое уравнение называют устойчивым, если действительные части всех корней отрицательны. Если все корни действительные и простые, то уравнение называют апериодичным). Основные результаты формулируются в виде следующих теорем:

Теорема 1. Если P имеет по крайней мере одну последовательность ненулевых главных миноров M_k любого порядка $k = 1, 2, \ldots, n$ таких, что M_{k-1} есть один из первых k главных миноров M_k, то существует действительная диагональная матрица D такая, что характеристическое уравнение для DP устойчиво.

Теорема 2. Итерационные методы Якоби и Гаусса — Зейделя с матрицами, удовлетворяющими условию теоремы 1, можно преобразовать при помощи соответствующих диагональных матриц, так чтобы они сходились. М. А. Алексидзе

8562. **Обращение матриц на машине УНИВАК. Манайра** (L'inversione delle matrici con l'UNIVAC. Manaira Mario), Idee e sist., 1958, № 24-25, 9—11 (итал.)

Популярная заметка о простейших понятиях алгебры. Сообщается о том, что в Италии в настоящее время находятся в действии 20 машин УНИВАК.

М. Л. Бродский

8563. **Обращение некоторых матриц. Сархан, Гринберг** (Inverting patterned matrices. Sarhan A. E., Greenberg B. G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 128 (англ.)

Матрицы специальной структуры могут быть обращены прямыми методами. Приведены примеры из области статистических проблем таких матриц и их обратных.

Из резюме авторов

8564. **Определение собственных значений матриц, имеющих полиномиальные элементы. Тарнов** (Determination of eigenvalues of matrices having polynomial elements. Tarnove Ivin), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, № 2, 163—171 (англ.)

Описывается метод вычисления собственных значений матриц $A(\lambda)$, элементами которых являются полиномы от λ с комплексными или вещественными коэффициентами. Метод основан на применении к функции $f(\lambda) \equiv |A(\lambda)|$ итеративного процесса нахождения корней (РЖМат, 1959, 7489). При этом для вычисления $\lambda^{(j)}$ требуется знание трех предыдущих значений $\lambda^{(j-3)}$, $\lambda^{(j-2)}$ и $\lambda^{(j-1)}$. В начале процесса следует полагать $\lambda^{(1)} = (1 + \beta) u$, $\lambda^{(2)} = (1 - \beta) u$, $\lambda^{(3)} = u$, $0 < \beta < 1$. Критерием сходимости являются неравенства $|\lambda^{(j)} - \lambda^{(j-1)}| / |\lambda^j| < \varepsilon$, $|\lambda^{(j)}| < \varepsilon$. При выполнении обоих неравенств $\lambda^{(j)}$ считается собственным значением. Как отмечает автор, сходимость имеет место даже при плохих начальных значениях. Преимущество данного метода перед другими состоит в том, что здесь не требуется вычисление коэффициентов полинома $f(\lambda)$. Во избежание сходимости к уже найденному собственному значению p-е собственное значение находится как нуль функции

$$f_p(\lambda) = f(\lambda) \prod_{i=1}^{p-1} (\lambda - \lambda_i)^{-1}, \qquad p > 1.$$

Приведены собственные значения для двух матриц — 18-го и 9-го порядков с квадратичными элементами. Для этих матриц с целью выяснения точности метода проводилось вычисление для двух уравнений: $|A\lambda^2 + B\lambda + C| = 0$ и $|C\lambda^2 + B\lambda + A| = 0$, имеющих взаимные корни. Приведены результаты этой проверки, показывающие хорошее совпадение.

Отмечается, что в случае слишком большого разброса собственных значений для сохранения точности при вычислении на электронных вычислительных машинах необходимо вводить масштабные множители. Г. И. Бирюк

8565. **О скорости сходимости циклического и квазициклического методов Якоби для вычисления собственных значений эрмитовых матриц. Хенрич** (On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices. Henrici P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 160 (англ.)

Пусть $A_{k+1} = U_k A_k U_k^*$ ($k = 0, 1, \ldots$), где A_0 — эрмитова матрица порядка n и U_k — унитарные вращения координат плоскостей. Известно, что для некоторого выбора вращений и координат плоскостей A_k сходятся к диагональной матрице A_0, состоящей из собственных значений. Показывается, что сходимость имеет место для произвольного выбора координат плоскостей при условии, что углы вращения соответствующим образом ограничены и что не имеется произвольно больших пропусков между вращениями любых из $1/2\, n(n-1)$ координатных плоскостей. Если n собственных значений A_0 различны, то сходимость квадратичная.

8566. **Некоторые вопросы улучшения разрешимости однородной вычислительной задачи. Акушский И. Я.**, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 5 (9), 71—89

Рассматривается введение разрешающих множителей для достижения разрешимости однородной вычислительной задачи. Пусть U — разрешаемая и Ω — операционная матрицы. Доказывается, что в условиях разрешимости, из которых определяется операционная матрица Ω, реализующая вычислительный процесс, можно вместо Ω и Ω^r брать $M\Omega$ и $M_r\Omega^r$ и вместо U и U^{P_r} — матрицы TU и $T_r U^{P_r}$, где M и M_r — произвольные единично-компонентные матрицы, перестановочные с Ω, а T и T_r — аналогичные матрицы, перестановочные с U.

Рассматривается также способ достижения разрешимости пространства, в котором определена разрешимая матрица. Вводится понятие эффективного расширения.

$$\Gamma_{(m+n)}^{\ \ n} = {}_{m}\left[\frac{U_{(n)}^{m} A^{n}}{BC}\right]$$

является эффективным расширением матрицы U n-го порядка, если для любого i верхняя левая клетка матрицы V^i совпадает с U^i. Устанавливается условие вида: 1) $AB = 0$ и 2) существует X такое, что $AC = XA$. Рассматриваются также способы эффективного вычисления исходного вектора без решения матричного уравнения, вытекающего из условия разрешимости.

К. Б. Тлегенов

8567. **О разрешимости обратной матрицы. Акушский И. Я.**, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 5 (9), 90—100

Устанавливается связь матриц Ω и Q, реализующих разрешимость матрицы U с соответствующими матрицами Ω и Q, реализующими разрешимость U^{-1}. Устанавливается, что $\Omega = \Omega^{-1}$ и $Q = Q$, т. е. что разрешимость U^{-1} может быть достигнута при том же исходном векторе, что и разрешимость U. Это означает, что можно реализовать разрешимость задачи для U^{-1}, заданной в неявном виде через U без фактического определения U^{-1}.

К. Б. Тлегенов

8568. **Приложение элементов теории матриц к некоторым вопросам теории математической обработки наблюдений. Немцов В.**, Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картограф., 1958, вып. 30, 53—71

Применяя матричное исчисление и принцип наименьшей дисперсии, автор выводит формулы для определения весов измеренных величин. Матричное исчисление дает автору возможность в самом общем виде показать тождественность результатов вероятностного и чисто алгебраического подхода (принцип наименьших квадратов) к вопросам математической обработки результатов наблюдений.

Разбираются также вопросы применения блочных матриц и указывается, что в этом случае решение соответствующей системы уравнений допускает разделение труда, ускоряя тем самым процесс вычисления.

М. А. Алексидзе

8569. **Многогрупповое выравнивание путем последовательных приближений Чапанов** (Многогрупово изравнение чрез последователни приближения. Чапанов Хр.), Техника (Бълг.), 1958, **7**, № 7, 32—34 (болг.)

8570. **Видоизмененный метод для решения условных уравнений методом наименьших квадратов. Гейл** (A modified-equations method for the least-squares solution of condition equations. Gale L. A.), Trans. Amer. Geophys Union, 1955, **36**, № 5, 779—791 (англ.)

Предложен способ корректировки секций триангуляционной сети, не требующий пересчета всех секционных коррелят в случае добавления к исходной системе новых условных уравнений. Вычислительный процесс основан на схеме Бьерхаммера решения систем нормальных уравнений. Метод можно использовать также для определения дополнительных поправок расширенной системы уравнений, если часть этих уравнений была обработана методами Гаусса — Дулиттля или Холецкого. Даны два числовых примера.

А. П. Хусу

8571. **Краковяновый метод определения регионального поля силы тяжести. Файклевич** (On a cracovian method of determining the regional gravity field. Fajklewicz Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 5, 349—354, XXVII (англ.; рез. русск.)

Используя аппарат краковянов, автор при помощи метода наименьших квадратов определяет региональное поле силы тяжести. Результаты представлены в виде топографических кривых.

В. К. Саульев

8572. **Наиболее употребительные в настоящее время методы решения алгебраических уравнений и возникающие при этом проблемы. Гринспан** (On popular methods and extant problems in the solution of polynomial equations. Greenspan Donald), Math. Mag., 1958, **31**, № 5, 239—253 (англ.)

Обзорная статья. Перечисляются наиболее употребительные в настоящее время методы решения алгебраических уравнений и дается краткая характеристика каждого из этих методов. Библ. 61 назв.

М. С. Горнштейн

8573. **Новейшие итерационные процессы типа Бернулли и Грэффе над матрицами. Бауэр** (On modern matrix iteration processes of Bernoulli and Graeffe Type. Bauer F. L.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 3, 246—257 (англ.)

Дается обзор новейших методов определения собственных значений и собственных векторов матрицы и приводятся краткие характеристики этих методов.

М. С. Горнштейн

8574. **Новое краткое руководство для решения уравнений третьей степени. Галантино** (Di un nuovo prontuario per la risoluzione delle equazioni di terzo grado. Galantino Fausto), Statistica, 1958, **18**, № 2, 297—316 (итал.)

Рассматривается уравнение третьей степени вида

$$y^3 - y^2 + R'y - B' = 0, \tag{1}$$

где

$$0 < R' \leqslant \frac{1}{3}; \quad 0 < B' \leqslant \frac{1}{27}, \qquad \frac{R'(4R'-1)}{18B'} + \frac{27B'+4}{18R'} \leqslant 1 \tag{2}$$

(при этих условиях уравнение (1) имеет три вещественных корня, сумма которых равна единице). При $B' = 0$ получается квадратное уравнение

$$y^2 - y + R' = 0. \tag{3}$$

Если $0 < R' \leqslant 0{,}25$, то оба корня этого уравнения вещественные, их сумма равна 1.

Из уравнения (1) получаем

$$R' = \frac{B'}{y} + y(1-y).$$

По этой формуле вычисляются значения R' для значений y из интервала (0; 1) и для значений B' из интервала (0; 0,1) (через известные промежутки значений y и B). Полученной таким образом таблицей можно пользоваться для определения вещественных корней уравнений второй и третьей степени. В этой таблице имеются и значения, выходящие из области (2); им соответствует только один вещественный корень. Автор показывает, как любое уравнение третьей степени привести к виду (1) и квадратное уравнение к виду (3).

М. С. Горнштейн

8575 К. **Численный анализ и дифференциальные уравнения в частных производных. Форсайт, Розенблум** (Numerical analysis and partial differential equations. Forsythe George E., Rosenbloom Paul C. (Surv. Appl. Math. Vol. 5). New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd., 1958, x, 204 pp., ill.) (англ.)

Книга состоит из двух частей. Первая часть „Современное состояние численного анализа" (стр. 3—42), написанная Форсайтом, посвящена некоторым вопросам численного анализа. После некоторых общих соображе-

ний по численным методам, дается обзор советских и некоторых дореволюционных работ в этой области, а также работ по вычислительным машинам. В связи с этим говорится и о некоторых работах иностранных авторов. Библ. 86 назв.

Вторая часть „Линейные дифференциальные уравнения с частными производными (стр. 45—95), написанная Розенблумом, содержит довольно подробный обзор результатов по дифференциальным уравнениям в частных производных, полученных за последние годы советскими авторами. Обзор разбит на следующие главы: 1. Дифференциальные уравнения в частных производных в комплексной области. 2. Общая теория в действительной области. 3. Общая теория уравнений с постоянными коэффициентами. 4. Уравнения параболического типа. 5. Уравнения эллиптического типа. Библ. 738 назв.

Книга заканчивается подробным предметным указателем.

К. А. Карпов

См. также: 7771, 7924, 7991, 8151, 9339, 9352, К, 9374, 9375

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

8576. **Экспериментальное изучение двоичного кода. Питерсон** (An experimental study of a binary code. Peterson W. W.), Commun. and Electronics, 1958, № 37, 388—392 (англ.)

Описывается метод построения самокорректирующегося кода, согласно которому информационные двоичные разряды записываются в виде прямоугольной матрицы. Затем к этой матрице приписывается несколько строк контрольных разрядов так, чтобы каждый столбец новой матрицы оказался записанным в коде Хемминга, обнаруживающем 2 ошибки и исправляющем одну. После этого к новой матрице приписывается несколько столбцов контрольных разрядов так, чтобы каждая ее строка тоже оказалась бы записанной в таком же коде Хемминга. После искажения матрицы при прохождении ее через канал связи с шумами исправление ошибок осуществляется с помощью итерационного процесса. Сначала правила исправления ошибки в коде Хемминга применяются поочередно ко всем столбцам матрицы, затем — ко всем рядам, затем снова ко всем столбцам и т. д. Приводятся примеры простых матриц, в которых этот процесс оказывается сходящимся и приводит к некоторому стабильному содержанию ошибок, а также пример некорректируемой комбинации разрядов, которая преобразуется в некоторую другую комбинацию после исправления по правилам Хемминга единичных ошибок столбца и затем преобразуется снова в исходную комбинацию после исправления одиночных ошибок в строках. Общий случай уменьшения вероятности ошибки после применения описанной процедуры к матрицам размером 8×16, 16×32 и 32×64 разряда исследовался с помощью электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-704, для которой были составлены программы образования исходных матриц со случайными ошибками, их корректирования и печати. Емкость запоминающего устройства машины ИБМ-704 позволяла хранить одновременно 36 матриц размером 32×64 разряда. Результаты экспериментов, приводимые в статье в виде кривых, показывают, что итеративный процесс в основном сходился за 5—10 итераций. Библ. 6 назв.

А. В. Шилейко

8577. **Методы моделирования дифференциального анализатора на цифровой вычислительной машине. Леш** (Methods of simulating a differential analyzer on a digital computer. Lesh F.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, № 3, 281—288 (англ.)

Предлагается метод программирования решения дифференциальных уравнений на электронных цифровых вычислительных машинах, использующий технику программирования моделирующих машин. Согласно этому методу первоначально составляется схема набора для решения исходного уравнения для некоторой гипотетической моделирующей машины, содержащей операционные усилители, интегратор, блоки деления, ряд функциональных блоков, релейные блоки и т. п. Для каждого из блоков составляется одно или несколько управляющих слов, содержащих информацию о виде операции и соединениях с другими блоками. После ввода в цифровую вычислительную машину эти управляющие слова служат исходными данными для приведения в действие подпрограмм соответствующих операций и для образования необходимой системы адресов. В заключение рассматривается несколько примеров решения задач описанным методом на машине «Дататрон-204».

А. В. Шилейко

8578. **Логические элементы электронных вычислительных машин на полупроводниковых приборах. Валявко В. В.,** В сб.: Материалы Конференции молодых ученых АН БССР, Минск, 1958, 97—101

Исследуется возможность применения полупроводниковых приборов для построения последовательного сумматора комбинационного типа. Сигнал на выходе суммы такого сумматора соответствует $(A + B + E)e + ABE$, а на выходе переноса — $AB + AE + BE$, где A, B и E соответственно являются сигналами слагаемых и единицы переноса на входе сумматора, а e — сигнал переноса, формируемый на выходе переноса. Задержка единицы переноса на один такт работы сумматора осуществляется двухкаскадной феррито-транзисторной цепочкой. Рассматривается работа отдельных элементов сумматора: логических схем НЕТ, И—ИЛИ и И—НЕТ. Показывается зависимость отношения сигнала к помехе на выходе дешифратора типа И от величины сопротивления дешифратора и нагрузки. В сумматоре используются диоды типа ДГЦ 12 и ДГЦ 13, полупроводниковые триоды типа П1Е и ферритовые сердечники типа К-65. Не приводится сведений о быстродействии сумматора и возможном разбросе питающих напряжений.

А. Б. Залкинд

8579. **Новая большая вычислительная машина на полупроводниковых триодах** (Neue Transistor—Großrechenanlage), Internat. Wirtsch., 1958, № 39, 7 (нем.)

Сообщение о выпуске фирмой „ИБМ“ новой машины блочного типа, предназначенной для обработки данных. Новая машина ИБМ-7070 по своим характеристикам занимает промежуточное положение между известными машинами той же фирмы ИБМ-705 и ИБМ-650. Запоминающее устройство на магнитных дисках емкостью 24 000 000 знаков. Кроме того, имеется оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью от 50 000 до 100 000 знаков. Скорость считывания с магнитной ленты и записи на нее равна 62 500 знакам в 1 сек.; имеется автоматический контроль записи и считывания данных на магнитной ленте. Д. А. Поспелов

8580. **«Рэмо-Вулдридж» разрабатывает новые вычислительные машины для авиации** (R-W develops new

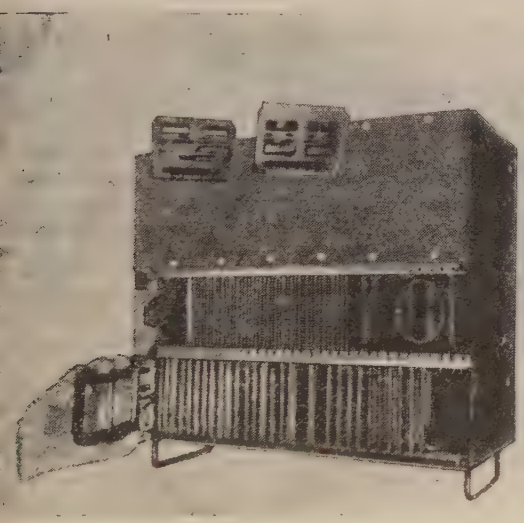
airborne computer), Res. and Engng, 1957, **3**, № 8, 16 (англ.)

Сообщение о разработке фирмой „Рэмо-Вулдриджя" (Ramo Wooldridge) новых вычислительных машин для современной авиации. Машина RW-30, полностью изготовленная на полупроводниковых триодах, может выполнять все вычисления для навигации, бомбометания, управления огнем со скоростью, достаточной для современного вооружения.

Полная система занимает объем 0,17 $м^3$, весит около 83 *кг* и состоит из четырех отдельных частей: запоминающего устройства на магнитном барабане, арифметического и управляющего устройства, устройства ввода-вывода и генератора с источником питания. Машина выполняет 4000 операций в 1 сек., включая время выборки, и потребляет мощность 400 *вт*. О. В. Бачин

8581. Блок ввода и вывода цифровой машины Рэмо-Вулдридж *RW*-30 для авиации. (Input-output unit of the Ramo-Wooldridge *RW*-30 airborne digital Computer), Computers and Automat., 1957, **6**, № 9, 5 (англ.)

Фотография блока ввода и вывода (см. фото) машины *RW*-30 (реф. 8580, 8583) из рекламного объявления фирмы „Рэмо-Вулдридж".



8582. Вычислительная машина ИБМ-610 на полупроводниковых триодах (Rechenautomat IBM 610 mit Transistoren. W.), Vermessungstechn. Rundschau, 1958, **20**, № 7, 223 (нем.)

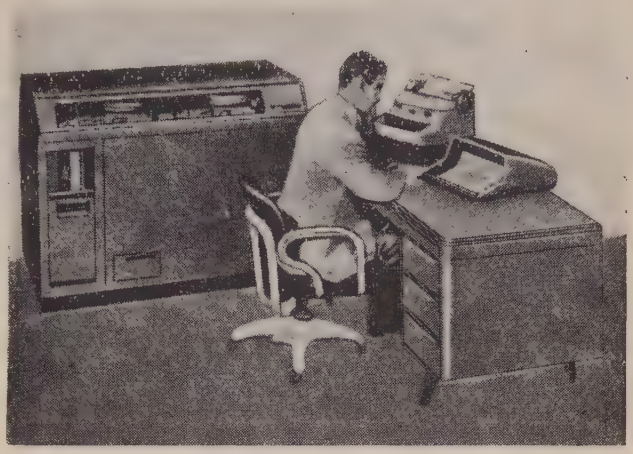
Фирма ИБМ впервые демонстрирует на Всемирной выставке в Брюсселе свою новую машину ИБМ-610 на полупроводниковых триодах (см. фото).

8583. Очень легкая вычислительная машина, предназначенная для авиации. (Lightweight computer designed for aircraft), Aviat. Week, 1957, **67**, № 19, 87, 89 (англ.)

См. реф. 8580.

8584. Внутренняя организация малых вычислительных машин с программным управлением. Л е з е м а н (Interne Organisation eines kleinen programmgesteuerten Rechenautomaten. L e s e m a n n K.-J.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 7-8, 268—273 (нем.)

Отмечается, что в связи с развитием серийного производства математических машин необходимо, чтобы внутренняя структура таких серийных машин отличалась максимальной простотой. Наиболее удобны в этом смысле машины, которые могут быть собраны из стандартных простых блоков. В качестве машины, удовлетворяющей этим требованиям, рассматривается американская



К реф. 8582

машина LGP-30 (см. фото), производство которой налажено в настоящее время в ФРГ. LGP-30 — одноадресная машина с фиксированной запятой. Малые размеры делают ее очень удобной для небольших учреждений.

К реф. 8584

Машина работает в двоичной системе. Для ввода данных и вывода окончательных результатов служит печатающее устройство. Данные вводятся в машину с перфоленты. Запоминающее устройство состоит из барабана на 4096 чисел, на котором установлено 64 головки для записи и считывания чисел. Барабан обслуживают 9 усилителей для чтения, три усилителя записи и девять специальных схем для выбора дорожек. Время одного оборота барабана равно 15 *мсек*. Управляющее устройство содержит 700 диодов, 15 триггеров, 6 катодных повторителей и 6 выходных каскадов.

Приведена система команд машины, состоящая из 16 приказов. Выполнение каждой команды происходит за четыре такта: 1) поиск очередного приказа; 2) перевод найденной адресной части приказа из ячейки в регистр команд; 3) перевод кода операции из ячейки в регистр команд; выполнение приказа, стоящего в регистре.

Д. А. Поспелов

8585. Насколько быстродействующими могут стать вычислительные машины? Г р и м с д е й л (How fast can computers become? G r i m s d a l e R. L.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 11, 444—447 (англ.)

Говоря о быстродействии вычислительных машин, следует различать скорость выполнения различных операций в арифметическом устройстве и скорость работы запоминающих устройств. Ламповые схемы, используемые сейчас в логических схемах машин, могут работать при частотах повторения импульсов до нескольких мегагерц без существенного влияния паразитных емкостей ламп, заваливающих фронты импульсов и создающих запаздывание импульсов. При работе на более высоких частотах все более широко будут применяться высокочастотные полупроводниковые триоды, применение которых тем более выгодно, что они работают с малыми сигналами, а следовательно, с меньшими затягиваниями фронтов.

В настоящее время запоминающие устройства позволяют получать время выборки порядка нескольких микросекунд, причем при больших объемах запоминающих устройств это время становится значительно большим. Считается выгодным применение быстродействующего запоминающего устройства малого объема, работающего непосредственно с арифметическим устройством, получающего информацию из более медленнодействующего запоминающего устройства большой емкости.

Для получения высоких скоростей работы желательно иметь параллельное запоминающее устройство, но так как в настоящее время быстродействие вычислительных машин лимитируется в основном скоростью работы запоминающего устройства, то сейчас выгоднее иметь значительно более дешевое последовательное арифметическое устройство. Кроме того, некоторые операции производятся только последовательным образом. Так, до сих пор не создано чисто параллельного устройства умножения, хотя и имеется много методов ускорения этой операции. Очень интересна схема последовательно-параллельного умножения, когда множимое вводится последовательно, множитель параллельно, а произведение находится путем суммирования частных произведения.

Для повышения быстродействия арифметического устройства большое значение имеют встроенные устройства, выполняющие отдельные операции (деление, логарифмирование и др.), автоматическое программирование, встроенные подпрограммы такие, как регистры для модификации адреса команд, а также объединение отдельных операций, как, например, сложения и умножения для получения суммы произведений.

Выходные устройства вычислительных машин работают значительно медленнее, чем сами машины, однако сейчас имеются новые, более быстрые методы вывода информации из машины такие, как вывод на электронно-лучевые трубки, фотопечать, ксерографическая печать, сильно повышающие скорость вывода, а кроме того, современные вычислительные машины могут, не прерывая вычисления, выводить результаты посредством нескольких выводных устройств одновременно.

Ожидается, что обычная сейчас тактовая частота работы машин порядка 1 *мгц* будет в ближайшем будущем доведена до 10 *мгц*, а в ближайшие 10 лет возрастет еще в 10 раз. В частности, уже сейчас имеются полупроводниковые триоды, переключающиеся за время порядка 10 ммксек.

Основным фактором, затрудняющим создание сверхбыстродействующих вычислительных машин, является относительно малая скорость работы современных запоминающих устройств. Запоминающие устройства на ферритовых сердечниках, очевидно, не позволят получить время обращения, меньшее чем 1 мксек. Дальнейшее уменьшение времени обращения может быть получено на запоминающих устройствах, использующих распыленные железоникелевые пленки, имеющие время переключения, меньшее чем 20 ммксек. Также ведутся большие работы по созданию запоминающих устройств, использующих принцип сверхпроводимости. Один из таких элементов, „криотрон", еще не позволяет получить время перемагничивания меньше 1 мксек., в то время как „персистор"— разработанный фирмой ИБМ—элемент, использующий явление бесконечной циркуляции тока в замкнутом сверхпроводящем кольце сверхтонкой пленки, позволил получить время переключения порядка 10 ммксек.

Очевидно, что в будущем ограничивающим лимитом для повышения тактовой частоты работы машины будут ее размеры, так как при частоте в 1000 *мгц* линейный размер машины не должен превышать 30 *см*, даже если сигналы будут распространяться внутри машины со скоростью, равной скорости света в пустоте, тогда как в действительности часть пути они проходят в диэлектрике, снижающем скорость распространения сигнала.

Для увеличения объема работы, выполняемого вычислительной машиной, необходимо будет вводить параллелизм выполнения многих операций. Также очень перспективны гибридные вычислительные машины дискретно-непрерывного действия, типа существующих цифровых дифференциальных анализаторов. О. В. Бачин

8586. **Электронная цифровая вычислительная машина** (Electronic digital computer), Lab. Practice, 1957, **6**, № 8, 479—480 (англ.)

Краткое описание цифровой вычислительной машины „Метровик-950". См. также РЖМат, 1958, 786, 4287; 1959, 2069.

8587. **Электронная цифровая машина для Сиднея** (Electronic digital computer for Sydney), Manufact. and Manag., 1956, **10**, № 10, 327—328 (англ.)

Фирма „Инглиш Электрик" изготовила для технологического Института г. Сидней вычислительную машину УТЭКОМ (UTECOM), являющуюся вариантом машины ДЭЮКЕ. Машина УТЭКОМ последовательного действия, с тактовой частотой 1 *мгц*, работающая с 32-разрядными числами. Запоминающее устройство выполнено на 12 ртутных линиях задержки, на 32 числа каждая, 10 других более коротких линий задержки используются как накопительные регистры. Имеется магнитный барабан на 8192 числа. Информация с 256 дорожек барабана считывается 16 головками, каждая из которых может занимать 16 положений. Быстродействующий сдвигающий механизм выбирает любую дорожку за 25 мсек. Операция сложения и сдвига выполняется за 64 мксек., умножение и деление требуют 2 мсек., однако в это время остальные устройства машины могут выполнять другие операции. О. В. Бачин

8588. **Быстродействующая вычислительная машина ДЭЮКЕ для решения сложных задач** («DEUCE» a computer for solving complex problems at high speed), Engineering, 1955, **179**, № 4650, 313—315 (англ.)

См. также РЖМат, 1955, 4740; 1956, 2510, 2511, 4140, 5564.

8589. **Электронная вычислительная машина ДЭЮКЕ** (The DEUCE electronic computer), Electr. J., 1955, **154**, № 8, 612—613 (англ.)

См. также РЖМат, 1955, 4740; 1956, 4140.

8590. **Электронная вычислительная машина ПКК-Сеймас** (La calculatrice électronique PCC Samas), Rev. mécanogr., 1958, **12**, № 134, 392—394, 396—397 (франц.)

См. РЖМат, 1956, 7749.

8591. **Быстродействующий цифровой дифференциальный анализатор TRICE. Митчелл, Руман** (The TRICE—a high speed incremental computer. Mitchell J. M., Ruhman S.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 206—216 (англ.)

Описываются принципы работы и устройства параллельного цифрового дифференциального анализатора TRICE фирмы „Packard Bell Computer". Скорость работы этой машины составляет 100 000 итераций в 1 сек., а максимальная точность соответствует 26 разрядным двоичным числам с учетом знака. Частота работы элементов составляет 3 *мгц*. Вся машина построена полностью на полупроводниковых триодах и диодах.

Необходимость разработки параллельного цифрового дифференциального анализатора определяется требова-

ниями моделирования сложных физических систем в истинном масштабе времени, что не осуществимо с помощью существующих цифровых вычислительных машин последовательного действия.

Описываемый параллельный цифровой дифференциальный анализатор состоит из практически неограниченного количества самостоятельных основных вычислительных элементов—цифровых интеграторов, каждый из которых выполняет одну итерацию трапецоидального интегрирования за 10 мксек., причем все эти интеграторы работают одновременно.

Кроме основных вычислительных элементов — интеграторов, в машине применены еще три вспомогательных вычислительных элемента: умножитель, „следящая система" и „сумматор", которые значительно облегчают решение задач и уменьшают количество потребных для их решения интеграторов. Каждый интегратор состоит из трех линий задержки по 10 мксек. и трех одноразрядных сумматоров. Линии задержки нужны для хранения начального Y_0 и текущего Y_i значения интегрируемой переменной, а также накопленного значения интеграла S_i с этими величинами и приращениями ΔX_i и ΔY_i входных переменных в соответствии с формулой трапецоидального интегрирования: $S_i = (Y_0 + h \sum_{s=1}^{i} \Delta Y_s)\,\Delta X_i + {}^1/_2\,\Delta Y_i\,\mathrm{sgn}\,(\Delta X_i)$. Приращения переменных представляются в специального вида троичной системе счисления и принимают значения $+1$, -1 или 0. Такое представление позволяет повысить как точность интегрирования, так и его скорость. Цифровой умножитель представляет собой два соединенных в одном блоке видоизмененных интегратора, благодаря чему достигнута экономия в оборудовании и повышена точность по сравнению с использованием для выполнения умножения двух отдельных блоков интеграторов, так как в описываемом умножителе операция умножения выполняется по точной дифференциальной формуле умножения с учетом произведения приращений переменных. Цифровая „следящая система„ представляет собой видоизмененный блок интегратора, в котором устранен канал накопления интеграла, а в качестве выхода блока используется сигнал переполнения регистра интегрируемой переменной. Этот блок используется в качестве разностного элемента при решении дифференциальных или алгебраических уравнений, а также в качестве решающего элемента при генерировании разрывных и нелинейных функций.

Наконец, блок „сумматора" используется для суммирования приращений входных переменных, количество которых может доходить до шести. Описание этого блока не дается. Указывается, что высокая скорость вычислений на описываемой машине достигается не только за счет параллельного принципа работы машины, но и благодаря применению 3 мегагерцовых схем на полупроводниковых триодах с предельной частотой усиления 20 *мгц*. Вся логика блоков построена на триггерах и диодных логических элементах типа логической пирамиды И—ИЛИ. В качестве линий задержек использовались отрезки высокочастотного кабеля, причем для уменьшения потребной ширины полосы пропускания использовалось потенциальное представление двоичных кодов с невозвращением к нулю.

Схема блока интегратора состоит из 120 триодов и 430 диодов. Размеры интегратора $300 \times 490 \times 43$ *мм*. Приводятся блок-схемы интегратора, умножителя и „следящей системы", а также простейшие примеры соединения интеграторов для решения задач. Даны также схемы триггера, вентиля и считывающего усилителя линии задержки. Даются фото блоков машины.

Б. И. Стрелков

8592. Полный двоичный сумматор на двух диодах, обладающих отрицательным сопротивлением. Хортон, Андерсон (A full binary adder employing two negative-resistance diodes. Horton J. W., Anderson A. G.), IBM J. Res. and Developm., 1958. 2, № 3, 223—231 (англ.)

Описывается схема полного двоичного сумматора, работающего при длительности входных и выходных импульсов порядка нескольких десятков миллимикросекунд. Три входных сигнала сумматора суммируются на сопротивлениях таким образом, что амплитуда импульса, действующего между суммирующей точкой и точкой нулевого потенциала, может равняться 0, 1, 2 и 3 условным единицам напряжения, соответственно, при одновременном приходе на входы схемы 0, 1, 2 или 3 входных импульсов. Между суммирующей точкой и точкой нулевого потенциала параллельно или последовательно включаются два диода, обратное сопротивление которых резко падает и становится отрицательным при превышении напряжением некоторого критического значения. Амплитуда в одну условную единицу выбирается большей критического напряжения первого диода и меньшей критического напряжения второго. Поэтому при приходе одного входного сигнала импульс „суммы" генерируется в цепи первого диода. При амплитуде в 2 условные единицы превышается критическое напряжение второго диода, который шунтирует первый диод. Выходной импульс „переноса" генерируется в этом случае только в цепи второго диода. Наконец, амплитуда в 3 условные единицы оказывается достаточной для генерирования выходных импульсов в цепях обоих диодов. Наличие отрицательного сопротивления дает возможность получить эффект усиления входных сигналов. В статье подробно рассматриваются режимы работы нескольких вариантов подобных схем. Библ. 6 назв.

А. В. Шилейко

8593. Основные принципы и работа параллельного двоичного сумматора. Батай (Principe de fonctionnement et réalisation d'un additeur binaire parallèle. Bataille M.), Onde électrique, 1956, **36**, № 353—354, 742—749, 40 (франц.; рез. англ.)

Описывается арифметическое устройство цифрового суммирующего устройства, разработанного французским национальным исследовательским центром по авиации „ONERA". Применена известная схема сумматора со сквозным переносом. Суммирование делится на 5 тактов: 1) подача 1-го числа; 2) подача 2-го числа и суммирование на триггерах; 3) выработка переносов, осуществление сквозного переноса и запоминание переносов; 4) суммирование переносов; 5) установка в „0" ячеек запоминания переносов. Суммирование производится на статических триггерах с ламповыми вентилями, для запоминания переносов применены также статические триггеры (осуществляющие логическую функцию задержки). В качестве варианта устройства рассматривается применение для этой цели обычных электромагнитных линий задержки. Однако это затрудняет наладку сумматора, так как теряется разделение на такты.

Рассматривается характерная для такого сумматора формула полного цикла суммирования: $2t_1 + N\tau + t_2 + t_3 = T$. Для реальных элементов время полного переброса триггера t составляло 2 мксек. (т. е. максимальная частота счета была 250 *кгц*). Время задержки в вентиле сквозного переноса τ равно 0,1 мксек. Таким образом, для 40-разрядного сумматора полный цикл суммирования составляет 12 мксек., а с учетом возможности перекрытия циклов—10 мксек.

Рассматривается временная диаграмма и тактирующее устройство управления сумматором. Допускаются различные режимы работы—от полной частоты главных импульсов (ГИ 500 *кгц*) до одиночных импульсов. Подробно рассматривается также логика работы двоичного сумматора в терминах булевой алгебры.

Основным элементом машины является ячейка статического триггера с двумя ламповыми вентилями, управляемыми анодами триггера. Триггер собирается на двойном триоде 5963 или 12 AU7. Достаточная мощность и крутизна характеристики лампы, а также низкие требования к фронтам позволяют применить простейшую схему с анодно-сеточными связями без специальной коррекции и выходных катодных повторителей. В качестве вентиля применен трансформаторный каскад на пентоде с управлением по двум сеткам. На 3-ю сетку подается управляющий потенциал (с анода триггера), 1-я сетка—входная импульсная. Лампа находится в режиме глубокой отсечки по 1-й сетке (—10 *в*, т. е. с запасом 200 %), рабочая амплитуда выходного импульса 30 *в*. Потребление по постоянному току триггера 10 *ма*, потребление вентиля весьма незначительно. В машине широко развита диодная логика. Между диодными каскадами включаются усилители на лампах 6AU6 или EL84.

К двойным триодам, используемым в триггере, предъявляются следующие требования: разброс прямого (внутреннего) сопротивления при открытой лампе для новых триодов ± 30 %, для работавших—до 50 %; разброс сопротивления закрытой лампы при 20° ± 1 %, при старении + 1 %, при нагреве до 45° —1 %. Диоды должны иметь обратное сопротивление (+45°, 10 *в* обратного напряжения) не менее 200 *ком*. При таких условиях блоки работают без какой-либо отладки при колебаниях питающих напряжений ± 3 % и изменениях длительности запускающих импульсов (номинально—примерно полусинусоида 0,65 мксек.) от 0,6 до 1,0 мксек. Подбор ламп и сопротивлений позволяет значительно расширить возможный диапазон дефектности.

Сумматор работал при уходе одного из рабочих номиналов на 25 % при полной частоте ГИ 500 *кгц*. При точном соблюдении номиналов частота могла быть повышена до 700 *кгц* (т. е. полный цикл суммирования сведен менее чем к 10 мксек.).

Указывается, что сумматор требует весьма незначительной доделки для превращения его в универсальное арифметическое устройство (выполнение операций умножения, деления, извлечения корня, возможность работы как в системе с фиксированной, так и с плавающей запятой и т. д.). Приведено фото общего вида сумматора.

А. А. Крупский

8594. **Использование матричного запоминающего устройства для преобразования частоты следования информации.** **Куортли, Кейн, Кларк** (A matrix store for data rate conversion. Quartly C. J., Cain A. L., Clarke R. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1957, **B104**, Suppl. № 7, 457—463. Discuss., 481—482 (англ.)

Во многих специализированных машинах существует необходимость в преобразовании частоты следования данных, поступающих на вход в произвольные моменты времени, и в подаче их для обработки с постоянной наперед заданной частотой. Описывается применение для целей такого преобразования матричного запоминающего устройства, построенного по обычной схеме совпадающих токов.

Было использовано запоминающее устройство емкостью $25 \times 25 = 625$ чисел по 22 разряда. Информация подавалась на его вход параллельно по 22 шинам с произвольными промежутками времени (но не менее 20 мксек.) при скорости, не превышающей 625 посылок за каждые 10 сек. 23-й разряд использовался для подачи предварительных импульсов записи (запускающих цепи записи), 24-й разряд—для меток времени (каждые 10 сек.). Считывание информации (со стиранием) производилось с постоянной частотой 62,5 *гц*. Таким образом, полная очистка памяти укладывалась в тот же стандартный цикл 10 сек.

Если синхронизирующий импульс считывания приходит непосредственно вслед за предварительным импульсом записи (в пределах такта записи), он задерживается на время этого такта; соответственно задерживается импульс записи, приходящий во время выполнения операции считывания. Приводится схема „условной задержки", разработанная для этой логической функции.

В устройстве применены сердечники „Ферроксруб D2" с внешним диаметром 2 *мм*. Токи в адресных шинах и разрядных шинах запрета записи имели номинальную величину 350 *ма* (т. е. полный ток перемагничивания составлял 700 *ма*) и длительность 2 мксек. при фронтах 0,2 мксек. При колебаниях амплитуд токов в пределах от 200 до 400 *ма* и ухудшении фронтов до 0,5 мксек. надежность работы устройства практически не снижалась.

Известно, что наибольшая помеха с полувозбужденного сердечника или с сердечника, в котором хранится „0", появляется при воздействии на него импульса тока непосредственно после записи; при дальнейших воздействиях импульс помехи значительно уменьшается. Это явление учтено в описываемом устройстве: через 0,5 мксек после такта записи по всем разрядным плоскостям подается импульс „возбуждения после записи". Как и ток запрета записи, этот импульс имеет фронты порядка 0,5 мксек. при длительности, несколько превышающей 2 мксек.

Для выборки числа по координатам x и y используются трансформаторно-ламповые матрицы в $5 \times 5 = 25$ элементов. Применены линейные трансформаторы с отношением витков 10:1; максимальные выброс на переднем фронте и спад плоской вершины не более 5 %. В качестве ламп использованы триоды с низким внутренним сопротивлением ECC84.

Поскольку выборка чисел в устройстве—программная, последовательным обращением подряд к каждой ячейке,—в качестве адресных регистров включаются кольцевые счетчики с пересчетом на 5 (4 последовательно соединенных счетчика для выборки по записи и 4 по считыванию). Схема счетчиков обычная, на базе статического триггера.

В состав усилителя считывания входит 2 каскада усиления, удлиняющий одноходовой мультивибратор на двойном триоде и катодный повторитель. Вход на первый каскад с обмотки считывания матрицы—трансформаторный, с диодным выпрямлением по двухтактной схеме. Благодаря сравнительно малому объему памяти (625 сердечников в разрядной плоскости) и импульсу „возбуждения после записи", стробирование в пределах такта считывания практически не является необходимым. Оно было сохранено только для отделения такта считывания от записи. Для стробирования используется пентодная сетка 2-го каскада усиления.

Описывается технология изготовления плат (разрядных плоскостей на $25 \times 25 = 625$ сердечников) запоминающего устройства. Продевание координатных проводов производится на полуавтоматическом приборе с пневматическим прижимным патроном. Затем вручную продеваются обмотки считывания и записи и распаивается на рамке, изготовленной с применением печатного монтажа. После проверки всех ячеек платы в импульсном режиме, монтаж заливается пластической пленкой, фиксирующей сердечники. Эта пленка предохраняет от возможных повреждений сердечника и, основное, эмалевую изоляцию пронизывающих их проводов.

Концы адресных обмоток и обмоток запрета при записи выводятся на общую землю, к которой подпаивается также экранирующая медная фольга, разделяющая платы. Считывание ведется биполярно, скрученным двойным проводом с каждого разряда.

Приведены фото конструкции платы и куба запоминающего устройства в целом, а также схемы и времен-

ные диаграммы работы устройства и его отдельных блоков. Библ. 4 назв. А. А. Крупский

8595. **Упрощение для надежной дешевой работы цифровой системы обработки данных. Прast** (Simplicity for reliable low-cost operation in a digital data processing system. Prast J. W.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 5, 48—56 (англ.)

Надежность цифровых систем обработки данных имеет весьма важное значение, и, в частности, в случае необходимости обработки данных непосредственно после полета. Надежность цифровой системы определяется изменениями характеристик ее элементов и их числом. Рассматриваемая цифровая система обработки данных измерений в полете находится в работе с 1944 г. Она представляет интерес в изучении аспекта надежности цифровой системы обработки данных полета, так как преобразование сигналов из непрерывной формы в дискретную имеет место перед начальной записью данных, что требует особенно высокой надежности в системе преобразования, тем более, что эта система работает в полевых условиях. Связь между самолетом и системой осуществляется с помощью системы передатчик-приемник, работающих с частотной модуляцией. Информация с выхода приемника передается на преобразователь частотно-модулированного сигнала из непрерывной формы в дискретную.

В данном случае требуется преобразование с точностью порядка 0,1%. Поэтому не применяется запись данных на магнитную ленту и не производится промежуточное преобразование частотно-модулированного сигнала в непрерывную информацию.

Преобразование частотно-модулированного сигнала в цифровую форму со столь большой точностью возможно при использовании считывания дискретных моментов времени, соответствующих определенному числу циклов модулированной поднесущей частоты, т. е. измеряется средняя частоты за интервал прерывания. Скорость прерывания должна быть при этом достаточно велика с тем, чтобы частота не могла значительно измениться за интервал прерывания. В данном случае это обеспечивается скоростью прерывания приблизительно 10 раз в 1 сек. при условии, что отношение сигнала к помехе достаточно велико.

Преобразователь использует принцип считывания дискретных интервалов времени, за которые поступает 512 циклов поднесущей частоты 7,35 *кгц* ± 7,5%, так что подлежащая частота за временный интервал $t_n - t_{n-1}$, определяется как

$$f_n = \frac{512}{t_n - t_{n-1}}.$$

Для облегчения считывания данных и для более надежной работы основной принцип был несколько модифицирован путем использования двух работающих попеременно счетчиков на 100 *кгц*, которые используются в качестве цифровых временных элементов. Преобразователь состоит из 75 двойных триодов, работающих в 67 триггерных схемах, 2 формирователях, 3 усилителях, 7 катодных повторителях и в задающем генераторе 100 *гц*. Два одинаковых пентода используются в двух клапанах. Считывание дискретной информации вначале производилось фотоспособом, для чего использовалось 10 неоновых ламп, соединенных через матрицу сопротивлений с четырьмя триггерными схемами, используемыми в декадных счетчиках. Неоновые лампы представляют десятичную информацию путем освещения чисел на передней панели счетчика. Числа затем фотографировались фотокамерой. Этот метод надежен в эксплуатации, поскольку он не требует кабельных соединений триггерных цепей счетчика с записывающим устройством, сама камера является весьма надежным элементом, и персонал имеет опыт в обращении с нею. Несмотря на это, имели место перебои в работе из-за неисправности камеры, ошибок оператора, что заставило заменить эту систему автоматически перфорирующим бумажную ленту устройством. Это значительно повысило надежность системы, хотя и увеличило число ламп и тиратронов в системе. При этом заметно снизилась стоимость системы как в изготовлении, так и в эксплуатации. Поскольку для обработки данных применялась вычислительная машина с входом от перфокарт, данные с ленты автоматически перфорировались на перфокарты. Г. Х. Новик

8596. **Трансфлюксор. Райхман, Ло** (The transfluxor. Rajchman J. A., Lo A. W.), Proc. IRE, 1956, 44, № 3, 321—332, 381 (англ.)

Трансфлюксор — магнитный сердечник с прямоугольной петлей гистерезиса, имеющий два или большее число отверстий. Управление распределением магнитного потока между тремя или большим числом перемычек позволяет производить запоминание сигналов и управление ими. В зависимости от направления потоков в перемычках трансфлюксора переменный ток, подаваемый по проводу, проходящему через малое отверстие трансфлюксора, вызывает на выходном проводе, проходящем через то же отверстие, либо большой сигнал э. д. с., либо малый сигнал помехи, причем величина этого сигнала устанавливается импульсом тока, подаваемым по проводу, проходящему через большое отверстие трансфлюксора. В зависимости от амплитуды и полярности этого тока, амплитуда выходного сигнала может изменяться от величины сигнала помехи до некоторой максимальной величины.

В статье подробно описывается трансфлюксор с двумя отверстиями, приводятся требования к его геометрическим размерам, установочные и блокировочные характеристики как при симметричном, так при несимметричном возбуждении, осциллограммы выходных сигналов трансфлюксора при различных установочных полях.

Трансфлюксор имеет высокий коэффициент передачи мощности, короткое время установки, незначительную связь между цепью установки и выходной цепью, но малые допуски на установку.

Трансфлюксоры могут применяться в запоминающих устройствах, имея то преимущество, что считывание производится без разрушения информации и считывание и запись по разным адресам могут производиться одновременно. Возможно применение трансфлюксоров в селекторах модулированных каналов. Дано несколько примеров выполнения трансфлюксоров с числом отверстий, большим чем два, для выполнения некоторых логических операций. О. В. Бачин

8597. **Разработка «Персептрона»** (Design of the perceptron), Res. and Engng, 1958, 4, № 4, 5—9 (англ.)

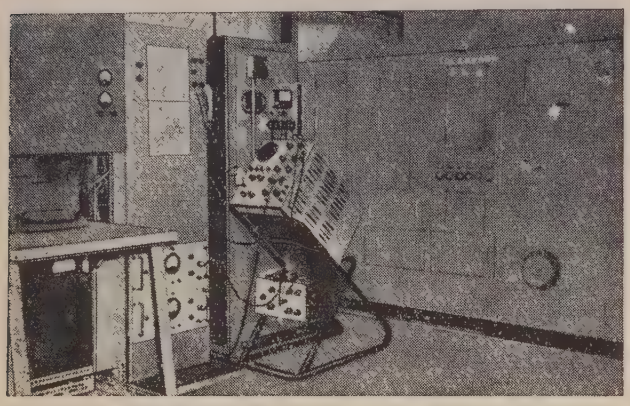
Кратко описываются результаты экспериментов с системой «Персептрон», разработанной сотрудником фирмы «Cornell Aeronautical Laboratory» Розенблатом по заказу Военно-морского исследовательского управления. Система представляет собой комбинацию «чувствительного органа», подобно передающей телевизионной камере, набора цифровых элементов, связи между которыми могут устанавливаться на основании входных сигналов, получаемых от чувствительного органа, и исполнительных органов. Цифровая часть системы моделировалась при экспериментах с помощью электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-704. При экспериментах демонстрировалась способность системы различать правую и левую стороны рисунка со случайно расположенными квадратами, различать начертания букв или рисунок корабля от рисунка самолета. В статье неоднократно подчеркивается, что «Персептрон» представляет собой не цифровую вычислительную машину, а самоорганизующуюся систему. Например, способность системы отличать треугольник от квадрата основывает

ся не на том, что форма треугольника вводится в машину заранее и не на математическом анализе геометрической формы, а на установлении связей, соответствующих этим фигурам, происходящем на основе «опыта». Отмечается ряд возможных применений системы.

А. В. Шилейко

8598. **Электронный читающий автомат** (Electronic reading automaton), Process Control and Automat., 1957, 4, № 4, 116—120 (англ.)

Описание электронного читающего автомата ЭРА ERA — Electronic Reading Automaton, см. фото) фирмы «Солартрон» (Solartron).



8599. **Вычислительная машина, которая читает** (Computer that reads), Atomics, 1957, 8, № 7, 276 (англ.)

Сообщается об электронном приборе ЭРА (ERA), позволяющем считывать информацию, напечатанную на бумаге для ввода ее в математическую машину дискретдого действия. Скорость считывания 120 знаков в 1 сек. Однако, если необходимо, скорость может быть довенена до 500 знаков в 1 сек.

А. Н. Чуйкин

8600. **Преобразователь из непрерывной формы в цифровую на твердых элементах. Палевский** (A solid state analog-to-digital conversion device. Palevsky Max), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 232—235 (англ.)

Кратко описывается устройство на полупроводниковых триодах для преобразования в цифровую форму непрерывных данных, представленных в виде напряжения постоянного тока. Указывается, что это устройство предназначалось для использования совместно с цифровым дифференциальным анализатором типа TRICE. Скорость преобразования составляет 4 мксек. на двоичную цифру. Погрешность преобразования 0,01%.

Описываемое устройство может одновременно с преобразованием осуществлять при некоторых изменениях также математические операции, такие, как образование частного двух входных напряжений или корня квадратного из их частного или произведения. Основной частью преобразователя является цифровой делитель напряжения, на входы которого поступают двоичный код числа и преобразуемое напряжение, а с выхода снимается произведение этих величин в виде напряжения постоянного тока. Этот цифровой делитель представляет собой матрицу сопротивлений, допускающую 16 000 двоичных или 20 000 двоично-десятичных состояний. Точность преобразования ограничивается точностью установки этих сопротивлений. Для достижения точности 0,01% требуется, чтобы сопротивления были установлены с точностью 0,004%, для чего используются специальные юстировочные сопротивления. В качестве ключей используются не токовые, как обычно, а потенциальные ключи в виде полупроводниковых триодов в режиме насыщения. Это позволило обойтись без высоких напряжений, необходимых для генераторов постоянного тока, и повысить точность по сравнению с точностью, достигаемой при использовании принципа переключения токов.

Однако при использовании в качестве потенциальных ключей полупроводниковых триодов в режиме насыщения ограничивающим точность фактором является изменение сопротивления насыщенного триода со временем и при изменении температуры. В этом отношении мощные триоды обладают преимуществом, но они не обеспечивают выполнения другого требования — быстродействия. Высокая точность и стабильность напряжения, подаваемого на цифровой делитель, обеспечивается усилителем постоянного тока с коэффициентом усиления 10^7 и выходным сопротивлением 0,04 *ома* на частоте 1 *мгц*, в котором в качестве стабилизирующих элементов применены прерыватель на кремниевых триодах и диод Зенера.

Для обеспечения высокой точности преобразователя компаратор входных напряжений работает на переменном токе, для чего на его входе имеется прерыватель. Чувствительность компаратора равна 300 *мвт*. Используемый метод преобразования заключается в сравнении входного напряжения и напряжения обратной связи, представляющего содержимое цифрового регистра, для последовательного определения двоичных значений разрядов регистра, начиная со старшего. При этом компаратор выдает три значения сигнала разности: + 1, — 1 и 0, соответствующие сигналам увеличения, уменьшения или сохранения неизменным содержимого регистра.

Конструктивно преобразователь выполнен в виде печатных панелей, на одной стороне которых расположены элементы, а на другой — соединения. Для соединения этих панелей между собой используется единственная шина вместо печатных контакторов. Все панели сидят на одной оси, расположенной в одном из углов панелей, и могут свободно вращаться относительно этой оси, что облегчает доступ к монтажу панелей. В качестве модификации описанного преобразователя был разработан вариант преобразователя работы с напряжениями переменного тока. Приводятся блок-схемы делителя, преобразователя и генерирования квадратного корня, а также фото панели преобразователя.

Б. И. Стрелков

8601. **Статистическая теория синтеза точных цифровых импульсных систем. Чжан** (Statistical design theory for strictly digital sampled-data systems. Chang S. S. L.), Commun. and Electronics, 1958, № 34, 702—708. Discuss., 708—709 (англ.)

Рассматривается вопрос определения оптимальной передаточной функции импульсной цифровой следящей системы при стационарных случайных воздействиях на нее. В качестве критерия оптимальности выбирается минимум среднеквадратичной ошибки. Для анализа используется аппарат z-преобразования. Отмечается, что рассматриваемая теория является приложением теории Винера к импульсным системам. В качестве примера в статье решены несколько специальных задач.

В. П. Парамонов

8602. **Моделирующее устройство ASEA. Пешсон, Углум** (ASEA:s analogimaskin. Persson E., Uglum O.), ASEA's tidn., 1957, **49**, № 10, 107—113 (шведск.)

Дается описание моделирующего устройства ASEA, собранного из отдельных деталей, поставляемых из США (набор этих деталей носит название PACE —«точное оборудование моделирующих устройств»). ASEA имеет всего 40 решающих усилителей, которые все могут быть использованы как суммирующие или инверторы. Входные коэффициенты этих усилителей имеют зна-

ения 10, 5, 1. Для установки необходимого коэффициента усиления, промежуточного между значениями 10, 5, 1, служат соответствующие потенциометры. Из 40 усилителей 16 могут служить для интегрирования. Для этого в цепи обратной связи усилителей установлены конденсаторы начальных условий. Шесть функциональных блоков осуществляют кусочно-линейную аппроксимацию функций одной переменной (для аппроксимации каждой функции можно использовать 20 линейных участков). Умножение величин производится на пяти блоках произведения. Наличие двух наборных полей и двух независимых блоков решающих усилителей позволяет решать на машине одновременно несколько задач.

Д. А. Поспелов

8603. **Трансформаторное моделирующее устройство. Рао, Кришна** (The transformer analog computer. Rao P. Venkata, Krishna G.), Commun. and Electronics, 1958, № 34, 732—738 (англ.)

Описывается трансформаторное моделирующее устройство, предназначенное для решения задач, встречающихся при исследовании цепей переменного тока, а также для решения уравнения с комплексными коэффициентами С его помощью могут быть решены задачи по определению характеристических чисел матриц, нулей многочленов, а также данных, необходимых для построения диаграммы Найквиста для следящих систем. Принцип действия такого устройства основан на возможности представления комплексных операторов с помощью двух соответствующим образом соединенных трехфазных трансформаторов. Показано, каким образом воспроизводится индуктивность, проводимость, взаимоиндуктивность, активное и реактивное сопротивление с помощью соответствующего соотношения витков. Токи в реальных цепях воспроизводятся в виде напряжений. Приводится описание основных составных элементов модели, состоящих из двух частей, каждая из которых имеет два трехобмоточных трансформатора. В каждом из них коэффициент трансформации может быть установлен в пределах от 0,001 до 0,999. Соответствующей коммутацией всех этих элементов обеспечивается получение всех возможных их сочетаний для воспроизведения любых комплексных операторов. Описывается конструкция моделирующего устройства, состоящего из ряда стандартных стоек со смонтированными на них элементами, измерительного оборудования и центрального наборного поля, источника стабилизированного напряжения 50 *гц*. Стандартный трансформатор имеет первичную обмотку в 1000 витков, компенсационную обмотку в 1000 витков и две вторичных обмотки по 999 витков.

Приводятся схемы линейного и нелинейного компенсаторов и сигнализатора „перегрузок" напряжения. Библ. 14 назв.

Б. Ш. Беркович

8604. **Моделирующее устройство ПЕЙС с ускоренным коммутированием** («Pace» analog computer speeds patching), Process Control and Automat., 1958, 5, № 5, 209 (англ.)

Рекламное сообщение о моделирующем устройстве ПЕЙС (PACE = 231R) американской фирмы „Электроникс Ассошиэтс", (Electronics Associates), на котором, благодаря лучшему устройству коммутационной доски, в четыре раза уменьшается время набора задачи по сравнению с предыдущими моделями.

С коммутационной доской связано 30 суммирующих интегрирующих усилителей, 45 суммирующих усилителей, 25 инверторов, 20 генераторов функций, 10 электронных умножителей, 5 генераторов функций двух переменных, 10 компараторов, 15 ограничителей и другое оборудование.

Моделирующие устройства 231R выпущены в декабре 1957 г. и проданы многим фирмам, в том числе в Нидерланды и Францию. Устройства ПЕЙС меньшего размера проданы в Швецию и ФРГ.

О. В. Бачин

8605. **Новая вычислительная машина непрерывного действия ускоряет коммутацию** (New analog computer speeds patching), Control Engng, 1958, 5, № 2, 138 (англ.)

Рекламное сообщение о выпуске машины 231R. См реф. 8604.

8606. **Новый метод электрического моделирования задачи исследования теплопроводности. Либман** (A new electrical analog method for the solution of transient heatconduction problems. Liebmann G.), Trans ASME, 1956, 78, № 3, 655—663. Discuss., 664—665 (англ.)

Общее уравнение, описывающее явление передачи тепла, применяется к задаче с одним пространственным измерением. Оно может быть заменено системой уравнений в конечных разностях. Описывается возможность решения системы уравнений в конечных разностях с помощью схем, содержащих активные сопротивления, где температура представляется напряжением, пространственные характеристики исследуемого объекта — параллельно включенными сопротивлениями и тепловые характеристики — сопротивлениями, включенными в последовательной цепи.

Приведены основные характеристики и принципиальная схема электромоделирующего устройства, использующего указанный метод и выполненного в виде стойки высотой около 1 *м* и шириной 75 *см*. Представлены результаты исследования явления теплопередачи в системе с одной степенью свободы — длинном стержне малого диаметра — и указывается, что основными источниками погрешностей являются методические погрешности, связанные с заменой непрерывной среды системой n сосредоточенных постоянных, и приборные погрешности, вызванные неточностью задания напряжений и установки величин сопротивлений. Представлены зависимости погрешности от числа n.

Рассматривается возможность применения описанного метода для анализа систем с двумя и тремя степенями свободы, а также возможность воспроизведения участков среды, где теплоемкость зависит от температуры, путем использования итеративных методов, реализуемых вручную. Кратко рассматривается способ расчета масштабов в схеме. Представлены два примера решения задач теплопроводности — для системы периодически получающей кратковременные тепловые возмущения и для стальной пластинки, температура на границе которой резко увеличивается. Указывается, что погрешность решения задач может быть доведена до 1%.

И. М. Витенберг

8607. **Решение уравнений Пуассона и Гельмгольца для двумерной области на трехмерных моделях электрического потенциала. Гутман С. Г.**, Научн. докл. высш. школы. Энергетика, 1958, № 1, 247—251

Рассматриваются вопросы моделирования гармонических и бигармонических уравнений вида $\Delta^k\varphi = A\varphi + \varphi_0$, где φ и φ_0 — двумерные искомая и заданная функции координат x и y, Δ^k — обозначение k-кратной операции Лапласа, $k = 1, 2$, и A — постоянный коэффициент. При моделировании воспроизводится гармоническая в трехмерном пространстве моделирующая функция F, которая легко моделируется в виде поля электрического потенциала. Представлены аналитические выражения для F в зависимости от порядка лапласиана и значений коэффициента A и указывается, что поле потенциала F представляет собой цилиндр с направляющей, очерченной по линии контура S исследуемой области $\varphi(x, y)$. Граничные условия на боковой поверхности S при условии постоянства φ и $\Delta\varphi$ на кон-

туре S задаются с помощью специальной распределительной трубки, обтекающей боковую поверхность модели F, обладающей в сравнении с последней высокой проводимостью и представляющей собой самостоятельное поле потенциала ψ. Рассматриваются формы образования потенциала ψ, иллюстрируемые примерами. Указывается, что электрическая модель полей потенциалов F и ψ автором осуществлена на твердых проводниках из электропроводной бумажной массы. И. М. Витенберг

8608. **Вычислительная машина непрерывного действия для рядов Фурье. Вебер** (Eine Analogierechenmaschine für Fourier—Reihen. Weber K.), Z. Kristallogr., 1958, 110, № 3, 219—230 (нем.)

Описано устройство, позволяющее для любого x подсчитывать значение функции, заданной своим разложением Фурье

$$\rho(x) = \sum A_h \cos 2\pi hx + \sum B_h \sin 2\pi hx.$$

Результат может быть получен либо в виде кривой на электронно-лучевой трубке с десятисекундным послесвечением, либо отсчитан на шкале лампового вольтметра. Все величины задаются в виде соответствующих напряжений. Пределы изменения A_h, B_h и $\rho(x)$ задаются следующим образом:

$$-5000 \leqslant A_h \leqslant 5000,$$
$$-5000 \leqslant B_h \leqslant 5000,$$
$$-3 \cdot 10^5 \leqslant \rho(x) \leqslant 3 \cdot 10^5.$$

Наименьшее значение коэффициентов, устанавливаемое в машине равно 0,5. При работе с ламповым вольтметром устройство обеспечивает среднюю точность для $\rho(x)$ в пределах $\pm 0{,}1\%$ от $\sum |A_h| + \sum |B_h|$. Время подсчета значения ряда с 18 коэффициентами A_h и B_h для 72 различных значений x равно 15 мин. Минимальный интервал для изменения x равен 2,5°, что соответствует в радианах $\frac{n}{144}$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ Общее число членов суммы не может быть больше $4 \times 19 = 76$. Дано подробное описание конструкции устройства и рассмотрено несколько примеров. Д. А. Поспелов

8609. **Новые средства моделирования ядерных реакторов. Браффор, Кайе** (Nouvelles techniques dans la simulation des centrales nucléaires. Braffort P., Caillet C.), Onde électr., 1958, 38, № 377—378, 583—591 (франц., рез. англ.)

Рассматриваются некоторые особенности моделирования ядерных реакторов различных типов. Основной трудностью, возникающей при моделировании реакторов малой мощности и двухтактных реакторов, является большой диапазон изменения мощности реактора в переходном процессе. Это обстоятельство вынуждает решать уравнения переходного процесса в несколько приемов, изменяя каждый раз масштаб и значения коэффициентов. В статье приводятся системы уравнений, описывающих динамику реакторов этих двух типов, и кривые полученных решений. При моделировании больших ядерных энергетических систем также возникает ряд особенностей, одной из которых является необходимость введения специальных элементов для моделирования транспортной задержки. В заключение рассматриваются блок-схемы моделирования термоядерных систем. Имеется 13 рисунков. Библ. 5 назв.

А. В. Шилейко

8610. **Электромоделирующее устройство для решения задач конвекции тепла. Робинсон** (An analogue computer for convective heating problems. Robinson H. G. R. Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1955, № 374, 24 pp., ill.) (англ.)

Приведено уравнение в частных производных, характеризующие конвекцию тепла в одномерной задаче, и система граничных условий, накладываемых на решение этого уравнения. Показана возможность создания электрической модели для анализа явлений конвекции, использующей аналогию между температурой и потенциалом, потоком тепла и электрическим током, теплом и зарядом, коэффициентом передачи тепла и проводимостью, теплоемкостью и емкостью конденсатора. Основой электрической модели является схема последовательного соединения Т-образных элементов, содержащих конденсатор в параллельной цепи и активные сопротивления в последовательной цепи. На входе схемы включен источник напряжения, изменяющегося в функции времени и моделирующего внешнюю температуру. Последовательно с источником напряжения включено сопротивление, также изменяющееся во времени и характеризующее изменение коэффициента теплопроводности. При необходимости имитации системы с односторонней передачей тепла или нелинейной зависимостью коэффициента передачи от температуры между основной схемой электрической модели и источником напряжения включается схема с диодами.

Синхронизация работы всех устройств электрической модели осуществляется с помощью датчика импульсов, обеспечивающего управление включением шагового механизма, который изменяет входное напряжение и проводимость первого участка цепи, а также перемещает по горизонтали луч на экране электронолучевого индикатора.

Ползунки шаговых реле могут занимать до 50 различных положений, так что весь интервал времени решения разделяется на 50 отрезков. Изменение входного напряжения производится за счет предварительного подключения отдельных точек делителя напряжения к контактам, по которым перемещается ползунок шагового реле. Делитель состоит из 100 секций, обеспечивая возможность задания напряжений через 1 *в*. Изменение проводимости реализуется путем поочередного подключения к схеме с помощью ползунка шагового реле различных заранее подготовленных сопротивлений. Для перемещения луча электронолучевого индикатора по горизонтали используются два линейных делителя напряжения, выходные напряжения которых, равные по величине и обратные по знаку для обеспечения хорошей фокусировки луча, от ползунков шагового реле поступают на пластины горизонтального отклонения луча.

Наблюдение за характером изменения переменной во времени в отдельных точках системы производится с помощью упомянутого выше электронолучевого индикатора, усилитель вертикального входа которого имеет очень большое входное сопротивление. Индикатор снабжен схемой калибровки экрана, которая подключается ко входу усилителя вертикальной развертки в конце каждого интервала решения и обеспечивает прочерчивание отметок напряжений отсчета в виде горизонтальных прямых.

Указывается, что точность решения составляет $2 \div 3\%$, что объясняется неточностью задания времени, входного напряжения, проводимости, ошибками регистрации, дискретностью задания входного напряжения и проводимости, а также конечностью числа элементов в схеме электрической модели. И. М. Витенберг

8611. **Решение системы линейных уравнений на электронных машинах непрерывного действия. Хемпель** (Über eine elektronische Analogie-Rechenanlage zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen. Hempel E.), Nachrichtentechnik, 1958, 8, № 10, 453—455 (нем.)

Рассмотрен итерационный способ решения систем линейных алгебраических уравнений на электромоделях. Приведено обычное доказательство сходимости итерационного процесса. Выведены условия на коэффициен-

ты матрицы, которые обеспечивают устойчивую работу усилителей. Д. А. Поспелов

8612. Новые применения электронного функционального преобразователя. Томович (New applications of an electronic function generator. Tomovich Rajko), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 1, 48—51 (англ.)

Описывается схема функционального преобразователя, содержащего ряд потенциометров, с помощью которых устанавливаются значения ординат функциональной зависимости $f(\alpha)$ для ряда дискретных значений α. На входы всех потенциометров поступает напряжение $v(x)$, а их выходы подключаются к выходной клемме функционального устройства с помощью электронных ключей в зависимости от величины напряжения $\alpha = g(x)$. Включение электронных ключей в зависимости от α обеспечивается схемами амплитудных компараторов, на входы которых кроме напряжения $\alpha = g(x)$ поступают также напряжения, определяющие величины α, при которых должен срабатывать тот или иной электронный ключ; величины этих напряжений устанавливаются с помощью потенциометров Q, на входы которых поступают постоянные напряжения $\pm u$. Выходное напряжение схемы в предположении, что напряжения, поступающие от потенциометров Q, отличаются друг от друга на постоянную величину Δu, будет равно $e = v(x) f[g(x)]$.

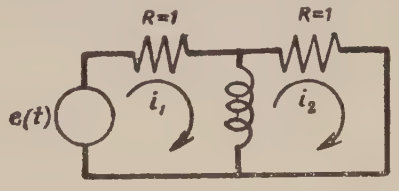
Указывается, что если изменить закон установки напряжений на выходах потенциометров Q и произвести эту установку так, чтобы напряжения на выходах потенциометров подчинялись закону $u = h(n)$, то номер потенциометра, выход которого будет подключаться к выходной клемме функционального устройства, будет теперь определяться выражением $h(n) = g(x_n)$, так что выходное напряжение схемы будет равно $e = v(x) f h^{-1}[g(x)]$.

Так, например, если положить $v(x)$ постоянным, $f(n) = \sin n$ и $h(n) = \sqrt{n}$, то при произвольной входной зависимости $g(x)$, выходное напряжение схемы будет равно $e = k \sin[g(x)]^2$, где k — масштабный коэффициент. Если же положить $f(n) = n$ и $h(n) = \sqrt{n+1}$, то выходное напряжение будет равно $e = kv(x)[g(x)^2 - 1]$.

В последнем случае функциональное устройство может заменить блоки перемножения и возведения в квадрат, необходимые при решении электрической модели уравнения Ван-дер-Поля. Отмечается, что описываемое функциональное устройство может быть особенно полезным для применения в электромоделирующих устройствах, работающих в режиме периодизации решения, где требуются хорошие частотные характеристики и возможны худшие показатели по точности. При этом указывается, что для большинства функциональных зависимостей число точек разбиения может лежать в пределах от 5 до 15 и что возможно также такое выполнение устройства, чтобы амплитудные компараторы срабатывали при выполнении условий $\frac{dg(x)}{dx} > 0$ или $\frac{dg(x)}{dx} < 0$. Показано, что в общем случае, если считать, что напряжения питания потенциометров задания ординат и потенциометров Q можно изменять в соответствии с изменением величин y и z соответственно, то выходное напряжение схемы будет являться функцией трех переменных, т. е. $e = f(x, y, z)$. При постоянном напряжении питания потенциометров Q и при подаче напряжений питания потенциометров задания ординат через функциональный преобразователь одной переменной, образующий $v(y)$, выходное напряжение схемы будет пропорционально произведению функциональных зависимостей двух переменных: $e = f(x)v(y)$. При постоянстве напряжений питания потенциометров задания ординат и при подаче напряжений питания потенциометров Q через функциональный преобразователь одной переменной, образующий $s(z)$, а напряжения, пропорционального x, через преобразователь для образования $g(x)$ выходное напряжение схемы будет равно $e = f\left[\frac{g(x)}{s(z)}\right]$. В заключение указывается возможность образования широкого класса функций, используя сочетание описанного блока с другими схемами. И. М. Витенберг

8613. Использование лишних интеграторов в моделирующих вычислительных установках. Скотт (On the use of redundant integrators in analog computers. Scott Norman R.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 4, 287—288 (англ.)

Рассматриваются погрешности, вносимые интегрирующими усилителями при решении задач на модели в тех случаях, когда число используемых в схеме интеграторов превышает порядок характеристического уравнения решаемой задачи. В идеальном случае лишние интеграторы не должны влиять на решение, но на практике они вызывают изменение расположения корней характеристического уравнения и, кроме того, могут появляться дополнительные корни с большими положительными действительными частями. Рассматривается пример простой электрической цепи (см. рисунок). Если составлять



схему для решения на модели по уравнениям

$$\left.\begin{aligned} e(t) &= i_1 + di_1/dt - di_2/dt \\ 0 &= i_2 + di_2/dt - di_1/dt \end{aligned}\right\},$$

то в нее войдут два интегрирующих усилителя: один для получения i_2 по $-di_2/dt$, другой для получения $-i_1$ по di_1/dt, в то время как в моделируемой схеме имеется только один реальный интегрирующий элемент — индуктивность. Незначительная неодинаковость постоянных интегрирования двух интеграторов, а также неточный подбор параметров других элементов схемы (например, входных сопротивлений в суммирующих усилителях) вносит, как показано в статье, погрешности в получаемое решение, а именно: неодинаковость постоянных интегрирования смещает истинные корни уравнения, а неточность подбора параметров вызывает появление дополнительных (ложных) корней. Отмечается, что для частичной компенсации действия указанных ложных корней можно искусственно вводить в схему дополнительное демпфирование. Все излагаемое относится только к тем случаям, когда лишние (т. е. превышающие порядок характеристического уравнения) интеграторы входят в замкнутый контур схем решения. В. А. Брик.

8614. Электронный интегратор с непосредственным цифровым выходом. Хайси, Перл (Electronic integrator with immediate digital output. Hisey B. L., Perl E. R.), Rev. Scient. Instrum., 1958, 29, № 5, 355—359 (англ.)

Описывается метод получения численных величин, пропорциональных площади повторяющихся волн напряжения. Метод основан на суммировании импульсов генератора, частота повторения которых является линейной функцией входного напряжения. Устройство оказывается мало чувствительным ко всякого рода помехам и обладает достаточно большими линейностью и стабильностью. Прибор предназначался для измерения поверхности треугольных форм напряжения длительностью около 1 мсек., с которыми приходится иметь дело в биологии при исследовании реакции нервных окончаний

на различные рефлексы. Приводится блок-схема устройства, состоящая из генератора импульсов, число которых пропорционально мгновенному значению входного напряжения, и счетчика импульсов, между которыми включена стробирующая схема, обеспечивающая нечувствительность интегратора к помехам. Приводится принципиальная схема интегратора и некоторые результаты ее экспериментального исследования. При подаче на вход импульсов правильной треугольной формы число выходных импульсов остается постоянным в пределах 0,2%. Дрейф нулевой частоты мал. Линейность лежит в пределах 2%. Результаты обработки экспериментальных данных с помощью планиметра и интегратора показывают, что последние отличаются не более, чем на 3%. Указывается и на другие возможности применения схемы для интегрирования импульсов напряжения или части импульсов при длительности до 10 мсек., если отсутствуют компоненты с частотами выше 40 *кгц*. Библ. 6 назв. Б. Ш. Беркович

8615. **Интегратор переменного тока типа «велодайн». Шарп, Вильямс** (An a. c. velodyne integrator. Sharp J. B., Williams R. W.), J. Scient. Instrum., 1958, **35**, № 4, 125—129 (англ.)

Описывается электромеханический интегратор, работающий на переменном токе частотой 50 *гц*, основанный на принципе работы „велодайна" (особый тип электромашинного усилителя. — *Реф.*), используемый в моделирующих устройствах специального назначения. Приводится блок-схема такого интегратора, состоящая из входной цепи, усилителя с высоким коэффициентом усиления, двухфазного индукционного мотора и механически связанного с ним двухфазного индукционного генератора, выходное напряжение которого пропорционально скорости вращения, а угол поворота вала — интегралу входного сигнала. В качестве принципиальных трудностей создания такого интегратора указывается на нестабильность, вызванную мертвым ходом механизма сцепления мотора с генератором, нестабильность, обусловленную сдвигом фаз усилителя на несущей частоте, насыщение усилителя, возбуждение генератора, помехи, вызванные тем, что при равномерном вращении ротора генератор выдает малые, но достаточной амплитуды выходные сигналы, имеющие характер случайных сигналов. Указывается на известные способы борьбы с этими трудностями.

Приводится принципиальная схема входной части, фильтра, элементов обратной связи, а также принципиальная схема усилителя с внутренним коэффициентом усиления 20 000, сниженным обратной связью до 1000, что считается достаточным для уменьшения ошибок интегрирования, вызванных кулоновским трением, до допустимых величин. Приводится краткое описание конструкции, а также некоторые его динамические характеристики. Процесс перехода с одного постоянного уровня входного сигнала на другой составляет 0,06 сек. Ускорение, развиваемое мотором, составляет 1400 рад/сек², момент инерции мотора 150 *гсм*, генератора — 54 *гсм*, максимальный момент, развиваемый мотором, 290 *гсм*. Указывается на влияние температуры. Библ. 3 назв. Б. Ш. Беркович

8616. **Влияние неидеальности характеристик интеграторов и сумматоров на работу электронных моделей. Орданович А. Е.**, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 1, 155—161

Указывается, что при оценке качества электрического моделирования простейшей колебательной системы удобна замена коэффициента передачи электрической модели в разомкнутом состоянии $K(p)$ произведением идеального коэффициента передачи $K_0(p)$ на поправочный множитель $P(p)$, причем в рабочем диапазоне частот $|P(p)| \approx 1$, а $\varphi = \arg P(p) \ll 1$, так что можно считать, что $P(p) \approx 1 + i\varphi(p)$.

Рассматривается выражение для поправочного множителя операционного усилителя, суммирующего усилителя, интегрирующего усилителя и показано использование этих выражений для оценки качества моделирования, а также корректировки характеристик некоторых элементов модели.

Включение сопротивления ρ ухудшает добротность колебательной системы. И. М. Витенберг

8617. **Расчет точности электромеханического интегратора и некоторые возможные способы ее повышения. Смолов В. Б., Смирнов Н. А.**, Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1958, вып. 34, 34—35

Приводится блок-схема электромеханического интегратора, состоящая из компенсационного узла, моторного усилителя, следящего двигателя и тахометра, выходной вал которых отрабатывает угол, пропорциональный интегралу входного напряжения. Приводится теоретическая оценка точности работы такого интегратора и способов ее увеличения. Оценивается основная методическая ошибка, одна из составляющих которой определяется законом изменения интегрируемого напряжения и параметрами устройства, а вторая характеризуется статическим моментом нагрузки и определяется чувствительностью усилителя. Оценивается также дополнительная погрешность, определяемая помехами в интегрируемом напряжении, условиями эксплуатации (температура, влажность и т. п.), точностью изготовления отдельных элементов устройства. Б. Ш. Беркович

8618. **Цифронепрерывные функциональные блоки. Хофхеймер, Перри** (Digital-analog function generators. Hofheimer R. W., Perry K. E.), IRE Trans. Instrum., 1958, **7**, № 2, 111—117 (англ.)

Описывается метод построения функциональных блоков, обеспечивающих получение непрерывной выходной величины при цифровой входной величине. В качестве основного элемента этих блоков используются прецизионные проволочные сопротивления с параллельно или последовательно включенным ртутным контактом. Замкнутое или разомкнутое состояние каждого из контактов определяется значением соответствующего разряда входного двоичного числа. Подсоединение определенных комбинаций таких элементов к источнику напряжения (постоянного или изменяющегося) позволяет получить величину выходного напряжения, пропорциональную некоторой функции входной цифровой величины. Рассматриваются методы синтеза подобных схем для образования синусоидальной функции, степенных полиномов и т. п. Время срабатывания одного контакта 5 мсек. Точность функциональных блоков оценивается величиной 0,1%. А. В. Шилейко

8619. **Двухканальный автоматический оптимизатор. Стаховский Р. И.**, Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 8, 744—756 (рез. англ.)

Перечислены основные задачи, которые позволила решить схема двухканального оптимизатора, и в том числе практически проверить различные алгоритмы работы схемы, экспериментально проверить зависимости точности и времени поиска от параметров установки для различных методов поиска, а также разработать варианты простых и надежных схем отдельных блоков аппарата. Представлены общее описание и принципиальная схема макета оптимизатора, состоящего из операционного блока, управляющего блока и блока ограничения.

Указывается, что требования к операционным усилителям схемы по точности и допустимой величине дрейфа нуля являются менее жесткими, в связи с чем в установке используется вариант простой и надежной схемы трехкаскадного усилителя на лампах 6Н9 и 1/26Н8 с питанием от стабилизированных источников напряжения +300, —190 и —300 *в*. Кратко описаны схема двухполярного последовательного ключа, обеспе-

чивающего дрейф нуля выходного напряжения интегрирующего усилителя в пределах $\pm(1 \div 3)$ *в* в 1 мин. при $Rc = 1$ сек., управляющего мультивибратора с одним устойчивым состоянием, имеющего двухтактный выход и регулируемое время выдержки за счет изменения смещения, определителя суммы модулей частных производных, содержащего входные коммутирующие диоды, дифференциальный каскад и усилитель с выходным катодным повторителем.

Приведена схема нелинейного преобразователя на две входные величины, моделирующего объекта с одной точкой минимума и используемого для испытаний схемы оптимизатора.

Представлены результаты испытаний автоматического оптимизатора при работе с объектом, имеющим постоянные параметры — зависимости $Q(t)$ при поиске по методу наискорейшего спуска и при поиске по методу градиента, зависимость установившегося значения среднего превышения f_0 и времени поиска T_0 от величины шага приращения для обеих методов, причем кривая для T_0 имеет минимум, связанный с большими затратами времени поиска при малом шаге, а также с затратами времени на возврат к заданному уровню при движении большими шагами.

Рассматриваются результаты поиска минимума для случая, когда объект имеет переменные параметры, и точка минимума перемещается. Указывается наличие критической скорости изменения выходной величины объекта, когда поиск дезорганизуется, и возможность увеличения критической скорости за счет увеличения шага приращения переменной при определении градиента. Представлены зависимости величины f_0 от частоты изменения координат точки минимума, от величины пробного шага и от величины рабочих шагов при поиске. В последнем случае кривая имеет минимум, связанный с тем, что при малых шагах система не успевает отслеживать колебания точки минимума, а при больших шагах — система далеко уходит от точки минимума.

Показано, что при задании помех от генератора шумов, обладающего „белым" спектром помех в области частот от нескольких герц и ниже, на вход объекта одновременно с сигналами от оптимизатора таким образом, что напряжение помех могло меняться от нуля до величины со среднеквадратичным значением, превосходящем в два раза величину пробного шага, величина f_0 изменяется пропорционально уровню помех, а T_0 практически не изменяется.

Рассматриваются два случая исследования задачи с дополнительными ограничениями: при точке минимума, лежащей в области, где нет ограничений, или при точке минимума, лежащей на границе области ограничения. В первом случае система работает аналогично предыдущему, а во втором — входит в установившийся автоколебательный режим около точки минимума.

Основными выводами работы являются способность описанного устройства к поиску экстремума функции нескольких переменных, целесообразность сочетания метода наискорейшего спуска и метода градиента и установление связи между величинами пробного и рабочего шагов с точностью и скоростью поиска.

И. М. Витенберг

8620. **Автоматический оптимизатор.** **Фельдбаум А. А.**, Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 8, 731—743 (рез. англ.)

Рассматривается общая постановка задачи автоматического поиска условий, обеспечивающих минимум некоторой величины $Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наличии дополнительных ограничений, заданных в виде неравенств, которым должны удовлетворять переменные x_i : $H_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$ для $j = 1, \ldots m$, для случая, когда сначала на входе исследуемого объекта устанавливаются величины x_i, а через некоторое время на его выходе появляется значение Q. Приведены краткие соображения о выборе метода поиска и указывается, что для описываемого аппарата из числа имеющихся методов — метода поочередного изменения переменных, релаксационного метода, метода градиента и метода наискорейшего спуска — применены метод наискорейшего спуска при больших отклонениях Q от минимума и метод градиента при малых отклонениях от минимума.

Рассматривается алгоритм работы автомата при использовании метода наискорейшего спуска, включающий этап выбора направления максимального уменьшения Q и этап движения по этому направлению до точки, в которой Q минимально на данном направлении. Указывается, что описанный алгоритм может быть осуществлен в двух вариантах. В первом варианте движение по выбранному направлению производится сначала грубыми шагами, а затем по достижении области минимума Q — малыми шагами; во втором варианте величина шага сохраняется неизменной на весь период движения по данному направлению.

Представлены блок-схемы последовательности операций для каждого из вариантов, для которых общими являются операция определения градиента, операция определения величины шага в зависимости от близости величины Q к минимуму (при больших отклонениях от минимума — грубый шаг, при малых отклонениях — малый шаг, если отклонение от минимума меньше некоторой заранее заданной величины — повторение операции определения градиента) и операция выбора следующего действия в зависимости от знака ΔQ. В первом случае при $\Delta Q > 0$ происходят реверс и переход к перемещению малыми шагами, а во втором случае — возврат к операции определения градиента.

Описывается работа принципиальной схемы устройства, использующего первый вариант, большой цикл которой содержит такт запоминания „старого" значения Q, такты запоминания частных производных $\partial Q/\partial x$ и ряд циклов, осуществляющих операцию движения по заданному направлению. Схема использует операционные усилители, переключаемые для заряда конденсатора при запоминании в режим инерционного звена, а для запоминания — в режим повторения за счет последовательной обратной связи; задание приращений при определении градиента производится с помощью суммирующих усилителей, а при движении по направлению — с помощью интегрирующих усилителей, входными напряжениями которых являются напряжения, пропорциональные $\partial Q/\partial x$.

Управление работой усилителей осуществляется с помощью электронных ключей от управляющего блока. Изменение величины шага приращения производится путем изменения R_c интегрирующих усилителей задания приращений за счет включения различного числа входных сопротивлений. Приведены также описание работы схемы, реализующей второй вариант, и структурная схема варианта управляющего блока, содержащего кольцевую триггерную схему.

Рассматривается возможность перехода от операций минимизации величины Q к операциям выхода из областей, запрещенных условиями H_j, когда аппарат производит операции определения градиента и движение по выбранному направлению для минимизации суммы $H_0 = H_{j1} + H_{j2} + \ldots + H_{jl}$, где $l \leqslant m$, и представлено описание работы схемы, переключающей поиск от операций по Q к операциям по H.

И. М. Витенберг

8621. **Исследование переходных процессов и стабильности в последовательных цифровых системах автоматического регулирования с помощью моделирующей вычислительной машины.** **Элгерд** (An analog computer study of the transient behavior and stability characteristics of serial-type digital data systems. Elgerd

Olle I.), Commun. and Electronics, 1958, № 37, 358—366. Discuss., 366 (англ.)

Описывается метод моделирования импульсной системы автом тического регулирования с помощью электронной моделирующей вычислительной машины. Для моделирования импульсной части системы использовался ключ, который замыкался периодически с частотой, равной частоте импульсов моделируемой системы, и операционный усилитель, включенный по схеме интегратора и «запоминающий» значение амплитуды очередного импульса вплоть до момента появления следующего импульса (замыкания ключа). Линейная часть системы автоматического регулирования моделировалась обычным способом. С помощью подобной модели исследовались переходные процессы для пяти различных систем, отличающихся расположением полюсов и нулей передаточных функций. Библ. 7 назв. А. В. Шилейко

8622. **О моделировании на электропроводной бумаге. Благовещенский Ю. В., Остапенко В. Н., Панчишин В. И., Фильчаков П. Ф., Шаманский В. Е.,** В сб.: Межвуз. конференция по применению моделирования в электротехн. задачах и матем. моделирования. М., 1957, 154—155

См. РЖМат, 1956, 3033 Д, 4930, 5816, 8745; 1958, 7314

8623. **Новое моделирующее устройство *GE* решает проблему механизации** (New *GE* analog computer solves machining problems), Amer. Machinist, 1955, **99**, № 12, 189 (англ.)

8624. **Воспроизводящий перфоратор, работающий на полупроводниковых триодах. Кол, Цзянь, Пропстер** (A transistorized transcribing card punch. Cole C. T., Jr, Chien K. L., Propster C. H., Jr), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 80—83. Discuss., 83 (англ.)

Карточный перфоратор, воспроизводящий информацию с магнитной ленты, предназначен для работы в качестве выводного устройства цифровой вычислительной машины БИЗМАК. Это устройство выводит информацию со скоростью 150 карт в 1 мин. с контролем правильности перфорации. Устройство состоит из двух узлов— схемного и механического. Схемы выполнены на простых полупроводниковых элементах и смонтированы на разъемах. Механическая конструкция передачи карт и механизмы перфорации размещены в отдельном отсеке со съемной крышкой. Информация подается с магнитной ленты через семь каналов со скоростью от 30 до 50 *кгц*. Работа устройства протекает в три цикла: цикл чтения, цикл перфорации и цикл проверки. В первом цикле информация с ленты считывается во временное местное запоминающее устройство, во втором цикле эта информация через электронный коммутатор подается на механизм перфорации. Во время второго цикла информация считывается с перфокарты с помощью 80 щеток и подается в регистр сдвига, где она преобразуется из параллельной формы в последовательную и передается в сравнивающее устройство, куда подключается также временное запоминающее устройство для осуществления контроля правильности перфорации.

В схемах устройства применены полупроводниковые схемы клапанного типа, которые не только осуществляют клапанные функции, но и усиливают и формируют сигналы, схемы кипп-реле с задержкой 0,2 мксек. и триггерные ячейки на полупроводниковых триодах. Схемы нечувствительны к заметным изменениям питающих напряжений и параметров транзисторов. Схемы весьма просты и набираются из стандартных элементов. Г. Х. Новик

8625. **Полностью автоматизированная машина для вычисления функции с помощью параболической интерполяции. Рамзайер** (Vollautomatische Funktionsrechenmaschine mit zweistufiger Interpolation. Ramsayer K. Veröff. Dtsch. Geodät. Kommis. Bayer. Akad. Wiss. 1954, **B**, № 14, 26 S.) (нем.)

Описание механического функционального устройства для вычисления наиболее часто встречающихся в геодезической практике функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sectg} x$, $\sqrt{x}$ (РЖМат, 1954; 3523; 5865, 5866; 1955, 3488К). Устройство смонтировано на базе автоматической клавишной машины со ступенчатыми валиками МАДАС-20. Все функции вычисляются с помощью параболической интерполяции по формуле

$$g_n(x) = (c_n \cdot \Delta x + b_n) \cdot \Delta x + a_n.$$

Коэффициенты a_n, b_n, c_n запоминаются в машине. Процесс вычисления управляется механическим программным устройством, которое состоит из специальных профильных дисков. Для запоминания каждого из коэффициентов a_n, b_n, c_n служит свой профильный диск. Для интерполяции функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{sectg} x$ запоминается 100 коэффициентов, для функции $\sqrt{x}$ — 200 коэффициентов. Время вычисления одного значения одной из вышеперечисленных функций занимает от 20 до 30 сек.

Машина обеспечивает точность, даваемую восьмизначными таблицами соответствующих функций. Дано математическое обоснование предлагаемой механической системы для интерполяции функции. Библ. 5 назв. Д. А. Поспелов

8626. **Некоторые мысли эксплуатирующего цифровые вычислительные машины. Картрон** (Quelques réflexions d un exploitant de calculatrices numériques. Carteron J.), Onde électrique, 1956, **36**, № 353—354, 750—752, 44 (франц.; рез. англ.)

Описывается опыт эксплуатации цифровых вычислительных машин и электронных моделирующих устройств в Исследовательском управлении фирмы „Электриситэ де Франс" (Electricité de France). Работа с моделирующими вычислительными установками была начата в конце 1953 г., первые программы на цифровой машине были запущены в конце 1954 г.

Рассматриваются необходимые соотношения между быстродействием собственно вычислительной машины и ее входных и выходных устройств при различных задачах, а также соотношение между теоретической и реальной скоростями вычислений на машине. Описано повышение быстродействия, благодаря автоматизации перехода от вычислений в системе с плавающей запятой к вычислениям в системе с фиксированной запятой, а также автоматизации деления (по подпрограммам,включаемым после условного или безусловного переходов). Вкратце рассмотрен круг задач, решавшихся на машинах Управления за время их эксплуатации. А. А. Крупский

8627. **CASE открывает вычислительный центр** (Case opens computing center), Midwest Engr, 1958, **10**, № 11, Part 1, 9—10 (англ.)

Сообщается об открытии 12 апреля 1958 г. вычислительного центра в технологическом институте г. Кливленда. Вычислительный центр располагает вычислительной машиной УНИВАК I стоимостью 1,5 миллиона долларов и вычислительной машиной ИБМ-650. Общая стоимость вычислительного центра оценивается в 2,5 миллиона долларов. Предполагается ведение работ по исследованию применения вычислительных машин, а также решение различных практических задач, связанных с исследованиями в области цифрового анализа, логических расчетов, автоматического программирования и теории вычислительных машин. Вычислительный центр может выполнять 5 миллионов арифметических операций в 1 час.

При вычислительном центре открываются краткосрочные курсы по обучению обслуживания вычислительных машин. О. В. Бачин

8628. **Сообщение о семинаре по электронным устройствам. Хельбиг** (Bericht über das Seminar über elektronische Anlagen. Helbig Manfred), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1958, **3**, № 4, 487—500 (нем.)

На XV Международном конгрессе по математическим вопросам страхового дела, происходившем в октябре 1957 г. в Нью-Йорке, работал семинар по электронным вычислительным устройствам.

Кратко изложены проблемы, рекомендации и результаты Приведены таблицы данных по уже применяемым в страховых компаниях машинам. Д. А. Поспелов

8629. **Современная вычислительная техника. Инцинтер** (Moderne Rechentechnik. Inzinger R.), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 1, 1—6 (нем.)

Приведены учебные планы Высшей технической школы в Вене для подготовки специалистов в области использования вычислительных машин. Н. П. Жидков

8630. **Вычислительная машина ИБМ-705 (Вводный курс). Пьетрару** (Introduction à l'étude de l'ordinateur 705 IBM. Pietraru H.), Rev. mécanogr., 1958, **12**, № 129, 224—230 (франц.)

8631. **Введение в изучение автоматов с последовательным действием. II. Наслен** (Introduction à l'étude des automatismes à séquences. Naslin Pierre), Automatisme, 1958, **3**, № 2, 43—49 (франц.)

Статья общего характера. Часть 1 см. РЖМат, 1958, 8649.

8632. **Новая счетная машина. Терменс-Маури** (Nueva máquina de pensar. Termens Mauri Jaime), Rev. industr. y fabril, 1958, **12**, № 131, 416—424 (исп.)

Популярная статья, посвященная философской стороне вопроса применения вычислительных машин. Рассматриваются исторические вопросы вычислительной техники. Даются некоторые сведения о кибернетике и теории информации, а также рассматриваются проблемы машинного перевода с точки зрения их анализа на вычислительной машине. О. В. Бачин

8633. **Электронные машины и инженер** (Electronic computers and the engineer. Mechanikos), Electron. and Radio Engr, 1958, **35**, № 11, 420—423 (англ.)

Статья общего характера.

8634. **Электронный мозг и будущее. Дельпьер** (Les cerveaux électroniques et la vie de demain. Delpierre Michel), Sci. et techn., 1958, **16**, № 1-2, 11—14 (франц.)

Популярная статья.

8635. **О научном развитии вычислительной техники. Самер** (Über die Entwicklung wissenschaftlicher Rechenmaschinen. Szamer B.), Neue Techn. Büro, 1958, **2**, № 10, 232—234 (нем.)

8636. **Анализ контекстов. Харпер** (Contextual analysis. Harper Kenneth E.), Mech. Translat., 1957, **4**, № 3, 70—75 (англ.)

Приводится ряд грамматических правил для раскрытия синтаксических и семантических неопределенностей текста при машинном переводе с русского языка на английский на основе анализа предыдущих и последующих слов предложения. Отмечается, что осуществление контекстного анализа потребует систематического изучения контекста с целью установить классы слов, которыми определяются типы контекста. Дается отрицательный отзыв об идее „пословного перевода" (word-for-word translation). Утверждается, что анализ непосредственного окружения слова дает информацию для снятия как синтаксической неопределенности, так и семантической многозначности слов. Кроме того поясняется, что для целей синтаксического анализа обычные (традиционные) грамматические понятия пригодны и весьма полезны. Рассматриваются различные случаи перевода существительных, прилагательных, наречий и причастий, случаи раскрытия смысловых неопределенностей и т. п. Отмечается, что в произвольно взятом русском научном тексте до 43% слов имеют больше, чем одно значение.

А. В. Шилейко

8637. **Логические операции и анализ контекста при машинном переводе. Джонсон, Уолл** (Logical processing and context analysis in mechanical translation. Johnson David L., Wall Robert E.), Trend Engng Univ. Wash., 1958, **10**, № 3, 14—22, 25 (англ.)

Описываются работы по машинному переводу с русского языка на английский, проводившиеся в Вашингтонском университете. Отмечается, что в случае использования для перевода цифровой вычислительной машины с запоминающим устройством небольшой емкости, слова языка оригинала разбиваются на основы и окончания и хранимый в запомин ющем устройстве словарь состоит из двух частей: словаря основ и словаря окончаний. В случае использования специализированных машин с запоминающим устройством большой емкости все грамматические формы одного слова хранятся в виде самостоятельных словарных единиц. Для определения необходимого объема слов ря было исследовано 110 русских научных текстов из 40 различных областей науки и техники. Слова из этих текстов, взятые во всех возможных грамматических формах, составили 150 000 словарных единиц на русском языке и около 500 000 соответствующих им английских эквивалентов. По предварительным подсчетам емкость запоминающего устройства, требуемая для хранения словаря, составляет около 50 млн. двоичных ячеек и еще около 50 млн. ячеек для хранения грамматических инструкций, прилагаемых к каждому слову. В работах Вашингтонского Университета использовалось фотоэлектрическое запоминающее устройство, имеющее емкость 30 млн. двоичных ячеек и среднее время обращения 50 мсек., разработанное специально для этих целей фирмой „International Telemeter Corp". Это дало возможность иметь в составе словаря грамматические формы большинства слов, а также большое количество идиомов. Каждому русскому слову ставился в соответствие набор английских эквивалентов, как например, „(they) are-chosen/taken-out/get", где круглые скобки означают, что заключенное в них слово может быть отброшено, а косые штрихи означают, что должно быть выбрано одно из ряда разделяемых ими слов. К каждому слову прилагалась лингвистическая инструкция. Например, лингвистическая инструкция к слову, рассмотренному выше, записанная в форме, принятой в описываемой работе, будет иметь вид:

$$_{I}V_{3PL}\cdot\{Ad \cup Pa\}\cdot\sim p_n E^n\cdot f_n E^n = \sim (\text{they}),$$

где Ad — наречие, I^V — безличный глагол, V_{3PL} — глагол в 3 лице множественного числа, Pa — частица, P_n — означает, что предшествующая часть предложения может состоять из неопределенного количества слов, относящихся к определенному классу, E^n — именительный оборот, f_n — означает, что последующая часть предложения может состоять из неопределенного количества слов, относящихся к определенному классу, $\{\}$ — указывают на допускаемый класс форм и $\sim$, $\cdot$, $\cup$ — представляют собой символы, соответственно отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Очевидно, что многие лингвистические инструкции могут совпадать по форме и часть из них может комбинироваться между собой. Перевод русского текста выполняется в два этапа. На первом этапе из словаря поочередно выбираются все эквиваленты слов оригинала и соответствующие им лингвистические инструкции. После того, как это оказывается выполненным для большей части текста, лингвистические инструкции сортируются по классам и с их помощью составляется программа дальнейшей обработки получаемого в результате первого этапа „пословного" перезода. Обработка пословного перевода заключается в выборе подходящих эквивалентов и расстановке предлогов

на основании анализа контекста. В частности, в рассмотренном выше примере лингвистической инструкции формулируются условия, при которых слово (they) может быть опущено. Программа доработки составляется в соответствии с особенностями выбранной для этой цели вычислительной машины. Одним из преимуществ описываемого метода является возможность непосредственного ввода в вычислительную машину лингвистических инструкций для автоматического программирования. Рассматриваются примеры выполнения доработки текстов на электронной цифровой вычислительной машине ИБМ-650. В заключение отмечается, что стоимость пробивки исходного текста на перфокартах или перфоленте для системы перевода, использованного Вашингтонским Университетом, составляет около 0,85 цента за слово. Стоимость обращения к словарю, хранящемуся в запоминающем устройстве фирмы „International Telemeter Corp.", составляет около 0,1 цента за слово. Стоимость доработки, даже при использовании машины класса ИБМ-701, составляет 0,5 цента за слово. Это дает суммарную стоимость машинного перевода в 1,45 цента за слово, в то время как стоимость выполнения этой же работы переводчиком равняется 1 центу за слово. Приводятся блок-схемы программ доработки на машине ИБМ-650. А. В. Шилейко

8638. **Речевые входные данные. Лок** (Speech input. Locke W. N.), Mach. Translat. Languages. 2nd print. S. I., Technol. Press Massachusetts Inst. Technol.; New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, 104—118 (англ.)

Проводится подробный теоретический анализ проблемы ввода данных в машину, выполняющую автоматический перевод с одного языка на другой, в форме звуков человеческой речи. Отмечается, что подобная проблема оказывается значительно более сложной, чем, например, ввод данных в форме печатного или даже рукописного текста. Основная сложность заключается в том, что элементами речи являются не слова, а звуки, слоги или фонемы. Часто в живой человеческой речи отсутствует часть информации, так как предполагается априорное наличие ее у собеседника или же эта недостающая информация передается в форме интонаций, жестов и т. п. С другой стороны, в речи всегда присутствует избыточная эмоциональная информация. Сообщается об устройстве AUDREY (Automatic Digit Recognizer), разработанном фирмой „Bell Laboratories", различающем звучания цифр от 0 до 9, произносимых мужским голосом. Библ. 8 назв. А. В. Шилейко

8639. **Некоторые новые термины. Рейфлер** (Some new terminology. Reifler Erwin), Mech. Translat., 1957, **4**, № 3, 52—53 (англ.)

Описываются значения пятнадцати терминов, возникших при совместных работах инженеров и лингвистов в области машинного перевода в Вашингтонском университете. Так, например, „символами контекста" (contextual symbols) называются буквы, цифры, знаки препинания и специальные знаки, из которых состоят тексты оригинала и перевода. „Входными символами" и „выходными символами" называются соответственно символы контекста оригинала и перевода. „Граничными символами" (bound symbols) называются символы, входящие в текст таким образом, что у них либо справа, либо слева, либо с обеих сторон отсутствуют свободные промежутки. Различают левые граничные символы, правые граничные символы и двойные граничные символы. „Значащими" (meaningful) граничными символами называют символы контекста, имеющие: а) грамматический смысл (s в слове fathers); б) неграмматический смысл (символ g, отличающий слово pang от слова pan); в) одновременно грамматический и неграмматический смысл символ „о", различающий слова писать и описать). „Последовательностью символов" (symbol sequence) называется ряд символов, неразделенных промежутками. Соответственно различают „граничные последовательности символов" и т. п. А. В. Шилейко

8640. **Могут ли машины переводить?** (Can machines translate?), Electronics. Business Ed., 1958, **31**, № 12, 26—27 (англ.)

Краткий обзор состояния работы по машинному переводу в США. Указывается, что „Национальный научный фонд" („National Science Foundation") провел в 1958 г. совещание представителей правительственных учреждений и исследовательских групп, ведущих работу по машинному переводу.

Указывается, что вычислительные машины могут делать все, что потребуют от них лингвисты, но „лингвисты еще не уверены, чего они хотят".

Отмечается работа по созданию англо-русского словаря в Гарвардском университете. После 10-летней работы, вскоре будет закончен русско-английский словарь для машинного перевода на магнитных лентах, содержащий 10000 однозначных русских слов.

В Вашингтонском университете также составляется русско-английский словарь на основе анализа 111 русских текстов из 31 области знания. Он содержит 14000 слов, включая различные формы одного и того же слова. Предполагае ся, что добавление других форм для этих же слов доведет его объем до 200 000 слов.

Указывается, что „русские ведут первоклассную работу по переводу с английского на русский, более трудному, чем перевод с русского на английский ..." и что „... существует убеждение, что русские исследователи ушли дальше, чем наши" ... Д. Ю. Панов

8641. **Перевод. Мак-Каллох** (Übersetzen. McCullough John), Notre Dame Techn. Rev., 1958, **9**, № 3, 24—25, 62 (англ.)

Рассматривается постановка задачи перевода с одного языка на другой с помощью математической машины и кратко описывается работа машины при переводе.

Указывается, что основными методами получения правильного перевода на машине является „метод характеристик" и „метод микрословарей". Вырабатывая для каждого слова все необходимые грамматические характеристики, можно добиться правильного определения значения всех слов, даже многозначных. Использование „микрословарей", составленных для узких специальных областей, сокращает, а иногда и ликвидирует многозначность. А. Н. Чуйкин

8642. **Семантическая неопределенность. Харпер** (Semantic ambiguity. Harper Kenneth E.), Mech. Translat., 1957, **4**, № 3, 68—69 (англ.)

Анализ структуры русско-английского словаря показывает, что одно русское слово имеет в среднем 8,6 английских эквивалентов. Эти эквиваленты в свою очередь делятся на группы синонимов. Среднее число таких групп для одного русского слова равно трем. А. В. Шилейко

8643. **Может ли машина переводить с русского?** (Can a machine translate Russian?), Prod. Engr, 1957, **28**, № 25, 85—86 (англ.)

Сообщение о том, что в начале 1958 г. должен быть проведен новый опыт машинного перевода. Машина ИБМ-705 должна была перевести 30 страниц текста по органической химии. Словарь объемом 2100 слов и правила подготовлены Ариадной Лукьяновой в Институте языков и лингвистики Джорджтаунского университета под руководством Леона Достерта, который провел в 1954 г. первый публичный опыт машинного перевода (РЖМат, 1954, 5293). Достерт заявил, что машинный перевод в широком объеме все еще дело будущего, но его группа получила первые важные результаты в области кодирования слов и синтаксических правил. Указывается, что в США не надеются иметь достаточно

совершенный машинный перевод ранее 1959 г. или даже 1962 г. И. И. Ревзин

8644. **Механический перевод. Кузнецов** (La traduction mécanique. Kousnetzoff N.), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 124, 462—463 (франц.)

Статья представляет собой краткое резюме материалов по машинному переводу, опубликованных в одном из выпусков международного журнала переводчиков „Babel" и литературного журнала „La Parisienne". Кратко отмечаются некоторые моменты истории вопроса, начиная с опыта П. П. Смирнова-Троянского в 1944 г. и кончая переводом, осуществленным в 1955 г. на машине БЭСМ. И. И. Ревзин

8645. **Практические проблемы развития. Перри** (A practical development problem. Perry James W.), Mach. Translat. Languages. 2nd print. S. l., Technol. Press. Massachusetts Inst. Technol.; New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Ltd., 1957, 174—182 (англ.)

В общих чертах рассматриваются основные проблемы возникающие при машинном переводе с русского языка на английский. Например, введение в текст перевода английских артиклей, определение грамматических функций слов оригинала и т. п. А. В. Шилейко,

8646. **Новая башня (Предисловие). Уивер** (The new tower. Foreword. Weaver Warren), Mach. Translat. Languages. 2nd print. S. l., Technol. Press Massachusetts Instn. Technol. New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Shapman and Hall, Ltd., 1957, V—VII (англ.)

Предисловие к сборнику статей по машинному переводу с одного языка на другой. Высказывается мнение что, хотя в настоящее время не ставится задача выполнения с помощью машин переводов, отвечающих каким-либо эстетическим требованиям, возможность логической обработки как текста оригинала, так и перевода, позволяет считать, что вычислительная машина, может быть чем-то более совершенным, чем простой „механизированный словарь". А. В. Шилейко

8647 К. **Математика и логика для цифровых вычислительных устройств. Калбертсон** (Mathematics and logic for digital devices. Culbertson James Thomas. Princeton, N. J.—London, D. Van Nostrand Co., 1958, x, 224 pp., ill., 36 sh.) Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 459, 10 (англ.)

8648 К. **Как работает вычислительная машина. Томпсон** (How a computer works. Thompson John Goeffrey. London, Office Manag. Assoc., 1958, 23 pp., ill., 2 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 450, 9 (англ.)

8649 К. **Элементы цифровых вычислительных машин. Т. I. Мерфи** (Basics of digital computers. Vol. 1. Murphy John S. New York, John F. Rider, 1958, 116 pp., ill., 7. 95 doll.) Publishers' Weekly, 1958, **174**, № 2, 52 (англ.)

8650 К. **Логарифмическая линейка. Практ. руководство. [Изд. 3-е, испр. и доп.]. Широких И. И.** Томск. Книгоиздат, 1958, 63 стр., илл., 1 р. 50 к.

8651 Д. **Разработка и исследование автоматического оптимизатора. Стаховский Р. И.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ин-т автоматики и телемехан. АН СССР, М., 1958

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

8652. **Вычислительные машины и математическая статистика. Хейнхольд** (Rechenautomaten und Mathematiscne Statistik. Heinhold J.), MTW-Mitt., 1956, **3**, № 5, 205—218 (нем.)

Автор отмечает, что уже в настоящее время вычислительные машины применяются для решения ряда задач, связанных с вопросами математической статистики, так как только машины могут в короткий срок обрабатывать большое количество цифрового материала (к таким задачам относятся, например, подсчет платежей, определение результатов избирательной кампании, обработка материалов в институтах общественного мнения). Однако такого типа задачи не исчерпывают возможностей применения вычислительных машин для решения задач математической статистики.

В частности, автор считает, что электронные машины типа ПЭРМ и БЭСК (BESK) могут быть с успехом применены для решения задач регрессии. В качестве примера такой задачи рассматривается задача определения времени службы резцов в металлообрабатывающей промышленности. Подчеркивается, что для решения подобного класса задач можно составить типовую программу и для каждой конкретной задачи задавать лишь значения параметров в этой программе.

Рассматривается использование вычислительных машин для выработки псевдослучайных чисел. Применение метода Монте-Карло иллюстрируется на примере вычисления интеграла по n-мерной области. Библ. 22 назв. Д. А. Поспелов

8653. **Определение спроса на детали при помощи электронных счетных машин. Мейнардус** (Die Ermittlung des Teilebedarfs mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen. Meinardus Günter), Maschinenmarkt, 1958, **64**, № 16—17, 26—27 (нем.)

В статье изложен метод подсчета на электронных быстродействующих вычислительных машинах общего количества деталей данного вида, являющихся составными частями различных приборов, на изготовление которых фирмой получен заказ. В математической интерпретации задача определения для данного заказа потребности в деталях промышленного изготовления определенного вида сводится к умножению „вектора заказа" на „матрицу разложения". Действительно, если каждой детали присвоить определенный номер: a_1, a_2, a_3, ... ; а приборы обозначить G_1, G_2, G_3, ... , то можно записать „матрицу разложения":

		номера частей		
		a_1	a_2	a_3 ...
приборы	G_1	2	1	1
	G_2	4	1	2
	G_3	2	3	1
	.			
	.			
	.			

Цифры обозначают необходимое количество деталей с данным номером на прибор. При этом, если требуется изготовить прибор G_1 30 штук, G_2 — 25, G_3 — 5, то это символически можно записать в виде „вектора заказа": (30, 25, 5). Решение подобной задачи на быстр действующих электронных машинах делится на следующие этапы: 1) ввод точных начальных данных, т. е. „матрицы разложения" и „вектора заказа"; 2) непосредственное разыскание количества необходимых деталей; 3) изменение начальных данных; 4) проверка правильности записи матрицы разложения в памяти машины. Так как ввод на электронных счетных машинах относительно медленный по сравнению со скоростью вычислений, а также в целях экономии ячеек памяти, „матрицу разложения" предварительно кодируют и в таком виде вводят в машину.

При кодировании образуют в памяти „единицы" (зоны) информации „IE" и всем приборам присваивают порядковые номера. Запись

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9
a_i	1	0	0	1	1	0	0	1	0

означает, что приборам G_1, G_4, G_5, G_8 требуется деталь с номером a_i в количестве n_i штук. Полученное двоичное число 100110010 = 306 (в десятичной системе) переводят в десятичную систему счисления и отсылают в „IE". Этим однозначно сказано что приборы G_1, G_4, G_5, G_8 имеют деталь с номером a_i в количестве n_i штук.

Зная, сколько штук соответствующих приборов с данным номером G_i требуется изготовить, вычисляют необходимое количество деталей с номером a_i для тех приборов, в которых число этих деталей равно n_i.

Умножая полученный результат еще на n_i, получают искомое число подлежащих изготовлению деталей с данным номером. Иногда выгоднее объединить тройки цифр

$\underset{4}{\underbrace{100}}$ $\underset{6}{\underbrace{110}}$ $\underset{2}{\underbrace{010}}$ и в „IE" записывать число 462.

Если в машине закодированы также и другие символы, то можно пользоваться 16-ричной или 32-ричной системами. Изменение вводимых в машину начальных данных задачи, относящихся к „матрице разложения" или „вектору заказа", производят автоматически по неизменной, возможно более простой, программе. Контроль правильности записи „матрицы разложения" осуществляется отдельной программой, которая состоит в основном из методов декодирования. И. Ф. Шелихова

8654. **Система управления производством с помощью вычислительной машины. Хейнс** (A system for computer control of production and inventory. Haynes James E. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1958, № PROD-5, 8 pp., ill.) (англ.)

Описывается система обработки данных, принятая на заводе фирмы ИБМ в Рочестере (США), производящем от 8 до 10 тысяч отдельных деталей, требующих 5 тыс. наименований различных материалов. Для изготовления этих деталей используется 2000 самостоятельных технологических процессов. Всего на заводе занято 2000 человек. Планирование работы выполняется производственным отделом со штатом 100 человек, и машиносчетной станцией со штатом 12 человек. Основная вычислительная машина типа ИБМ-650 обслуживается 10 человеками, разрабатывающими программы и методику. Планирование производства осуществляется на основе анализа конъюнктуры рынка за прошедшие 2 года. Этот анализ проводится отделом сбыта, который доводит его до конкретного производственного плана. Задачей производственного отдела и машиносчетной станции является выработка на основе этого общего плана текущих заказов отдельным цехам и участкам завода. В статье подробно описывается организация вычислительной работы. А. В. Шилейко

8655. **Вычислительные машины в химии в прошлом, настоящем и будущем.** (Computers in the chemical world—past, present, and future. Div. Industr. and Engng Chem., 133rd Meet. ACS San Francisco, Calif., Apr., 1958.—), Industr. and Engng Chem., 1958, **50**, № 11, 1621—1664 (англ.)

8656. **Автоматизация контроля, записи данных и статистического анализа систем. Ху** (Automatic testing, data recording, and statistical analysis system. Hoo Eugene), Electr. Manufact., 1958, **61**, № 1, 104—108 (англ.)

Статья общего характера.

8657. **Подбор публикаций по использованию быстродействующих вычислительных машин для научных вычислений. Форсайт** (Selected references on use of high-speed computers for scientific computation. Forsythe George E.), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, **10**, № 53, 25—27 (англ.)

8658. **Некоторые важные применения вычислительных машин.** (Some important applications of computers), Computers and Automat., 1958, **7**, № 10, 8—12, 14, 16, 18, 20 (англ.)

8659. **Электронные вычислительные машины и измерительные приборы в дорожном строительстве и транспорте** (Elektronische Rechenmaschinen und Meßgeräte im Straßenbau und Verkehrswesen.—hm), VDI-Nachr., 1957, **11**, № 22, 4 (нем.)

8660 К. **Автоматическое управление и вычислительная техника. Тр. совещания, провед. в марте 1957 г.** Ред. **Солодовников В. В.** (Научн.-техн. о-во приборостроит. пром-сти). М., Машгиз, 1958, 495 стр. илл., 20 р.

См. также: 8264.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абрамян Б. Л. 8097
Агаев Б. 7647
Адян С. И. 7896
Әзимов М. Э. 8032 К
Акушский И. Я. 8566, 8567
Алексеев О. И. 7939
Амбарцумян Г. 7595
Андреев А. Ф. 8008
Арсеньев Г. И. 8215

Б

Бабенко К. И. 7929
Бакельман И. Я. 7621, 8048
Банковська Н. В. 8101
Баславский И. А. 8542
Бахрах М. Г. 8168
Беленький М. Я. 7941
Березин Ф. А. 8154
Берлянд О. С. 8128
Бермэн Д. Л. 7916
Берман С. Д. 7784
Бершвили Г. 7994
Бийбосунов И. 8089
Бирман М. Ш. 7621
Бицадзе А. В. 7579
Благовещенский Н. И. 7658 Д
Благовещенский Ю. В. 8622
Блох З. Ш. 8118
Богачевський Ю. Т. 8359
Богданов Ю. С. 8016
Болгарский Б. В. 7650
Болотин В. В. 8092
Болтянский В. Г. (ред.) 7880 К
Борисенко Д. М. 8098
Бородачев Н. М. 8095
Брадистилов Г. 8142
Бредихина Е. А. 7917
Буравський Э. С. 8528
Бурмистров Е. Ф. 7943
Бутова Г. В. 8410

В

Вайнберг М. М. 8115, 8217
Вальц Г. Б. 8373
Валявко В. В. 8578
Варшавер Б. А. 8319
Васильева А. Б. 8005
Вашарин А. А. 8069 Д
Виденский В. С. 7955
Волков Д. М. 8046
Волков Д. П. 8358
Вороновская Е. В. 7920
Вострецов Б. А. 8035
Выгодский М. Я. 7654 К

Г

Гаврилов В. Д. 7582
Галимов К. З. 8121, 8122
Гапошкин В. Ф. 7903, 8195
Гаркави А. Л. 7910, 7914
Гвоздев Ю. В. 8398
Гегелиа Т. Г. 7977
Гейдельман Р. М. 8458
Георгиу Г. Т. 8455
Геронимус Я. Л. 7919
Гетманцев В. Д. 8526
Гіхман Й. І. 8238
Гнеденко Б. В. 7620
Гольдберг А. А. 7960
Горин Е. А. 8180
Гото 7684
Гребенщиков В. Н. 7591
Гуань Цзи-вэнь 8554
Гуань Чжао-чжи 8220
Гуревич Л. А. 8196
Нусейнов Э. И. (Гусейнов А. И.) 7584, 8116
Гутман С. Г. 8607
Гюнтер Н. М. 7652 К

Д

Давыдов Н. А. 8139 К
Данилюк И. И. 8063
Даугавет И. К. 8524
Денисов Ю. М. 8326
Депман И. Я. 7645
Дерендяев И. М. 8553
Дзядик В. К. 8191
Добрушин Р. Л. 8243

Е

Евграфов М. А. 7957
Евстифеев М. Ф. 8408
Епифанова А. П. 7633 К
Ермилов С. Н. 8110
Ешуков Л. Н. 7907

Ж

Жданович В. Ф. 8070 Д

З

Задоян М. А. 8123
Зандере М. К. 7888
Захаров Д. А. 8503
Зимин В. И. 8113 Д
Золин А. Ф. 8546
Золотарев Ю. Г. 7997

И

Ибраһимов Э. 7647
Иванов В. В. 7928
Иванов В. К. 7981
Ивлев Д. Д. 8105
Игнатьева А. В. 8065
Илиева В. 7990
Ильин В. А. 8042

К

Кадец М. И. 8190
Казбан А. М. 7984 Д
Каменомостская С. Л. 8072 Д
Кангро Г. 8147, 8148
Карнацевич Л. С. 7649
Карпелевич Ф. И. 8154
Кельзон А. С. 7996
Киприянов И. А. 7921
Кириллов А. А. 7794
Кирпотина Н. В. 8208
Киртадзе Г. А. 7854
Книгин А. Н. 7720 Д
Коваленко А. Д. 8170
Кованцов Н. И. 8463 Д
Козлов Е. М. 7991
Колмогоров А. Н. 8178, 8179
Кон А. А. 8407
Копытов В. Д. 7586
Коровкин П. П. 8139 К
Корулин Д. М. 8324
Костанди Г. В. 8388 К
Костычев Г. И. 7944
Кочарян Г. С. 7983 Д
Креймер А. Я. 7647
Кротова П. Г. 8076
Крылов А. Л. 8074 Д
Кузьмин Р. О. 7652 К
Куклес И. С. 8010
Курбатов В. А. 7769
Кушков Н. Н. 8014
Куюн А. И. 7582

Л

Лаврентьев М. А. 7580, 7581
Ладыженская О. А. 7621
Лаптев Б. Л. 8473
Леонтьев А. Ф. 7953
Ли Да-цянь 8517
Линковский Г. Б. 8246 8320
Линник Ю. В. 7594
Ли Си-минь 7813
Лозинский С. М. 8521
Лу Вэнь-дуань 7742
Лукомский Я. И. 8350 К
Лыкова О. Б. 8027
Лэн Шэн-мин 7694
Любченко Г. Г. 7683
Лю Лян-шэнь 8206, 8212
Лю Юн-цзин 8001

М

Магирос 8077, 8078
Мазмишвили А. И. 8372
Макарова З. Т. 8449
Малкина Р. Л. 8102
Малюжинец Г. Д. 8106
Маневич В. А. 8377 Д
Мартинович Т. Л. 7945
Мееров М. В. 8080
Мензел Д. 7605 К
Меннам К. 8527
Меркин Д. 8021
Минеев М. П. 7723
Минченко Л. С. 7636 Д
Митягин Б. С. 8180
Михлин С. Г. 8552
Мишонов М. 8103
Мищенко Е. Ф. 8029
Молодший В. Н. 7693
Мордухай-Болтовской Д. Д. 8419
Морозов В. В. 7817
Морозов Н. Ф. 8006
Моросанов И. С. 7589
Мостовский А. 7678
Мэн Ша-вэй 7688

Н

Найман М. И. 7946
Нафталевич А. Г. 7958
Невский В. А. 7602
Немцов В. 8568
Немыцкий В. В. 8115
Несмеянов А. 7577
Никольский В. Н. 8139 К
Никулин Н. А. 7767
Новиков П. С. 7896
Новоселов С. И. 7657 К
Норкин С. Б. 8002

О

Омельченко О. К. 8045
Орданович А. Е. 8616
Остапенко В. Н. 8622
Островский И. В. 7985 Д
Охаси К. 7680

П

Панчишин В. И. 8622
Пашенков В. В. 7823
Перов А. И. 7988
Петров И. М. 7766
Плехотин А. П. 8007

Погребысский И. Б. 7620
Положій Г. М. 8096
Прейс В. Ф. 8376 К
Проскуряков А. П. 8013
Путята Т. В. 7622

Р

Рашевский П. К. 8228
Репьев В. В. 7656 К
Риекстыньш Э. Я. 8018
Рогачевский Л. А. 8374
Рубинштейн Г. Ш. 8279
Рыжков В. В. 8465

С

Садыгов С. 7647
Сакович Г. Н. 7601
Сафронов Ю. В. 8101
Семенович А. Ф. 8400
Сесекин Н. Ф. 7787
Симонов Н. И. 7635 Д
Сираждинов С. 7590
Скляренко Е. 7855
Скоробогатько А. А. 8096
Скородумов В. М. 8403
Скорый И. А. 7586
Слободецкий Л. Н. 8062
Слугин С. Н. 8556
Смирнов Л. В. 7608 Д
Смирнов Н. А. 8617
Смирнов Ю. 7859
Смолов В. Б. 8617
Соболев В. Х. 8094
Соколов Ф. А. 8099
Соколовская Л. А. 8128
Соколовский В. В. 7607 К
Солодовников В. В. Ред. 8660 К
Стаховский Р. И. 8619, 8651 Д
Стрелиц Ш. И. 8003
Суэки 7687

Т

Тайманов А. Д. 7834, 7860
Таймуразов Х. И. 8050
Талалян А. А. 7883
Тевзадзе Г. Н. 8446, 8456
Терентьев П. В. 7594
Тимна А. Ф. 7909
Ткачев М. И. 7758
Топчиев А. В. 7578
Трифонов П. А. 8413
Туманян С. 7595

У

У Вэнь-цзюнь 7874
Ульянов П. Л. 7904
Устименко Б. П. 8087
У Чан-цзю 7741

Ф

Фалевич Б. Я. 7659
Фаталиев Х. М. 7606 К
Фельдбаум А. А. 8620
Феттер Г. 7613
Фильчаков П. Ф. 8622
Фирсакова О. С. 7986 Д
Фишер Р. А. 8273 К
Фомин С. В. 7858
Фрадлин Б. Н. 7622
Фирдман М. И. 8387

Х

Харшиладзе Ф. И. 7908
Хуан Чжэн-чжун 84
Хэ Чжао 7755

Ц

Цатурян В. А. 7643

Ч

Чакалов Л. 7982 68К
Чапанов Хр. 8599
Чеботарев Г. А. 7619
Чекмарев Т. В. 8053
Черненко А. К. 7581
Чесноков Е. Н. 7598
Чжан Цзун-суй 8229
Чинаев П. И. 7589
Числов П. А. 8409
Чистяков В. Д. 7640
Чичинадзе М. Н. 7609 Д
Чокин Ш. Ч. 7583
Чэнь Чжун-му 7751

Ш

Шаманский В. Е. 8622
Шафаревич И. Р. 7805
Шинцель 7743
Широких И. И. 8650 К
Широковская О. С. 7787
Широкорад Б. В. 8011
Ширяев Е. А. 7947
Шмидов Ф. И. 7889
Шоломов А. М. 8418 К
Шрейдер Ю. А. 8559
Штейнберг Н. С. 7971

Э

Эйдельман С. Д. 8066, 8073 Д
Энгельсон Я. Л. 8234 Д

Ю

Юдицкий М. М. 8406

Я

Яковлева В. И. 7942
Якубович В. А. 8023, 8081

A

Abellanas P. 8429
Abian S. 7993, 8452
Ablow C. M. 8537
Ackoff R. L. 8298
Addison J. W. 7662
Adrian P. 8333
Aguiar da Silva Leme R. 8351 K
Aigner A. 7843
Albasiny E. L. 8549
Albert A. A. 7807
Allderige J. M. 8300
Altman M. 8560
Amato V. 7972
Amir-Moé A. R. 8384
Anderson A. G. 8592
Anderson J. 8361
Anderson O. 8272 K
Andersson B. J. 7940
Andreoli G. 8124, 8187
ApSimon H. G. 8438
Araki S. 7875
Arfwedson G. 8329
Aribaud H. 8344
Arrow K. J. 8301
Artzy R. 7841
Aubert K. E. 7799
Avann S. P. 7822
Avignant J. 8414 K

B

Backes F. 8460, 8461
Bagemihl F. 7952
Bajcsay P. 8143 K
Banerjee K. N. 8079
Barbensi G. 7634 K
Barclay G. 8355 K
Barrucand P. 8390
Barton D. E. 8259, 8260
Bataille M. 8593
Bateman P. T. 7740
Bauer F. L. 8573
Bauer F. W. 7825
Baumann R. 8445
Baumslag G. 7792
Beale E. M. L. 8280
Beaumont H. de 8107
Beauvois F. H. A. 7765 K
Bellman R. 8022, 8277, 8282
Beneš M. 8323
Benz W. 8514
Bernhart A. 8441
Berstein I. 7866
Bessaga C. 8194
Beth H. J. E. 8141 K
Bianchi L. 8462
Bielecki A. 8047
Bílý J. 8325
Blackburn N. 7785
Blaschke W. 8447
Blom S. 7702
Blumen I. 8258
Bofinger B. 7746
Bofinger V. J. 7746
Bögel K. 7892
Bolinder E. F. 8375
Bonferroni C. E. 8134 K
Bouligand G. 8471
Bouvaist R. 8362
Bowerman E. R. 8296
Braconnier J. 7796
Braffort P. 8609
Bramson M. J. 8293
Bräuning G. 7892
Breiman L. 8241
Brown A. B. 7993
Brückner R. 8356 Д
Bruijn N. G. de 7974
Buchwald V. T. 8100
Bühlmann H. 8331
Bukovics E. 8091
Burckhardt J. 7612
Busulini B. 7698, 7699
Butzer P. L. 7886

C

Calabi E. 8512
Caillet C. 8609
Cain A. L. 8594
Cameron R. H. 8226
Campbell E. S. 8522
Capriz G. 8367
Carleson L. 7949
Carlsson S. G. 8557
Carlitz L. 8156
Carnap R. 7718 K
Carr J. W. 8544
Carteron J. 8626
Castro G. de 8265
Castrucci B. 8508
Cavallin J. 8416 K
Chang S. S. L. 8601
Chang Tsung-sui 8229
Charles B. 8175
Châtelet F. 8422
Chemnitius F. 8140 K
Chen Chung-mu 7751
Chevalley C. 8484 K
Chien K. L. 8624
Chow H. C. 7907
Chow Tse-sun 8057
Chow W. L. 8430
Christian C. 7696
Church A. 7668
Cives G. 7639
Clark C. E. 8277
Clark R. S. 8469
Clarke L. E. 7845
Clarke R. W. 8594
Clement M. R. 8347
Cohan N. V. 7793
Cohen E. 7745
Cole C. T. 8624
Copi J. M. 7717 K
Costa de Beauregard O. 8488
Cotlar M. 8188
Craft C. J. 8277
Crampe S. 8507
Criqui F. 7603
Culbertson A. F. 8244
Culbertson J. Th 8647 K
Cypkin Ja 8082
Czipszer J. 7911

D

Dallmann H. 8412
Dalton J. P. 8169 K
Dantzig D. van 8485
Darwin C. G. 7632
David F. N. 8259, 8260
Davis P. 7926
Davison B. 8111
Deaux R. 8385
Dedecker P. 8494
De Giorgi E. 8119
Dekker J. C. E. 7665, 7666
Delachet A. 8135 K
Delange H. 7730, 7731
Delorme S. 7615
Delpierre M. 8634
Demmig R. 7655 K
Denjoy A. 7734
Dennis S. C. R. 8531
Deprit A. 8184
Derchain C. 8459
Destouches J. L. 7714
Dieudonné J. 7797, 7798
Divinsky N. 7808
Docquier F. 7987 Д
Dombi B. 7626
Douglas A. S. 8538
Downton F. 8306
Drăgilă P. 8444
Dubins L. E. 8221
Durand E. 8108
Dvoretzky A. 8130
Dwinger P. 7826, 7828

E

Echarte J. 8399
Eells J. 8491
Egerváry E. 8539
Ehrlich L. W. 8547
Eilenberg S. 7810
Elgerd O. I. 8621
Elldin A. 8557
Elrod H. G., Jr 8051
Ennola V. 7803
Erdös P. 7749

F

Faber K. 7922
Fadini A. 8470
Fajklewicz Z. 8571
Falkoff D. 8316
Faragó L. 8397 K
Farahat H. K. 7782
Faure R. 8009, 8028
Fearns W. J. 8126
Federer H. 7882
Feldt L. S. 8262
Fell J. M. G. 8214
Fempl S. 8150
Fenyö I. 8181
Ferguson C. E. 8286
Fernandes Costa M. A. 8269

Fiedler M. 7837, 8420
Fisher M. E. 8541, 8561
Fisz M. 8250 K
Fleischer J. 7800
Fletcher H. J. 7902
Flett T. M. 7905
Foiaş C. 8183
Forsythe G. E. 8575 K, 8657
Foss K. A. 8030
Freud G. 8911
Freudenthal H. 7709, 7795
Friedberg R. M. 7671
Friedman J. 7669
Friedman L. 8287
Fuchs W. H. J. 7962
Fucks W. 8328
Fukami T. 8493
Fuller A. T. 8561
Fürst D. 7704

G

Galantino F. 8574
Gale L. A. 8570
Gales K. 8285
Ganelius T. 8146
Gani J. 8304, 8305
Gårding L. 8044
Garnir H. G. 8036, 8037, 8068 K
Gáspár J. 7772
Géhéniau J. 8231
Gelbaum B. R. 8193
Gelfond A. O. 7763 K
Gerber R. 8109
Giannelli B. 7644
Giger A. 8017
Gilles D. C. 8545
Girault M. 8307
Gloden A. 7757
Gnedenko B. 8249 K
Gobert J. 8036, 8037
Göcke H. 8019
Godeaux L. 8185, 8357, 8423, 8424
Godwin H. J. 7804
Goetz A. 7865
Goldberg M. 8383
Goldberg R. R. 8164
Golde W. 8173 K
Goldman S. 8247 K
Gonzáler - Fernáncder J. M. 7900
Goodman A. W. 7938
Goodman L. A. 8252
Goodstein R. L. 7679
Goodwin E. T. 8548
Górski J. 7932, 7937, 7980, 8395 K
Graeub W. 7781
Graf U. 8345
Grätzer G. 7824
Gray J. W. 8478
Greenspan D. 8572
Greenberg B. G. 8563
Grenander U. 8330
Griffith J. L. 8153
Grimsdale R. L. 5858
Gröner G. 8354 K
Guan Chi-wen 8554
Guggenheimer H. 8496, 8497
Günther G. 7713
Günzler H. 8071 Д
Guy R. 8198

H

Haantjes J. 8483 K
Hadwiger H. 7959
Hahn W. 7756
Hällström G. af 7964
Hale J. K. 8026
Hamaker H. C. 8267
Hano J. 8495
Harang F. 8414 K
Harant M. 8411
Harary F. 7831, 7840, 7844, 7846
Harling J. 8293
Harper K. E. 8636, 8642
Hartley H. O. 8252
Hassan H. A. 8088
Haupt O. 8454, 8511
Hausner A. 8203
Hayman W. K. 7961
Haynes J. E. 8654
Hazelwood R. 8352 K
Hecquet J. 8380
Heinhold J. 8652
Heins M. 7968
Helbig M. 8343, 8628
Hellman O. 8114
Hempel E. 8611
Henkin L. 7711
Henrici P. 8039, 8565
Hertz D. B. 7585
Hilton P. J. 7864
Hinshelwood C. 7596, 7597
Hintikka K. J. J. 7660
Hirakawa J. 8457
Hisey B. L. 8614
Hiż H. 7692
Hlawka E. 7732
Hochberg H. 7691
Hodge W. V. D. 7631, 8502 K
Hofheimer R. W. 8618
Hofmann J. E. 8369
Hohenberg F. 8439
Hoo E. 8656
Hörmander L. 8035
Horton J. W. 8592
Howard P. R. 8172
Hsu L. C. 8197
Huemmer W. S. L. 7707
Hughes D. R. 8434
Hwang Cheng-chung 8468

I

Ionescu-Tiu C. 8379
Imas C. 7899
Inzinger R. 8629
Isaye G. 7712
Isbell J. R. 7835
Ishizaki H. 8534 8535,
Isiwata T.7856, 7857
Iwasawa K. 7806
Izumi Y. 7682, 7695

J

Jaeckel K. 8167
Jackson J. R. 8294
Jacobsthal E. 7750, 7759
James I. M. 7867, 7868
Jecklin H. 8334, 8337
Jeffreys H. 8132
Johnson D. L. 8637
Johnson R. E. 7812
Jones D. S. 8131
Jones J. Jr 8015
Jörgens K. 8117
Juhos B. von 7703
Julia G. 8481 K

K

Kac M. 8513
Kahane J. P. 7918, 7923
Kajiwara J. 8064
Kalaba R. 8282
Kalman J. A. 8227
Kampe de Fériet J. 8162
Kapur J. N. 8090
Kárteszi F. 8417 K, 8516
Kato T. 8210, 8211
Kayan I. 8536
Kelly P. 7839
Kendall D. G. 8313
Késedi F. 8386
Kesten H. 8309
Khan N. A. 7775, 7776
Kinoshita S. 7847
Kirkham D. 8151
Kisyński J. 8047
Kjellberg G. 8558
Klauss G. 7600
Kleene S. C. 7662
Klein H. 8271
Kline M. 8131
Ko Chao 7755
Kochen M. 8312
Kochendörffer R. 7786
Koizumi S. 7884, 7885
Kokoris L. A. 7820, 7821
Kolmogorov A. 8178, 8179
Kotzig A. 7842
Kousnetzoff N. 8644
Krabbe G. L. 8213
Krakowski F. 7777
Kramer H. P. 8031
Kreisel G. 7674, 7710
Kreiss H. O. 8034
Krishna G. 8603
Krule I. S. 7802
Krysicki W. 8137 K
Krzyżański M. 8058
Krzywoblocki M. Z. v 8088
Kühnel U. 7760
Kulikl S. 7924
Kumari S. 7906
Kurepa S. 8209
Kustaanheimo P. 7715
Kwan Chao-chin 8220

L

La Barbera A. 8378
Labrador J. E. 7625
Lacombe D. 7674, 7675
Ladyženskaya O. A. 8038
Lagrange R. 8515
Lah I. 8340, 8341
Laha R. G. 8270
Lang R. 8342
Lang S. 8436
Larrivee J. A. 7617
Laugwitz D. 8498, 8476
Lau Leung—sum 8206, 8212
Lax P. D. 8207
Leader S. 8125
Leavitt W. G. 7814
Leblanc H. 7700
Lee H. N. 7690
Lee Da-tsin 8517
Leech J. 7744, 8368
Leenders J. H. 7780
Leepin P. 8336
Lefranc M. 7976
Legendre R. 7965
Legrady K. 8480
Lehmer E. 7729
Lehmer D. H. 7729
Leichtweiss K. 8466, 8467
Leimbacher W. 8337
Leja F. 7930, 7931, 8392 K
Lelong-Ferrand J. 8489
Leng Sen-ming 7694
Lenz H. 8360
Lepage T. 8185
Lesemann K. J. 8584
Lesh F. 8577
Lesieur L. 7811
Lespinard V. 8415 K
Levinson N. 8004, 8020
Lévy-Bruhl 8427
Lewin L. 8133 K
Li Hsi-min 7813
Liao S. D. 7870
Lichnerowicz A. 8487
Liebmann G. 8606
Likes J. 8323
Littauer S. B. 8296
Liu Yung-ching 8001
Livingstone D. 7599
Lo A. W. 8596
Locke W. N. 8638
Lokki O. 8349
Longo Barletta C. 7823
Longo C. 8453
Look K. H. 7970
Lönnqvist C. 8391
Loonstra F. 7790
Lovass-Nagy V. 8533
Love E. R. 8182
Luchak G. 8310, 8311
Ludwig W. 8346
Luizi E. G. 8338
Luxemburg W. A. J. 7887

M

McCarthy P. J. 7753
McCullough J. 8641
McLachlan D., Jr 8318
Madow W. G. 8256
Mahmoud M. W. 8262
Magiros D. G. 8077, 8078
Maier W. 7727
Mainra V. P. 8165
Malcolm D. 8277
Mallows C. L. 8259
Manaira M. 8562
Mandan S. R. 8381
Mandel J. 8255
Mandelbrot B. 8327
Marakathavalli N. 8253
Marathe C. R. 7773
Markov A. A. 7685
Markovitch D. 7774
Marsicano F. R. 8075
Martinek J. 8107
Massey W. S. 7869, 7871
Mastrogiacomo P. 8472
Matsusaka T. 8433, 8435
Matsumura Y. 7973
Matsushima Yataro 7829
Matsushima Yozô 8495
Matsushita S. 7830
Matthes K. 8222
Matthews G. 8186
Mechanikos 8633
Meerov M. V. 8080
Meinardus G. 8653
Mendelson E. 7895
Mentes I. 8365 K
Merk G. 8302
Merriel D. 7839
Meschkowski H. 7927
Miksa F. L. 7722
Milloux H. 7627
Mills E. S. 8291, 8292
Michael E. 7861—7863
Michel P. H. 7764 K
Mitchell A. R. 8525
Mitchell J. M. 8591
Mizkjewitsch N. 8490
Mizumoto H. 7967
Mordell L. J. 7739
Morgan R. D. 7614
Moh Shaw-kwei 7688
Moisil Gr. C. 7697
Moser L. 7722, 8161
Mostowski A. 7661
Moór A. 8474
Moos H. 8264
Mrówka S. 8189
Muchart P. 7762
Muir W. W. 8540
Murphy J. S. 8649 K
Myhill J. 7667

N

Nagata M. 8501
Nakai Y. 8437
Naim L. 7979
Narasimha Rao V. V.L. 8163

Naslin P. 8631
Nasu Y. 8464
Ngoescu N. 7747, 7748
Nehari Z. 8041
Néron A. 8428
Ness W. 7642
Neumeister R. 8404
Nevanlinna R. 7628
Newman M. 7733
Nicol C. A. 7754
Norden P. V. 8348
Norek C. 8173 K
Nordlander G. 8505
Nørlund N. E. 8157
Novikow P. S. 7676

O

Obata M. 8499
Ogasawara T. 8216
Okubo T. 8477
Olkin I. 8254
Omar Ali Siddiqi 8160
Ono K. 7894
Ortlieb I. 8303 K
Otsuki T. 8479
Ozawa M. 7935
Ozeki N. 7838

P

Palevsky M. 8600
Panella G. 8509
Papakyriakopoulos C. D. 7848, 7849, 7851—7853
Papelier G. 8364 K
Parodi M. 8506, 8518, 8519
Parreau M. 7969
Parsons D. H. 8000
Paszkowski S. 8173 K
Patzelt G. 8543
Peck L. G. 8352 K
Pekeris C. L. 8551
Pełczyński A. 8194
Pereira Gomes A. 8086
Perl E. R. 8614
Pernet R. 8415 K
Perron O. 7925
Perry C. L. 8537
Perry J. W. 8645
Perry K. E. 8618
Persson E. 8602
Peter H. 8353 K
Peterson W. W. 8576
Pettineo B. 8040
Peyerimhoff A. 7901
Peyser G. 7989
Pham M. Q. 8486
Pietraru H. 8630
Pilikă P. 7912
Pini B. 8060, 8061
Pinney E. 8152
Piranian G. 7950, 7951
Pitt H. R. 7724
Pogorzelski W. 8055, 8056
Pollard H. 8166
Polya G. 7637
Poots G. 8083
Pöschl K. 7999
Potters M. L. 8281
Prabhu N. U. 8305
Prasad B. N. 8145
Prast J. W. 8595
Prodi G. 8054
Propster C. H., Jr. 8624
Prvanović M. 8500
Pták V. 7913, 7915, 8192
Puppe D. 7876, 7877
Putman H. 7701

Q

Quartly C. J. 8594

R

Rábai I 7651
Rabin M. O. 7677
Ragab F. M. 8158
Rajchman J. A. 8596
Ramsayer K. 8625
Rankin R. A. 7736
Rao J. N. K. 8235
Rao P. V. 8603
Rao R. R. 8225
Rapaport E. S. 7791
Rappaport D. 7646
Reade M. O. 7934
Rédei L. 7809
Reichbach M. 8274
Reiche E. 7638
Reifler E. 8639
Reina I. 8043
Reißig R. 8024
Ribneboim P. 7726
Ricciardi F. M. 8277
Rickart C. E. 8200
Rieger G. J. 7725
Rimer D. 7648
Rios de Souza J. E. 8405
Roberts J. B. 8155
Robertson W. 8177
Robinson A. 7719 K
Robinson H. G. 8610
Robinson R. M. 7670
Rocha L. M. 8394 K
Rogers C. A. 7737
Roquette P. 7783
Rosenberg A. 7810
Rosenbloom P. C. 7672, 8575 K
Ross A. W. 8297
Rossier P. 8475
Rouzet G. 8263
Rudel L. A. 8204
Rudin W. 7923
Ruelle D. 8230
Ruhman S. 8591
Runnenburg J. T. 8309
Rzewuski J. 8232

S

Sacter O. 7653 K
Salmon G. 8396 K
Salzmann H. 8504
Samuel I. 7771
Sanchez-Mazas M. 7706, 7708
Sansone G. 8136 K
Saran S. 8159
Sard A. 7890, 7891
Sarhan A. E. 8563
Sario L. 7966
Sarkar D. 8270
Satterly J. 8370
Satyanarayana K. 8389
Satyanarayana U. V. 8382
Saul'ev V. K. 8520
Schafer R. D. 7818, 7819
Scheibe E. 8233
Schiek H. 7789
Schild A. 7936
Schilling F. 8482 K
Schinzel A. 7743
Schmid W. 7624
Schmidt E. T. 7824
Schmidt W. 8242
Schneider E. 8290
Schreiber S. 7779
Schröder J. 8555
Schumaker J. A. 7616
Schumann W. 8104
Schwarz S. 7801
Schweizer B. 8529
Scott D. 7833
Scott N. R. 8613
Sedmak V. 7897
Segre B. 8510
Sekanina M. 7898
Semadeni Z. 8202, 8219
Shankar H. 7963
Shapiro A. 7850
Shapiro J. M. 8239
Shapiro N. 7664
Sharp J. B. 8615
Sherman B. 8240
Shields A. 7951
Shoenfield J. R. 7663, 7674, 7689
Sibagaki W. 8064
Siciak J. 7932, 7933
Siddiqui M. M. 8261
Sierpiński W. 7752, 7728
Simon H. 7761
Simonart F. 8185
Singh S. K. 7956, 7963
Skellam J. G. 8315
Smahel J. 7948
Sonner H. 7992
Sørensen N. A. L. 8245
Sóc V. T. 7735
Specht W. 7788
Spiegel M. R. 8033 K, 8149
Springer G. 7881 K
Stampacchia G. 8176
Steck G. P. 8236
Stein E. 8432
Steinhaus H. 8251
Steward G. C. 8443
Stewartson K. 8084
Stipanić E. 7716
Stoller D. S. 8308
Storch J. M. 8266
Storck H. 8343
Strelicas S. 7768
Strubecker K. 8451
Sublet J. 7705
Suppes P. 8283
Süssmann G. 8233
Svec A. 8450
Swoboda G. 8321
Szabó J. 8532
Szamer B. 8635
Szasz F. 7815
Szász P. 8129
Szöke B. 8322

T

Tachikawa H. 7816
Takeuchi T. J. 8171
Tallini G. 8431
Tanturri G. 8442
Tarantino N. 8363
Tarnove I. 8564
Tate J. 8436
Teensma E. 7673
Teodorescu P. P. 8093
Termens Mauri J. 8632
Terracini A. 8421
Thébault V. 8362
Thiele E. J. 7893
Thomas C. J. 8295
Thompson J. G. 8648 K
Thorndike L. 7611
Tintner G. 8314
Tits J. 8402
Todd J. A. 7629
Tomovich R. 8612
Torio Baladron F. 8120
Tricomi F. G. 8012, 8067 K, 8138 K
Tsuji M. 7978
Tucker A. W. 8278

U

Uehara H. 7869
Ueno S. 8317
Uglum O. 8602
Utz W. R. 8127

V

Van der Pol B. 8049
Vandiver H. 7754
Van Dyke M. D. 8085
Vanlaer G. 8339
Varadarajan V. S. 8224
Veiga de Oliveira F. 8025
Ven A. J. H. M. van de 7872
Veselý F. 7623
Vesentini E. 7778, 7779
Vidal Abascal E. 8448
Villa M. 8393 K
Ville J. 7686
Višik M. I. 8038
Vogel W. 8332
Volmer J. 8371

W

Wada T. 7682
Walfisz A. 7738
Wall R. E. 8637
Walter E. 8257
Wang Guang-ying 8052
Wang Shih-Chiang 7681
Warbanoff C. P. 7995
Warner F. J. 8523
Wartmann R. 8345
Weaver W. 8646
Weber K. 8608
Weiss G. 8174
Weiss I. 8237
Weizsäcker C. F. v. 8233
Wenk A. 8335
Wermer J. 7975
Whitehead J. H. C. 7850, 7868
Whittle P. 8284
Whyburn G. T. 7836
Widder D. V. 8059
Widom H. 8166
Williams R. W. 8615
Williamson J. H. 8201, 8205
Wilson S. B. L. 8550
Winet M. 8283
Wintner A. 7954
Wittich H. 7628
Wittmeyer H. 8530
Włodarski L. 8137 K, 8144
Wold H. O. A. 8281
Wright E. M. 7724
Wu Chang-gu 7741
Wu Wen-tsün 7873, 7874
Wunderlich W. 8440
Wyman M. 7722, 8161

Y

Yano K. 8492
Yeh G. C. K. 8107
Yood B. 8199
Yoshinaga K. 8216
Yourgrau W. 7599

Z

Zaanen A. C. 7770, 8223
Zabel E. 8288, 8289
Zariski O. 8425, 8426
Zavadowski W. 8218
Zelinsky D. 7810
Zelmer V. 7778
Žemaitis Z. 8401
Zemanek H. 8248 K
Zemmer J. L. 7827
Zięba A. 8275
Zoulias E. 8268
Zubrzycki S. 8276